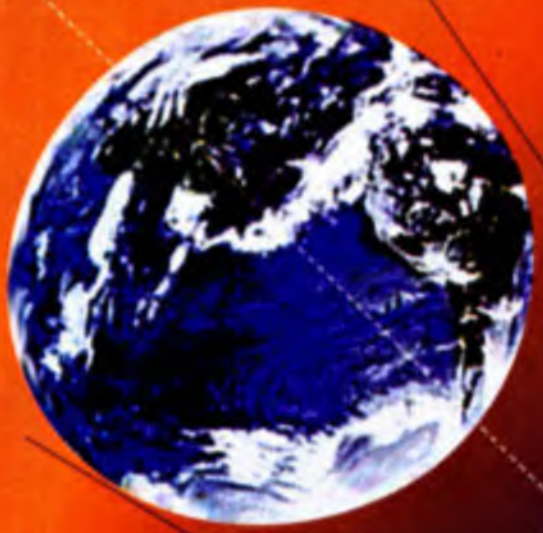


$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

William G. McCallum
Andrew M. Gleason
Deborah Hughes-Hallett, *et. al.*

WILEY

CECSA

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

Seminario

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

PRIMERA EDICIÓN EN INGLÉS
(PRIMERA EDICIÓN EN ESPAÑOL)

Producido por el consorcio con sede en la Universidad de Harvard y patrocinado por una subvención de la National Science Foundation de los Estados Unidos de América

William G. McCallum
Universidad de Arizona

Deborah Hughes-Hallett
Universidad de Harvard

Daniel Flath
Universidad del Sur de Alabama

Douglas Quinney
Universidad de Keele

Andrew M. Gleason
Universidad de Harvard

Wayne Raskind
Universidad de Southern California

Sheldon P. Gordon
Suffolk County Community College

Jeff Tecosky-Feldman
Haverford College

David Mumford
Universidad de Harvard

Joe B. Thrash
Universidad de Southern Mississippi

Brad G. Osgood
Universidad de Stanford

Thomas W. Tucker
Universidad Colgate

con la colaboración de

Paul M. N. Feehan
Universidad de Harvard

Adrian Iovita
Centre Interuniversitaire en Calcul Mathématique Algébrique

PRIMERA REIMPRESIÓN
MÉXICO, 1999

COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A. DE C.V.
MÉXICO

Dedicado a *Amy, Nell, Abby* y *Sally*

Título original:
MULTIVARIABLE CALCULUS, 1/Edition
ISBN 0-471-31151-0

Copyright © 1997, by John Wiley & Sons, Inc.
"All rights reserved. Authorized translation from the English language edition published by John Wiley & Sons, Inc."

Traducción:
Ing. Jorge H. Romo Muñoz
Ingeniero en Electrónica

Revisión Técnica:
Físico Juan Cristóbal Cárdenas Oviedo
Director del Departamento de Matemáticas
Universidad Iberoamericana

Cálculo de varias variables
Derechos reservados respecto a la 1a. edición en español:
© 1998, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A. de C.V.
Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca,
Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial
Registro núm. 43

ISBN 968-26-1315-9

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin el consentimiento previo y por escrito del editor.

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición: 1998
Primera reimpresión: 1999

Para establecer comunicación con nosotros puede hacerlo por:


correo:
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca
Azcapotzalco, 02400, México, D.F.


fax pedidos:
(015) 561 4063 • 561 5231


e-mail:
info@patriacultural.com.mx


home page:
http://www.patriacultural.com.mx

Prin

PREFACIO

n con nosotros

San Juan Tlihuaca
, México, D.F.

5231

al.com.mx

El cálculo es uno de los mayores logros del intelecto humano. Inspirados por problemas de astronomía, Newton y Leibniz desarrollaron las ideas del cálculo hace aproximadamente 300 años y, desde entonces, cada siglo ha demostrado la fuerza del cálculo para contestar a preguntas en matemáticas, ciencias físicas, ingeniería y ciencias sociales y biológicas.

El gran éxito del cálculo se debe a su extraordinaria capacidad para reducir problemas complicados a reglas y procedimientos sencillos. Pero precisamente aquí está el riesgo de enseñar cálculo: es posible exponer el tema solamente como un conjunto de reglas y procedimientos, con lo cual se pierde de vista su valor matemático y práctico. Con el generoso apoyo de la *National Science Foundation* (Fundación Nacional para las Ciencias), nuestro consorcio se ha dado a la tarea de crear un nuevo plan de estudios del cálculo para recuperar ese conocimiento. Este libro es la segunda etapa de ese esfuerzo; la primera es nuestro texto sobre una sola variable.

Principios

Los dos principios que guiaron el desarrollo de nuestro texto sobre una sola variable continúan vigentes; el primero de ellos es nuestra fórmula para restituir al cálculo su contenido matemático:

> **Regla de tres:** *Todo tema debe presentarse en forma geométrica, numérica y algebraica.*

Permanentemente alentamos a los alumnos a pensar y escribir acerca del significado geométrico y numérico de lo que hacen. No es nuestra intención soslayar el aspecto puramente algebraico del cálculo, sino más bien reforzarlo dando significado a los símbolos. Con frecuencia, en los problemas de tarea relacionados con aplicaciones pedimos a los estudiantes que expliquen verbalmente qué significan sus respuestas en términos prácticos.

El segundo principio, inspirado en Arquímedes, es nuestra fórmula para restituir el conocimiento práctico:

> **El método de Arquímedes:** *Las definiciones y procedimientos formales surgen de la investigación de problemas prácticos.*

Arquímedes creía que se ganaba intuición en problemas matemáticos considerándolos primero desde un punto de vista mecánico o físico.[1] Por la misma razón, nuestro texto contiene tantos problemas

[1] ...Consideré conveniente escribir para usted y explicar con detalle... la peculiaridad de cierto método, con el cual será posible que usted empiece a investigar algunos problemas en matemáticas, mediante la mecánica. Este procedimiento, estoy convencido, no es menos útil inclusive para la comprobación de los teoremas mismos; pues algunas dudas primero se aclararon para mí por un método mecánico, aunque tuvieron que demostrarse después por geometría porque su investigación por dicho método no proporcionó una demostración verdadera. Pero, por supuesto, cuando hemos adquirido por el método algún conocimiento de los problemas, es más fácil presentar la prueba que encontrarla sin ningún conocimiento previo. De *The Method* en *The Works of Archimedes* editado y traducido por Sir Thomas L. Heath (Dover, Nueva York).

de práctica. Siempre que es posible empezamos con un problema práctico y del mismo obtenemos resultados generales. Por problemas prácticos queremos decir aplicaciones reales, aunque no siempre. Estos dos principios han llevado a un programa de estudio radicalmente nuevo, mucho más de lo que pudiera indicar una mirada superficial a la tabla de contenido del libro.

Tecnología

En el cálculo de varias variables, más que en el de una sola variable, aprovechamos las computadoras y calculadoras gráficas para ayudar al estudiante a aprender a pensar en forma matemática. Por ejemplo, observar gráficas de superficies y diagramas de contorno es sumamente útil para comprender las funciones de muchas variables. Además, la capacidad para utilizar la tecnología de modo efectivo como herramienta es en sí de la mayor importancia. Esperamos que los estudiantes apliquen su propio juicio para determinar en qué casos es útil la tecnología.

Sin embargo, el libro no requiere ningún programa o tecnología específicos, y nos hemos adaptado a quienes no tienen acceso a tecnología suficientemente avanzada, incluyendo aquí copias de negativos complementarios para proyectores, que muestran gráficas de superficies, diagramas de contorno, curvas parametrizadas y campos vectoriales. Idealmente, los estudiantes deben tener acceso a equipos con capacidad para graficar funciones, diagramas de contorno y campos vectoriales, y para calcular numéricamente integrales múltiples e integrales de línea. A falta de esto, la combinación de calculadoras gráficas y transparencias es satisfactoria, y se ha empleado con éxito en programas piloto.

¿Qué necesita saber el estudiante?

Los estudiantes que utilicen este libro deben haber terminado con éxito un curso de cálculo de una variable. Para que aprendan de este libro, no es necesario que hayan estudiado el libro de cálculo de una variable editado por el mismo consorcio.

El libro invita a estudiantes bien preparados a pensar, sin dejar de ser accesible a quienes tienen conocimientos menos sólidos. Con métodos numéricos, gráficos y algebraicos se facilitan al estudiante varias formas para dominar el material. Este método los alienta a perseverar, con lo que se reducen sus posibilidades de fracasar.

Contenido

El método para abordar el diseño de este material fue el mismo que el de nuestro libro de cálculo de una variable: partimos de cero e hicimos una lista de temas que consideramos fundamentales para la materia, después de intercambiar opiniones con matemáticos, ingenieros, físicos, químicos, biólogos y economistas. Para ajustarse a necesidades individuales o de los cursos, los temas se pueden quitar o añadir fácilmente o cambiarse el orden.

A lo largo del texto, suponemos que las funciones de dos o más variables están definidas en regiones con fronteras lisas por partes.

Capítulo 11: Funciones de varias variables

Presentamos las funciones de varias variables desde distintos puntos de vista, mediante gráficas de superficies, diagramas de contorno y tablas. Este capítulo tiene la misma finalidad, para este curso, que la del capítulo 1 para el curso de cálculo de una variable; proporciona al estudiante la capacidad para leer gráficas y diagramas de contorno y pensar gráficamente, para leer tablas y pensar numéricamente, y para aplicar estos conocimientos junto con sus bases de álgebra para hacer modelos de situaciones reales. Ponemos especial atención en la idea de la sección transversal de una función, obtenida al hacer variar

una variable independientemente de las otras. Hemos observado que para el estudiante es útil estudiar esta noción antes de pasar a derivadas parciales y gradientes. Estudiamos funciones lineales en detalle, como preparativo para la noción de linealidad local. Terminamos con una sección sobre continuidad.

Capítulo 12: Una herramienta fundamental: los vectores

Definimos los vectores como objetos geométricos que tienen dirección y magnitud, apoyándonos en el modelo de los vectores de desplazamiento, y luego introducimos la representación de vectores en términos de coordenadas. Damos definiciones geométricas y algebraicas equivalentes del producto punto y producto cruz.

Capítulo 13: Diferenciación de funciones de varias variables

Presentamos las nociones básicas de derivada parcial, derivada direccional, gradiente y diferencial. De conformidad con el espíritu del texto de una sola variable, situamos estas nociones en el marco de la linealidad local. También utilizamos linealidad local para presentar la noción de diferenciabilidad, y para el análisis de la regla de la cadena en varias variables. Estudiamos derivadas parciales de orden superior, su interpretación en las ecuaciones diferenciales parciales y su aplicación a aproximaciones cuadráticas de Taylor. Terminamos con una sección sobre diferenciabilidad.

Capítulo 14: Optimización

Aplicamos las ideas del capítulo anterior a problemas de optimización restringida y no restringida. Derivamos la prueba de la segunda derivada para extremos locales, considerando primero el caso de polinomios cuadráticos, y luego recurriendo a la aproximación cuadrática de Taylor. Estudiamos la existencia de extremos globales para funciones continuas en regiones cerradas y acotadas. En la sección de optimización restringida, analizamos multiplicadores de Lagrange, restricciones de igualdad y desigualdad, problemas con más de una restricción y el lagrangiano.

Capítulo 15: Integración de funciones de varias variables

Explicamos gráficamente la integral definida de varias variables considerando el problema de estimar la población total de un diagrama de contorno para la densidad de una población, usando cuadrículas cada vez más pequeñas. Continuamos con ejemplos numéricos que emplean tablas, y luego presentamos dos métodos para calcular integrales múltiples: analíticamente, mediante integrales iteradas, y numéricamente, por el método de Montecarlo. Analizamos las integrales dobles y triples en coordenadas cartesianas, polares, esféricas y cilíndricas. También estudiamos aplicaciones a la probabilidad con varias variables.

Capítulo 16: Curvas y superficies paramétricas

Iniciamos con el problema de representar curvas en forma paramétrica, luego usamos curvas parametrizadas para representar movimiento. Definimos velocidad y aceleración geométricamente, luego damos las fórmulas en términos de componentes. Continuamos con una sección sobre superficies parametrizadas y a continuación analizamos el vínculo entre representaciones implícitas, explícitas y paramétricas de superficies empleando el teorema de la función implícita. La sección final analiza una de las aplicaciones originales del cálculo: la explicación de Newton de las leyes de Kepler sobre el movimiento de los planetas.

Capítulo 17: Campos vectoriales

En este breve capítulo presentamos funciones de varias variables con valor vectorial, o campos vectoriales. Este capítulo establece las bases para el enfoque geométrico de los siguientes tres capítulos, dedicados a integrales de línea, integrales de flujo, y a la divergencia y el rotacional. Iniciamos con ejemplos físicos, tales como los campos vectoriales de velocidad y campos de fuerza, e incluimos muchos diagramas de campos vectoriales para ayudar a desarrollar la intuición geométrica. También estudiamos líneas de flujo de campos vectoriales y su relación con sistemas de ecuaciones diferenciales.

Capítulo 18: Integrales de línea

Presentamos el concepto de integración de un campo vectorial a lo largo de una trayectoria con una definición sin coordenadas. Dedicamos algún tiempo a desarrollar la intuición mediante dibujos de campos vectoriales con trayectorias sobrepuestas, antes de introducir el método de calcular integrales de línea mediante parametrizaciones. Luego estudiamos campos conservativos, campos de gradiente y el teorema fundamental del cálculo para integrales de línea. Continuamos con un análisis de campos vectoriales no conservativos y el teorema de Green, y damos la prueba del rotacional para un campo vectorial conservativo. Concluimos con una prueba del teorema de Green usando la fórmula del cambio de variables.

Capítulo 19: Integrales de flujo

Presentamos la integral de flujo de un campo vectorial a través de una superficie parametrizada, de la misma manera que presentamos las integrales de línea. Primero damos una definición sin coordenadas, luego estudiamos ejemplos donde la integral de flujo (o al menos su signo) se pueden calcular geométricamente. A continuación mostramos cómo calcular integrales de flujo sobre gráficas de superficies, porciones de cilindros y porciones de esferas. Concluimos con una sección referente a integrales de flujo sobre superficies arbitrarias parametrizadas.

Capítulo 20: Cálculo de campos vectoriales

Exponemos la divergencia y el rotacional en una forma que no requiere de coordenadas, la divergencia en términos de densidad de flujo y el rotacional en términos de densidad de circulación. Damos luego las fórmulas en coordenadas cartesianas. En el texto de una sola variable derivamos el teorema fundamental del cálculo señalando que la integral de la rapidez de cambio es el cambio total. De manera muy semejante, derivamos el teorema de la divergencia mostrando que la integral de la densidad de flujo sobre un volumen es el flujo total que sale del volumen, y derivamos el teorema de Stokes demostrando que la integral de la densidad de circulación sobre una superficie es la circulación total alrededor de su frontera. Analizamos los tres teoremas fundamentales del cálculo de varias variables, e indicamos cómo llevan a la condición tridimensional del rotacional para un campo vectorial conservativo. Concluimos con una sección que prueba el teorema de la divergencia y el teorema de Stokes usando la fórmula del cambio de variables.

Cambios respecto a la edición preliminar

Hemos incorporado sugerencias de lectores de la edición preliminar, quienes nos han auxiliado para hacer la exposición tan clara y concisa como es posible. La mayoría de las figuras se volvieron a dibujar, particularmente las figuras en tres dimensiones.

- *Capítulo 11.* Hemos agregado una sección sobre límites y continuidad.

- *Capítulo 12.* Las definiciones geométrica y algebraica de los productos punto y cruz ahora se explican una a continuación de la otra al principio de cada sección. Cada sección contiene un argumento que explica por qué las dos definiciones son equivalentes.
- *Capítulo 13.* El material referente a derivadas direccionales y gradientes se ha reorganizado de modo considerable. Presentamos las derivadas direccionales y los vectores gradiente en la sección 13.4, pero sólo en el caso de dos dimensiones. Hemos sustituido la definición geométrica del gradiente por la definición algebraica, motivada por la fórmula para calcular derivadas direccionales; las propiedades geométricas se derivan entonces a partir de esta fórmula. La sección 13.5 contiene nuevo material sobre la relación entre gradientes bidimensionales y tridimensionales, y acerca de situaciones donde el gradiente no tiene interpretación geométrica. En la sección que trata la regla de la cadena agregamos un ejemplo nuevo de fisicoquímica. Hemos agregado una nueva sección al final sobre diferenciabilidad desde un punto de vista gráfico e intuitivo, que analiza la relación entre diferenciabilidad, derivadas parciales y continuidad.
- *Capítulo 14.* El material que trata el tema de los extremos globales de la sección 14.1 anterior se ha cambiado a la 14.2, de modo que ahora la sección 14.1 se concentra exclusivamente en los puntos críticos y su clasificación. El material teórico sobre conjuntos cerrados y acotados se ha cambiado al final de la sección 14.2. Esto resulta en un mayor énfasis en las ideas principales.
- *Capítulo 15.* Los ejemplos introductorios se han hecho más breves para llegar a la definición de manera más rápida.
- *Capítulo 16.* Hemos reorganizado considerablemente el material de las secciones 16.1 a la 16.3. La nueva sección 16.1 se concentra en la idea geométrica de representar paramétricamente una curva. La nueva sección 16.2 expone la idea de una curva paramétrica que representa un movimiento, e introduce los vectores de aceleración y velocidad. El material de representaciones implícitas, explícitas y paramétricas se ha cambiado a la nueva sección 16.4 sobre el teorema de la función implícita. Hemos agregado la sección 16.5 sobre la explicación de Newton a las leyes de Kepler.
- *Capítulo 18.* Hemos agregado material sobre la condición tridimensional del rotacional, presagiando el capítulo 20, así como una nueva sección que da una prueba del teorema de Green.
- *Capítulo 19.* Hemos reorganizado este capítulo en tres secciones, con algún material nuevo. La sección 19.1 contiene nuevo material referente al cálculo de integrales de flujo sin parametrizaciones, usando argumentos geométricos sencillos para reducir la integral a una doble integral. La sección 19.2 tiene nuevo material sobre el cálculo de integrales de flujo sobre porciones de cilindros y esferas.
- *Capítulo 20.* Como reflejo de los cambios hechos en el capítulo 12 las definiciones geométricas y algebraicas de divergencia y rotacional ahora se presentan juntas, con un argumento intuitivo que explica por qué dan el mismo resultado. Hemos agregado algunos ejemplos con mayor grado de dificultad, y material acerca de campos vectoriales sin divergencia y sin rotacional. Una nueva sección que incluye los tres teoremas fundamentales analiza la prueba tridimensional del rotacional y la prueba de la divergencia para campos rotacionales. Hemos sustituido la anterior sección final con una nueva que da pruebas del teorema de la divergencia y el teorema de Stokes, con base en la idea de parametrizar una región y emplear cambio de variables para reducir la prueba al caso de regiones rectangulares, acorde con la prueba estándar moderna que utiliza formas diferenciales. Ésta sección es un reto para estudiantes avanzados y sirve para cerrar con broche de oro este curso para los alumnos sobresalientes.

Opciones para un curso de un semestre

Los instructores que utilicen este texto en un curso de un semestre tienen las siguientes dos opciones: pueden detenerse al terminar el capítulo 18, a fin de dar tiempo para un estudio completo de curvas y superficies parametrizadas, integrales de línea y teorema de Green, o pueden continuar al capítulo 20,

cubriendo sólo las primeras secciones de los capítulos 16, 17, 18 y 19, que contienen un breve análisis de integrales de línea y de flujo desde un punto de vista geométrico, y dan a los estudiantes suficiente capacidad para comprender el teorema de la divergencia y el teorema de Stokes.

Nuestras experiencias

Durante el desarrollo de las ideas integradas en este libro hemos estado conscientes de la necesidad de poner a prueba todos los materiales, en una amplia variedad de instituciones que reciben varios tipos de estudiantes. Los miembros del consorcio han utilizado versiones previas del libro en una amplio rango de instituciones. Durante el año académico 1995-1996 fuimos auxiliados por colegas de más de 100 escuelas, quienes probaron el libro en clase y nos informaron de sus experiencias y las de los estudiantes. Este variado grupo de escuelas utilizó el libro en sistemas de semestres y trimestres, en laboratorios de cómputo, grupos pequeños, salones tradicionales, y con varias tecnologías diferentes. Agradecemos las valiosas sugerencias hechas, mismas que hemos tratado de incorporar en la primera edición del texto.

Reconocimientos

Agradecemos a Roby Aguirre, Ed Alexander, Carole Anderson, Leonid Andreev, Ralph Baierlein, Paul Balister, Frank Beatrous, Jerrie Beiberstein, Melanie Bell, Ebo Bentil, Yoav Berger, Shelina Bhojani, Thomas Bird, Paul Blanchard, Melkana Brakalova, John Bravman, David Bressoud, R. Campbell, Phil Cheifetz, Oksana Cherniavskaya, C. K. Cheung, Dave Chua, Dean Chung, Robert Condon, Eric Connaly, Radu Constantinescu, Pat Corn, Josh Cowley, Jie Cui, Caspar Curjel, Bill Dunn, Mike Esposito, Pavel Etingof, Bill Faris, Hermann Flaschka, Leonid Friedlander, Leonid Fridman, Deborah Gaines, Amanda Galtman, Avijit Gangopadhyay, Howard Georgi, Scott Gilbert, Marty Greenlee, David Grenda, Benedict Gross, John Haggod, David G. Harris, Angus Hendrick, John Huth, Robert Indik, Raj Jesudason, Qin Jing, Jerry Johnson, Millie Johnson, Joe Kanapka, Alex Kasman, Matthias Kawski, David Kazhdan, Misha Kazhdan, Thomas Kerler, Charlie Kerr, Mike Klucznik, Sandy Koonce, Matt Kruse, Ted Laetsch, Sylvain Laroche, Janny Leung, Dave Levermore, Lei Li, Weiye Li, Li Liu, Carlos Lizzaraga, Patti Frazer Lock, John Lucas, Alex Mallozzi, Brad Mann, Elliot Marks, Ricardo Martinez, Eric Mazur, Mark McConnell, Dan McGee, Tom McMahon, Georgia Mederer, Andrew Metric, Michal Mlejnek, Jean Morris, Don Myers, Bridget Neale, Alan Newell, James Osterburg, Myles Paige, Ed Park, Ted Pyne, Howard Penn, Tony Phillips, Laura Piscatelli, Ago Pisztora, Steve Prothero, Rebecca Rapoport, Russ Shachter, Barbara Shipman, Mary Sibayan, Jeff Silver, Chris Sinclair, Yum-Tong Siu, Keith Stroyan, Noah Syroid, Francis Su, Suds Sudholz, Mike Tabor, Cliff Taubes, Ralph Teixeira, Denise Todd, Elias Toubassi, Jerry Uhl, Doug Ulmer, Adrian Vajiac, Bill Velez, Faye Villalobos, Jianmei Wang, Joseph Watkins, Xianbao Xu, y Bruce Yoshiwara.

William G. McCallum
Deborah Hughes-Hallett
Daniel E. Flath
Andrew M. Gleason

Sheldon P. Gordon
David Mumdord
Brad G. Osgood
Douglas Quinney

Wayne Raskind
Jeff Tecosky-Feldman
Joe B. Thrash
Thomas W. Tucker

A los estudiantes: Cómo estudiar este libro

- Este libro puede ser diferente de otros textos de matemáticas que haya utilizado, de modo que puede ser útil conocer previamente algunas diferencias. En cada etapa, este libro destaca el *significado* (en términos prácticos, gráficos o numéricos) de los símbolos que se usan. Hay menos énfasis en procedimientos y uso de fórmulas, pero más en la interpretación de estas fórmulas de lo que pudiera esperarse. Se pedirá al estudiante explicar sus ideas o argumentar una respuesta mediante gráficas.
- El libro contiene las principales ideas del cálculo en lenguaje sencillo; el éxito en el uso de este libro depende de que lea, pregunte y reflexione acerca de las ideas presentadas. Aun cuando el lector pueda no haber hecho esto con otros libros, será útil leer el texto en detalle, no sólo los ejemplos resueltos.
- Hay pocos ejemplos en el texto exactamente iguales a los problemas de tarea, de modo que estos últimos no se pueden hacer buscando ejemplos similares "ya hechos". Un resultado satisfactorio con las tareas se alcanza esforzándose por entender las ideas del cálculo.
- Muchos de los problemas de este libro son de final abierto, lo que significa que hay más de un método correcto y más de una solución correcta, esto depende del análisis que haga el lector. A veces, resolver un problema depende de ideas de sentido común que no se indican explícitamente en el problema, pero que se tienen por experiencia.
- Este libro supone que el lector tiene acceso a una calculadora o computadora que pueda graficar funciones, de preferencia una que pueda dibujar gráficas de superficies, diagramas de contorno y campos vectoriales, y que además pueda calcular integrales de muchas variables e integrales de línea numéricamente. Hay muchas situaciones en donde no se puede encontrar solución exacta a un problema, pero puede usarse una calculadora para obtener una aproximación razonable; la respuesta así obtenida suele ser tan útil como una exacta. Sin embargo, el problema no siempre indica que se necesita una calculadora, así que usted decidirá.
- Este libro intenta dar igual valor a tres métodos para describir funciones: el gráfico (una figura), el numérico (una tabla de valores) y el algebraico (una fórmula). A veces será más fácil trasladar un problema dado de una forma a otra; por ejemplo, si el estudiante tiene que encontrar el máximo de una función, puede usar un diagrama de contorno para estimar su ubicación aproximada, usar su fórmula para encontrar ecuaciones que den su posición exacta, luego usar un método numérico para resolverlas. La mejor idea es ser flexible en el método: si una manera de ver un problema no funciona, intente otra.
- Los estudiantes que utilizan este libro han encontrado útil comentar en pequeños grupos estos problemas. Muchos de ellos que no son fáciles y quizá resulte provechoso abordarlos desde otras perspectivas que sus compañeros puedan brindar. Si no es factible el trabajo en grupo, los alumnos deben procurar que el maestro programe una sesión para abordar problemas adicionales.
- Usted probablemente se pregunta qué obtendrá del libro. Si hace un esfuerzo, la respuesta es que acabará por entender uno de los logros más importantes del milenio: el cálculo y se hará una idea del poder de las matemáticas en la era de la tecnología.

CONTENIDO

11 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES 1

11.1 FUNCIONES DE DOS VARIABLES 2

11.2 UN VIAJE AL ESPACIO TRIDIMENSIONAL 9

11.3 GRÁFICAS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES 15

11.4 DIAGRAMAS DE CONTORNO 24

11.5 FUNCIONES LINEALES 39

11.6 FUNCIONES DE MÁS DE DOS VARIABLES 45

11.7 LÍMITES Y CONTINUIDAD 53

PROBLEMAS DE REPASO 58

12 UNA HERRAMIENTA FUNDAMENTAL: LOS VECTORES 61

12.1 VECTORES DE DESPLAZAMIENTO 62

12.2 VECTORES EN GENERAL 71

12.3 EL PRODUCTO PUNTO 79

12.4 EL PRODUCTO CRUZ 89

PROBLEMAS DE REPASO 97

13 DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES 101

13.1 DERIVADA PARCIAL 102

13.2 CÁLCULO ALGEBRAICO DE DERIVADAS PARCIALES 110

13.3 LINEALIDAD LOCAL Y EL DIFERENCIAL 114

13.4 GRADIENTES Y DERIVADAS DIRECCIONALES EN EL PLANO 123

13.5 GRADIENTES Y DERIVADAS DIRECCIONALES EN EL ESPACIO 134

14 OP

15 INT

16 CUI

13.6 LA REGLA DE LA CADENA 141
13.7 DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN 148
13.8 ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES 152
13.9 NOTAS ACERCA DE APROXIMACIONES DE TAYLOR 161
13.10 DIFERENCIABILIDAD 168
PROBLEMAS DE REPASO 176

14 OPTIMIZACIÓN: EXTREMOS LOCALES Y GLOBALES 183

14.1 EXTREMOS LOCALES 184
14.2 EXTREMOS GLOBALES: OPTIMIZACIÓN NO RESTRINGIDA 193
14.3 OPTIMIZACIÓN RESTRINGIDA: MULTIPLICADORES DE LAGRANGE 207
PROBLEMAS DE REPASO 220

15 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES 225

15.1 LA INTEGRAL DEFINIDA DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES 226
15.2 INTEGRALES ITERADAS 235
15.3 INTEGRALES TRIPLES 245
15.4 INTEGRACIÓN NUMÉRICA: EL MÉTODO DE MONTECARLO 249
15.5 INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES 253
15.6 INTEGRALES EN COORDENADAS CILÓNDRICAS Y ESFÉRICAS 258
15.7 APLICACIONES DE LA INTEGRACIÓN A LA PROBABILIDAD 265
15.8 NOTAS ACERCA DEL CAMBIO DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL MÚLTIPLE 275
PROBLEMAS DE REPASO 279

16 CURVAS Y SUPERFICIES PARAMETRIZADAS 283

16.1 CURVAS PARAMETRIZADAS 284

16.2 MOVIMIENTO, VELOCIDAD Y ACELERACION 293

16.3 SUPERFICIES PARAMETRIZADAS 305

16.4 EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA 316

16.5 NOTAS ACERCA DE NEWTON, KEPLER Y EL MOVIMIENTO PLANETARIO 324

PROBLEMAS DE REPASO 331

17 CAMPOS VECTORIALES 337

17.1 CAMPOS VECTORIALES 338

17.2 EL FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL 345

PROBLEMAS DE REPASO 351

18 INTEGRALES DE LÍNEA 355

18.1 LA IDEA DE UNA INTEGRAL DE LÍNEA 356

18.2 CÁLCULO DE INTEGRALES DE LÍNEA SOBRE CURVAS PARAMETRIZADAS 366

18.3 CAMPOS DE GRADIENTE Y CAMPOS INDEPENDIENTES DE LA TRAYECTORIA 372

18.4 CAMPOS VECTORIALES DEPENDIENTES DE UNA TRAYECTORIA Y EL TEOREMA DE GREEN 382

18.5 PRUEBA DEL TEOREMA DE GREEN 392

PROBLEMAS DE REPASO 396

19 INTEGRALES DE FLUJO 401

19.1 LA IDEA DE UNA INTEGRAL DE FLUJO 402

19.2 INTEGRALES DE FLUJO PARA GRÁFICAS, CILINDROS Y ESFERAS 419

19.3 NOTAS SOBRE INTEGRALES DE FLUJO SOBRE SUPERFICIES PARAMETRIZADAS 422

PROBLEMAS DE REPASO 426

20 CÁLCULO DE CAMPOS VECTORIALES **429**

20.1 LA DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL 430

20.2 EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA 430

20.3 EL ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL 440

20.4 TEOREMA DE STOKES 458

20.5 LOS TRES TEOREMAS FUNDAMENTALES 465

20.6 PRUEBAS DEL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA Y EL TEOREMA DE STOKES 470

PROBLEMAS DE REPASO 477

APÉNDICES **483**

A REPASO DE LINEALIDAD LOCAL PARA UNA VARIABLE 484

B MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE 485

C DETERMINANTES 486

D REPASO DE INTEGRACIÓN DE UNA VARIABLE 487

E TABLA DE INTEGRALES 493

F REPASO DE FUNCIONES DE DENSIDAD Y PROBABILIDAD 495

G REPASO DE COORDENADAS POLARES 506

RESPUESTAS A PROBLEMAS **509**

ÍNDICE **519**

CAPÍTULO ONCE

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Son muchas las cantidades que dependen de más de una variable. Por ejemplo, el volumen de una cosecha depende de la cantidad de lluvia y de la cantidad de fertilizante empleado; la velocidad de una reacción química depende de la temperatura y de la presión del medio en donde ocurre; la fuerza de la atracción gravitacional entre dos cuerpos depende de sus masas y de la distancia que los separa, y la cantidad de lluvia de cenizas de una erupción volcánica depende de la distancia desde el volcán y del tiempo transcurrido después de la erupción. En cada uno de estos casos interviene una función de dos o más variables. En este capítulo veremos muchas maneras diferentes de visualizar funciones de varias variables.

11.1 FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Ejemplo 1

Solución

Notación de función

Supongamos que una persona piensa solicitar un préstamo a cinco años para comprar un automóvil y necesita calcular a cuánto ascenderán las mensualidades. Éstas dependen de la cantidad de dinero solicitado y de la tasa de interés. Estas cantidades pueden variar separadamente: el monto del préstamo puede cambiar, pero la tasa de interés permanecer constante; o bien, la tasa de interés puede cambiar, pero la cantidad prestada es la misma. Para calcular el pago mensual es necesario conocer ambas. Si el pago mensual es de $\$m$, el monto del préstamo de $\$L$ y la tasa de interés de $r\%$, entonces se expresa el hecho de que m es una función de L y r si escribimos:

$$m = f(L, r)$$

Esto es como la notación de función en cálculo de una variable. La variable m se llama variable dependiente, y las variables L y r reciben el nombre de variables independientes. La letra f representa la *función* o regla que da el valor de m correspondiente a valores dados de L y r.

Una función de dos variables se puede representar de manera gráfica, numérica –por una tabla de valores–, o algebraica –por una fórmula. En esta sección veremos ejemplos de cada una de estas tres maneras de visualizar una función.

Ejempl

Ejemplo gráfico: un mapa meteorológico

La figura 11.1 muestra un mapa meteorológico tomado de un periódico. ¿Cuál es la información que contiene? El mapa ilustra la temperatura máxima T pronosticada, en grados Fahrenheit (°F), en Estados Unidos en ese día. Las curvas del mapa, llamadas *isotermas*, dividen al país en zonas según si T está en 60, 70, 80, 90 o 100 grados. (*Isós* quiere decir igual y *therme* calor). Observe que la isoterma que separa las zonas de 80 y 90 grados enlaza todos los puntos donde la temperatura es exactamente de 90°F.

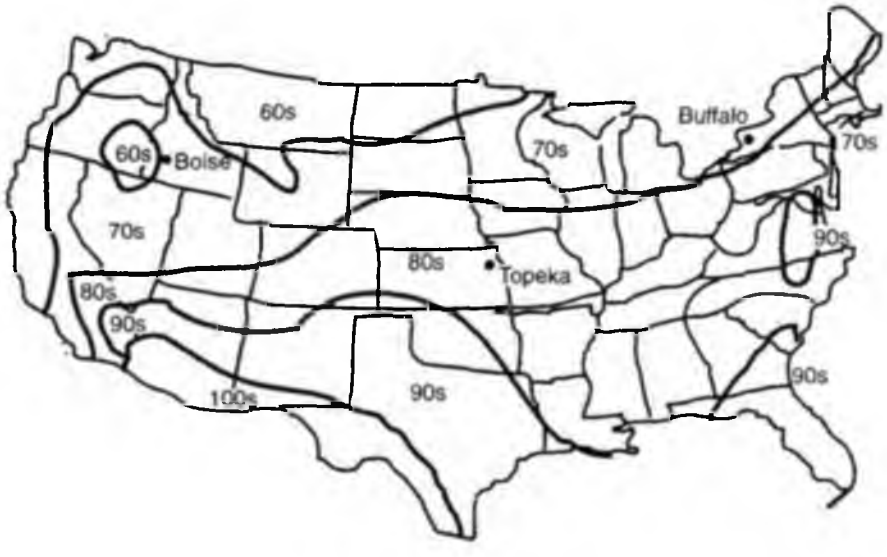


Figura 11.1 Mapa meteorológico que muestra las temperaturas máximas pronosticadas, T, en un día de verano.

Ejemplo 1 Calcular el valor pronosticado de T en Boise, Idaho; Topeka, Kansas, y Buffalo, Nueva York.

Solución Boise y Buffalo están en la región de 70 grados, y Topeka en la de 80 grados. Por lo tanto, la temperatura pronosticada en Boise y Buffalo está entre 70 y 80; la temperatura en Topeka, entre 80 y 90. En realidad se puede decir más. Aun cuando Boise y Buffalo están en la región de 70 grados, Boise está muy cerca de la isoterma de $T = 70$, mientras que Buffalo está muy cerca de la isoterma de $T = 80$, así que consideramos que la temperatura será de casi 70 en Boise y de casi 80 en Buffalo. Topeka está hacia la mitad entre $T = 80$ y $T = 90$ y, por lo tanto, estimamos que la temperatura en Topeka rondará los 85. De hecho, las temperaturas máximas reales para ese día fueron de 71°F para Boise, 79°F para Buffalo y 86°F para Topeka.

La temperatura máxima pronosticada, T, que ilustra el mapa meteorológico, es una función de (es decir, depende de) dos variables, que con frecuencia son la longitud y la latitud, o millas hacia el este u oeste y millas hacia el norte o sur de un punto fijo, por ejemplo Topeka. El mapa meteorológico de la figura 11.1 se llama *mapa de contorno* o *diagrama de contorno* de esa función. En la sección 11.3 se muestra otra manera de visualizar funciones de dos variables utilizando superficies; en la sección 11.4 se estudian mapas de contorno en detalle.

Ejemplo numérico: consumo de carne

Supongamos que un productor de carne quiere saber cuánta carne comprará la gente. Esto depende de cuánto dinero tienen las personas y del precio de la carne. El consumo de carne, C (en libras por familia por semana), es una función del ingreso familiar, I (en miles de dólares por año), y del precio de la carne, p (en dólares por libra). En notación de función se escribe:

$$C = f(I, p).$$

La tabla 11.1 contiene valores de esta función. Los valores de p se muestran horizontalmente en la parte superior de la tabla, los valores de I verticalmente en el lado izquierdo, y los valores correspondientes de $f(I, p)$ se indican en la tabla.[1] Por ejemplo, para encontrar el valor de $f(40, 3.50)$, buscamos en el renglón correspondiente a $I = 40$ debajo de $p = 3.50$, donde encontramos el número 4.05. De este modo,

$$f(40, 3.50) = 4.05.$$

Esto significa que, en promedio, si el ingreso de una familia es de US $40 000 al año y el precio de la carne de US $3.50 libra, la familia comprará 4.05 libras de carne por semana.

TABLA 11.1 *Cantidad de carne comprada (libras/familia/semana)*

Ingreso familiar por año, I ($1000)	Precio de la carne, p ($/ lb)			
	3.00	3.50	4.00	4.50
20	2.65	2.59	2.51	2.43
40	4.14	4.05	3.94	3.88
60	5.11	5.00	4.97	4.84
80	5.35	5.29	5.19	5.07
100	5.79	5.77	5.60	5.53

[1] Adaptado de *An Introduction to Positive Economics, 3a. ed.*, Richard G. Lipsey, Weidenfeld and Nicholson, Londres, 1971.

Observe que esto difiere de la tabla de valores de una función de una variable, en donde un renglón o una columna son suficientes para hacer una lista de los valores de la función. Aquí se necesitan muchos renglones y columnas, porque la función tiene un valor para cada par de valores de las variables independientes.

Ejemplos algebraicos: fórmulas

En los ejemplos del mapa meteorológico y en el de consumo de carne no existe una fórmula para la función subyacente. Éste suele ser el caso para funciones que representan datos de la vida real. Por otra parte, para muchos modelos idealizados de física, ingeniería o economía, existen fórmulas exactas.

Ejemplo 2 Dar una fórmula para la función $M = f(B, t)$, donde M es la cantidad de dinero de una cuenta bancaria t años después de una inversión inicial de B dólares, si el interés se acumula a razón de 5% al año compuesto
a) anualmente b) continuamente.

Solución a) Compuesto continuamente significa que M aumenta en un factor de 1.05 cada año, así que

$$M = f(B, t) = B(1.05)^t.$$

b) Compuesto continuamente significa que M crece de acuerdo con la función exponencial e^{kt}, con $k = 0.05$, y

$$M = f(B, t) = Be^{1.05t}.$$

Ejemplo 3 Un cilindro con extremos cerrados tiene un radio r y una altura h. Si su volumen es V y el área de su superficie es A, encontrar fórmulas para las funciones $V = f(r, h)$ y $A = g(r, h)$.

Solución Como el área de la base circular es πr^2, tenemos

$$V = f(r, h) = \text{área de la base} \cdot \text{altura} = \pi r^2 h.$$

El área del lado es igual a la circunferencia del fondo, $2\pi r$, por la altura h, con lo cual se obtiene $2\pi rh$. Por lo tanto,

$$A = g(r, h) = 2 \cdot \text{área de la base} + \text{área del lado} = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Estrategia para investigar funciones de dos variables: varíese una variable a la vez

Se puede aprender mucho de las funciones de dos o más variables si se deja variar una de las variables al tiempo que las otras se conservan fijas, con lo que se obtiene una función de una variable.

La ola

Supongamos que nos encontramos en un estadio y el público está haciendo "la ola". Ésta consiste en que el público se pone de pie y se sienta de manera tal que se forma una ola que se desplaza dando vuelta al estadio. Normalmente se observa sólo una ola en el estadio, pero puede formarse una secuencia continua de olas. ¿Qué clase de función describirá el movimiento del público? Para simplificar esto, consideramos sólo una fila de espectadores y la función que describe el movimiento de cada persona en la fila. Ésta es una función de dos variables; x (el número de asiento) y t (el tiempo en segundos). Para cada valor de x y t, escribimos $h(x, t)$ para la altura (en pies), sobre el nivel del piso, de la cabeza del espectador del asiento número x en el tiempo t segundos. Supongamos que nos indican que

$$h(x, t) = 5 + \cos(0.5x - t).$$

Ejemplo 4 a) Explicar el significado de $h(x, 5)$ en términos de la ola. Encontrar el periodo de $h(x, 5)$. ¿Qué representa el periodo?

b) Explicar el significado de $h(2, t)$ en términos de la ola. Encontrar el periodo de $h(2, t)$. ¿Qué representa este periodo?

Solución a) Fijar $t = 5$ significa que tomamos un momento determinado en el tiempo; hacer que x varíe significa que observamos toda la fila en ese instante. Por lo tanto, la función $h(x, 5) = 5 + \cos(0.5x - 5)$ dará las alturas a lo largo de la fila en el instante $t = 5$. En la figura 11.2 se muestra la gráfica de $h(x, 5)$, que es una instantánea de la fila en $t = 5$. Las alturas forman una onda de periodo 4π, o sea, más o menos 12.6 asientos. Este periodo nos indica que la longitud de la ola es de aproximadamente 13 asientos.

b) Fijar $x = 2$ significa que la atención la concentramos en el espectador del asiento número 2; hacer que t varíe significa que observamos el movimiento de ese espectador conforme transcurre el tiempo. Por lo tanto, la función $h(2, t)$ describe el movimiento del espectador del asiento 2 como función del tiempo. En la figura 11.3 se muestra la gráfica de $h(2, t) = 5 + \cos(1 - t)$. Observe que el valor de h varía entre 4 y 6 pies cuando el espectador se sienta y se pone de pie. El periodo es 2π, es decir, alrededor de 6.3 segundos. Este periodo representa el tiempo que tarda el espectador en ponerse de pie y sentarse una vez.

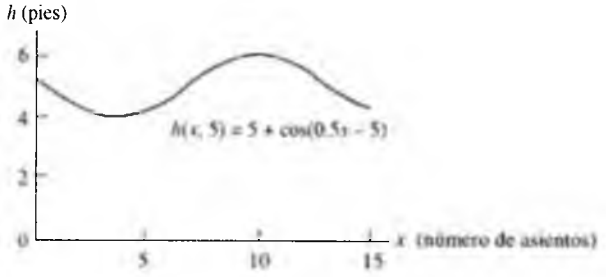


Figura 11.2 La función $h(x, 5)$ muestra la forma de la ola en el tiempo $t = 5$.

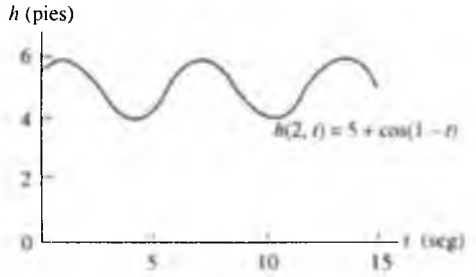


Figura 11.3 La función $h(2, t)$ muestra el movimiento del espectador del asiento 2.

En general, la función de una variable $h(a, t)$ indica el movimiento del espectador del asiento a. En la figura 11.3 se muestra el movimiento de la persona del asiento 2. Si escogemos a alguien de otro asiento se obtiene una función similar, excepto que la gráfica se puede desplazar a la derecha o a la izquierda.

Ejemplo 5 Demostrar que la gráfica de $h(7, t)$ tiene la misma forma que la gráfica de $h(2, t)$.

Solución El movimiento de la persona del asiento 7 está descrito por

$$h(7, t) = 5 + \cos(0.5(7) - t) = 5 + \cos(3.5 - t).$$

Como $h(2, t) = 5 + \cos(1 - t)$, se puede reescribir $h(7, t)$ como

$$h(7, t) = 5 + \cos(1 + 2.5 - t) = 5 + \cos(1 - (t - 2.5)) = h(2, t - 2.5).$$

Vemos que $h(7, t)$ es la misma función que $h(2, t)$, excepto que la t ha sido sustituida por $t - 2.5$. Por lo tanto, la gráfica de $h(7, t)$ es la de $h(2, t)$ desplazada 2.5 segundos a la derecha, es decir, 2.5 segundos más tarde. Lo anterior significa que el espectador del asiento 7 se pone de pie 2.5 segundos más tarde que la persona del asiento 2 (véase Fig. 11.4); a este retraso se debe que la ola viaje por el estadio. Si todos los espectadores se pusieran de pie y se sentaran al mismo tiempo, no habría ola.

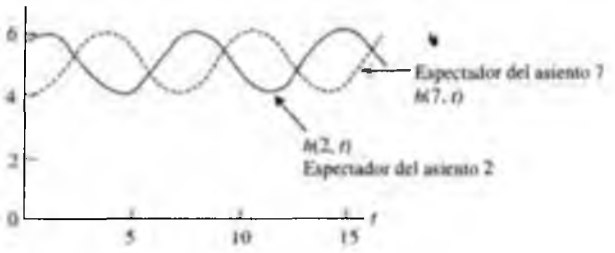


Figura 11.4 Comparación del movimiento de los espectadores de los asientos 2 y 7.

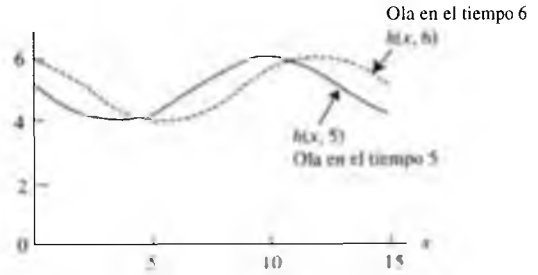


Figura 11.5 Forma de la ola en $t = 5$ y $t = 6$.

Ejemplo 6 Utilizar el resultado del ejemplo 5 para encontrar la rapidez de la ola.

Solución Como el espectador del asiento 7 hace lo mismo que el del asiento 2, pero 2.5 segundos después, la ola se ha movido cinco asientos en 2.5 segundos. En consecuencia, la rapidez es 5/2.5 = 2 asientos por segundo.

Ejemplo 7 Utilizar las funciones $h(x, 5)$ y $h(x, 6)$ a fin de demostrar que la rapidez de la ola es dos asientos por segundo.

Solución En la figura 11.5 se muestran gráficas de $h(x, 5) = 5 + \cos(0.5x - 5)$ y $h(x, 6) = 5 + \cos(0.5x - 6)$, esto es, instantáneas de la ola en $t = 5$ y $t = 6$. La forma de la ola en $t = 6$ es la misma que la de la ola en $t = 5$, sólo que desplazada a la derecha en casi dos asientos. Así, la ola se está desplazando a razón de alrededor de dos asientos por segundo. Para confirmar que la velocidad es exactamente dos asientos por segundo recurrimos al álgebra. Cuando $t = 5$, la ecuación de la ola es

$$h(x, 5) = 5 + \cos(0.5x - 5),$$

que tiene un pico donde

$$0.5x - 5 = 0,$$

o bien, en

$$x = 10,$$

es decir, en el décimo asiento. Un segundo más tarde, en $t = 6$, la ecuación de la ola es

$$h = 5 + \cos(0.5x - 6),$$

que tiene un pico donde

$$0.5x - 6 = 0,$$

o sea, en

$$x = 12,$$

esto es, en el doceavo asiento. Por lo tanto, la ola avanzó dos asientos en un segundo.

Proble

La información sobre el consumo de carne

Para una función dada por una tabla de valores, tal como la información del consumo de carne, se consigue que varíe una de las variables a la vez al ver un renglón o una columna. Por ejemplo, para fijar el ingreso en 40, vemos el renglón $I = 40$, que indica valores de la función $f(40, p)$. Como I es fija, ahora tenemos una función de una variable que muestra cuánta carne compran a distintos precios quienes ganan US $40 000 al año. En la tabla 11.2 se observa que $f(40, p)$ decrece conforme p se incrementa. Los otros renglones indican lo mismo: para cada ingreso, I, el consumo de carne disminuye a medida que el precio, p, aumenta.

TABLA 11.2 *Consumo de carne por familia que gana US $40 000*

p	3.00	3.50	4.00	4.50
$f(40, p)$	4.14	4.05	3.94	3.88

Mapa meteorológico

¿Qué pasa en el mapa meteorológico de la figura 11.1, cuando se permite que varíe sólo una de las variables a la vez? Supongamos que x representa millas al este-oeste de Topeka y y representa millas al norte-sur, y que nos desplazamos a lo largo de la línea este-oeste pasando por Topeka. Se mantiene y fija en 0 y se hace que x varíe. A lo largo de esta recta, la temperatura máxima T pasa de los 60 a lo largo de la costa oeste, a los 70 en Nevada y Utah, a los 80 en Topeka, a los 90 un poco antes de la costa este, luego regresa a los 80. En la figura 11.6 se muestra una posible gráfica. Otras gráficas son posibles porque no estamos seguros de cómo varía la temperatura entre contornos.

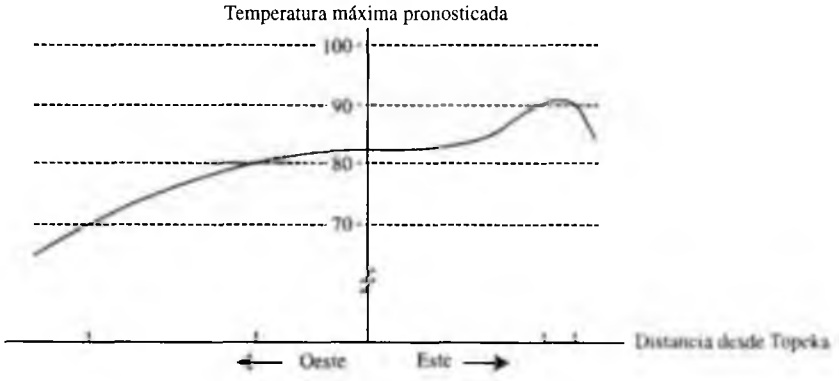


Figura 11.6 Temperatura máxima pronosticada en una línea oeste-este que pasa por Topeka.

Problemas para la sección 11.1

Los problemas 1, 2 y 3 se refieren al mapa meteorológico de la figura 11.1 de la página 2.

1. Indique el intervalo de temperaturas máximas diarias para
   a) Pensilvania b) Dakota del Norte c) California
2. Sobre una recta norte-sur que pase por Topeka, trace la gráfica de la temperatura máxima T pronosticada.
3. Sobre una recta norte-sur y una este-oeste que pase por Boise, trace las gráficas de la temperatura máxima pronosticada.

Para los problemas del 4 al 8, consulte la tabla 11.1 de la página 3, donde p es el precio de la carne e I el ingreso anual por familia.

4. Haga una tabla que muestre la cantidad de dinero, M, que en promedio la familia gasta en carne (en dólares por familia por semana) como función del precio de la carne y del ingreso familiar.
5. Formule tablas para consumo de carne como función de p, con I fija en $I = 20$ e $I = 100$. Formule tablas para consumo de carne como función de I, con p fija en $p = 3.00$ y $p = 4.00$. Comente sobre lo que observa en las tablas.

6. ¿Cómo varía el consumo de carne en función del ingreso familiar, si el precio de la carne se mantiene constante?
7. Elabore una tabla de la proporción, P, del ingreso familiar gastado en carne por semana, en función del precio de la carne y del ingreso. (Observe que P es la fracción del ingreso gastado en carne.)
8. Exprese P, la proporción del ingreso familiar gastado en carne por semana, en términos de la función original $f(I, p)$ que expresa el consumo como función de p e I.
9. Trace la gráfica de la función f de la cuenta bancaria del ejemplo 2(a) de la página 4, si se conserva B fija en tres valores diferentes y se hace que sólo t varíe. Luego trace la gráfica de f, dejando t fija en tres valores diferentes de modo que sólo B varíe. Explique lo que ve.
10. Una persona planea un largo viaje y su principal costo será la gasolina.
    a) Haga una tabla que muestre cómo varía el costo diario del combustible, en función del precio de la gasolina (en dólares por galón) y el número de galones que se compran cada día.
    b) Si su auto recorre 30 millas por galón de gasolina, haga una tabla que muestre cómo varía el costo diario del combustible en función de la distancia de recorrido diario y el precio de la gasolina.
11. Considere la aceleración debida a la gravedad, g, a una altura h sobre la superficie de un planeta de masa m.
    a) Si m se mantiene constante, ¿g es una función creciente o decreciente de h ? ¿Por qué?
    b) Si h se mantiene constante, ¿g es una función creciente o decreciente de m? ¿Por qué?
12. La *temperatura ajustada por el factor viento-frío* indica cuánto frío se siente como función de la combinación de viento y temperatura. En la tabla 11.3 se muestra la tempe-ratura ajustada por el viento-frío como función de la velocidad del viento y la temperatura.

TABLA 11.3 *Temperatura ajustada por el factor viento-frío (°F)*

Velocidad del viento (mph)	Temperatura (°F)							
	35	30	25	20	15	10	5	0
5	33	27	21	16	12	7	0	–5
10	22	16	10	3	–3	–9	–15	–22
15	16	9	2	–5	–11	–18	–25	–31
20	12	4	–3	–10	–17	–24	–31	–39
25	8	1	–7	–15	–22	–29	–36	–44

    a) Si la temperatura es 0°F y la velocidad del viento 15 mph, ¿cuánto frío se siente?
    b) Si la temperatura es 35°F, ¿qué velocidad del viento hace que se sienta como de 22°F?
    c) Si las temperatura es 25°F, ¿qué velocidad del viento hace que se sienta como de 20°F?
    d) Si el viento sopla a 15 mph, ¿qué temperatura se siente como de 0°F?
13. Utilice la tabla 11.3 y haga tablas de la temperatura ajustadas por el factor viento-frío en función de la velocidad del viento para temperaturas de 20°F y 0°F.
14. Utilice la tabla 11.3 y haga tablas de la temperatura ajustada por el factor viento-frío en función de la temperatura para velocidades del viento de 5 mph y 20 mph.
15. Suponga que la función para "la ola" del estadio de la página 4 está dada por $h(x, t) = 5 + \cos(x - 2t)$. ¿Cómo se compara esta ola con la ola original? ¿Cuál es la velocidad de esta ola (en asientos por segundo)?

16. Suponga que "la ola" del estadio (página 4) se desplaza en dirección opuesta, de derecha a izquierda en lugar de izquierda a derecha. Dé una posible fórmula para h.

Los problemas del 17 al 20 se refieren a una cuerda de guitarra que vibra. Suponga que se pulsa una cuerda de guitarra y se observa su vibración. En la figura 11.7 se ilustran instantáneas de la cuerda de la guitarra con diferencia de milisegundos.

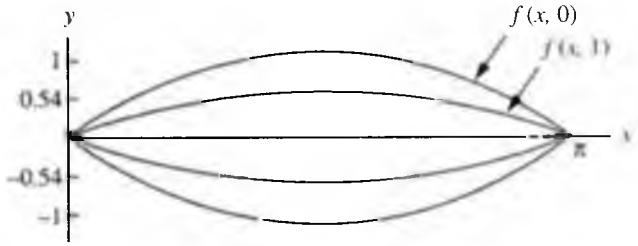


Figura 11.7 Vibración de una cuerda de guitarra: $f(x, t) = \cos t \operatorname{sen} x$, para cuatro valores de t.

Considere que la cuerda de guitarra se tensa a lo largo del eje x entre $x = 0$ y $x = \pi$. Cada punto de la cuerda tiene un valor x, $0 \le x \le \pi$. Mientras la cuerda vibra, cada punto de la cuerda se mueve a un lado y otro del eje x. Sea $y = f(x, t)$ el desplazamiento en el tiempo t del punto de la cuerda ubicado x unidades desde la izquierda. Por lo tanto, una posible fórmula para $y = f(x, t)$ es

$$y = f(x, t) = \cos t \operatorname{sen} x, \qquad 0 \le x \le \pi, \ t \text{ en milisegundos.}$$

17. a) Trace gráficas de y *versus* x para valores de t fijos, $t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$.
    b) Utilice sus gráficas para explicar por qué esta función podría representar la vibración de una cuerda de guitarra.
18. Explique qué representan las funciones $f(x, 0)$ y $f(x, 1)$ en términos de la cuerda en vibración.
19. Explique qué representan las funciones $f(0, t)$ y $f(1, t)$ en términos de la cuerda en vibración.
20. Describa el movimiento de las cuerdas de guitarra cuyos desplazamientos están dados por las siguientes fórmulas:
    a) $y = g(x, t) = \cos 2t \operatorname{sen} x$ b) $y = h(x, t) = \cos t \operatorname{sen} 2x$

11.2 UN VIAJE AL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

Coordenadas cartesianas en el espacio

Imaginemos que tres ejes coordenados se cruzan en el *origen*: un eje vertical y dos ejes horizontales a ángulos rectos entre sí (véase Fig. 11.8). Consideremos que el plano xy es horizontal, en tanto que el eje z se extiende verticalmente arriba y abajo del plano. Las letras x, y y z indican qué parte de cada eje es positivo; el otro lado es negativo. Por lo general se usan *ejes positivamente orientados*, en los que al ver hacia abajo del eje z positivo se tiene la vista usual del plano xy. Especificamos un punto en el espacio mediante sus coordenadas (x, y, z) con respecto a estos ejes. Consideremos las coordenadas como instrucciones para llegar al punto: se comienza en el origen, se avanza x unidades a lo largo del eje x, luego y unidades en dirección paralela al eje y y, finalmente, z unidades en dirección paralela al eje z. Las coordenadas pueden ser positivas, cero o negativas; una coordenada cero significa "no avanzar en

esa dirección", y una coordenada negativa significa "avanzar en dirección negativa paralela a este eje". Por ejemplo, el origen tiene coordenadas (0, 0, 0), puesto que se llega ahí desde el origen sin hacer algo en absoluto.

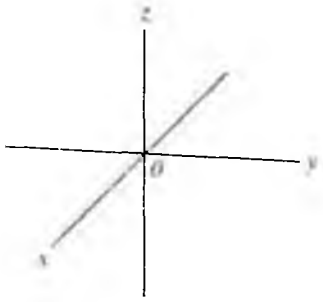


Figura 11.8 Ejes coordenados en el espacio tridimensional.

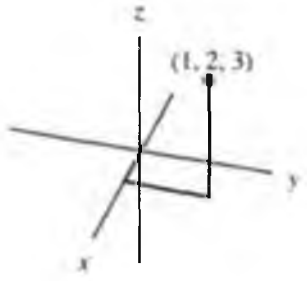


Figura 11.9 El punto (1, 2, 3) en el espacio tridimensional.

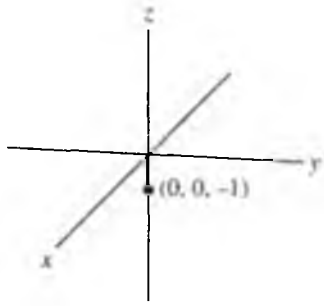


Figura 11.10 El punto (0, 0, –1) en el espacio tridimensional.

Ejemplo 1 Describir la posición de los puntos con coordenadas (1, 2, 3) y (0, 0, –1).

Solución Se llega al punto (1, 2, 3) comenzando en el origen, se avanza una unidad a lo largo del eje x, dos unidades en dirección paralela al eje y y tres unidades hacia arriba en dirección paralela al eje z (véase Fig. 11.9).

Para llegar a (0, 0, –1) no avanzamos en las direcciones x y y (véase Fig. 11.10). Solamente nos movemos 1 unidad sobre el eje z, en la dirección negativa. Se puede comprobar que la posición del punto es independiente del orden de los desplazamientos en x, y y z.

Ejemplo 2 Se comienza en el origen, se avanza a lo largo del eje y una distancia de dos unidades en dirección positiva, y luego se avanza verticalmente hacia arriba una distancia de una unidad. ¿Cuáles son las coordenadas de la posición final?

Solución Se comienza en el punto (0, 0, 0). Cuando se avanza a lo largo del eje y, la coordenada y aumenta a 2. Al avanzar verticalmente aumenta la coordenada z a 1; la coordenada x no cambió porque no nos desplazamos en la dirección x. Por lo tanto, las coordenadas finales son (0, 2, 1). (Véase Fig. 11.11).

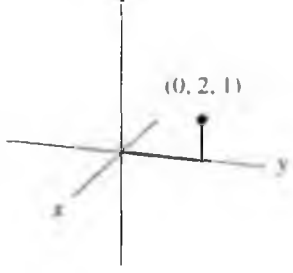


Figura 11.11 Se llega al punto (0, 2, 1) al avanzar 2 a lo largo del eje y y 1 hacia arriba.

Con frecuencia es útil visualizar un sistema coordenado de tres dimensiones en términos de un salón. El origen está en una esquina al nivel del piso donde se encuentran dos paredes con el piso. El eje z es la intersección vertical de las dos paredes; los ejes x y y son las intersecciones de cada pared con el piso. Los puntos con coordenadas negativas se encuentran detrás de una pared en la pieza siguiente o debajo del piso.

Gráficas de ecuaciones en el espacio tridimensional

En el espacio tridimensional se pueden graficar ecuaciones en las que intervienen las variables x, y y z.

Ejemplo 3 ¿Qué aspecto tienen las gráficas de las ecuaciones $z = 0$, $z = 3$ y $z = -1$?

Solución Graficar una ecuación quiere decir dibujar el conjunto de todos los puntos del espacio cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Por lo tanto, para graficar $z = 0$ necesitamos visualizar el conjunto de puntos cuya coordenada z es cero. Si la coordenada z es 0, entonces debemos estar al mismo nivel vertical que el origen, es decir, en el plano horizontal que contiene al origen. En consecuencia, la gráfica de $z = 0$ es el plano de en medio de la figura 11.12. La gráfica de $z = 3$ es un plano paralelo a la gráfica de $z = 0$, pero tres unidades arriba de ella. La gráfica de $z = -1$ es un plano paralelo a la gráfica de $z = 0$, pero una unidad debajo.

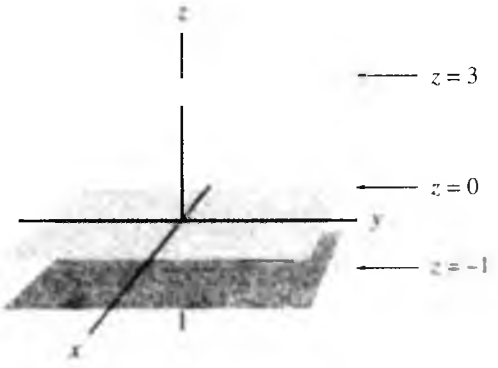


Figura 11.12 Los planos $z = -1$, $z = 0$ y $z = 3$.

El plano $z = 0$ contiene los ejes coordenados x y y, y por ello se llama plano coordenado xy, o simplemente plano xy. Hay otros dos planos coordenados: El plano yz contiene los ejes y y z, y el plano xz los ejes x y z (véase Fig. 11.13).

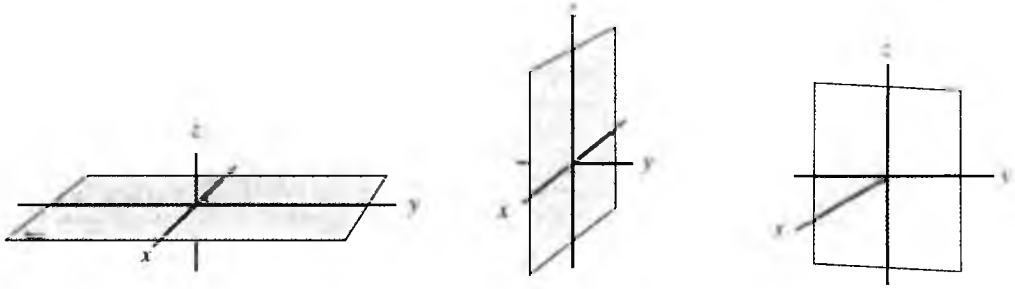


Figura 11.13 Los tres planos coordenados.

Ejemplo 4 ¿Cuál de los puntos $A = (1, -1, 0)$, $B = (0, 3, 4)$, $C = (2, 2, 1)$ y $D = (0, -4, 0)$ está más cerca del plano xz? ¿Cuál sobre eje y?

Solución La magnitud de la coordenada y indica la distancia al plano xz. El punto A se encuentra más cerca de este plano, porque tiene la coordenada y más pequeña en magnitud. Para llegar a un punto del eje y, avanzamos a lo largo del eje y, pero no avanzamos en absoluto en las direcciones x o z. Por lo tanto, un punto del eje y tiene sus coordenadas x y z iguales a cero. El único punto de los cuatro que satisface esto es D (véase Fig. 11.14).

En general, si un punto tiene una de sus coordenadas igual a cero, se encuentra en uno de los planos coordenados. Si un punto tiene dos de sus coordenadas iguales a cero, está sobre uno de los ejes coordenados.

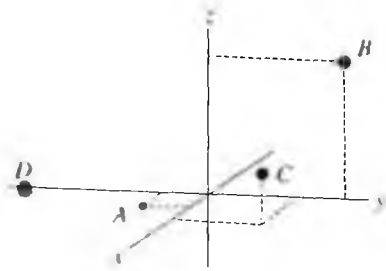


Figura 11.14 ¿Cuál punto está más cerca del plano xz? ¿Cuál está en el eje y?

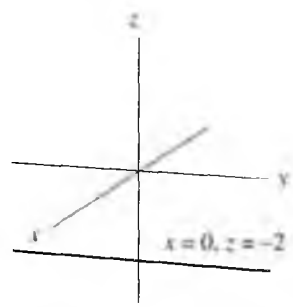


Figura 11.15 La recta $x = 0$, $z = -2$.

Ejemplo 5 Nos encontramos dos unidades abajo del plano xy y en el plano yz. ¿Cuáles son nuestras coordenadas?

Solución Puesto que estamos dos unidades abajo del plano xy, la coordenada z es -2. Como estamos en el plano yz, nuestra coordenada x es 0; la coordenada y puede ser cualquier cosa. Por lo tanto, nos encontramos en el punto $(0, y, -2)$. El conjunto de todos estos puntos forma una recta paralela al eje y, dos unidades abajo del plano xy, y en el plano yz (véase Fig. 11.15).

Ejemplo 6 Una persona se encuentra de pie en el punto (4, 5, 2) y ve hacia el punto (0.5, 0, 3). ¿Ve hacia arriba o hacia abajo?

Solución En el punto en que la persona se encuentra de pie tiene una coordenada z de 2, en tanto que el punto al que mira tiene coordenada z de 3; en consecuencia, mira hacia arriba.

Ejemplo 7 Imagínese que el plano yz de la figura 11.15 es una página de este libro. Describir la región detrás de la página.

Solución La parte positiva del eje x sobresale de la página; avanzar en la dirección x positiva lo lleva al frente de la página. La región detrás de la página corresponde a valores negativos de x, y así es el conjunto de todos los puntos del espacio tridimensional que satisface la desigualdad $x < 0$.

Distancia

En el espacio bidimensional, la fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos (x, y) y (a, b) está dada por

$$\text{Distancia} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

La distancia entre dos puntos (x, y, z) y (a, b, c) en el espacio tridimensional se representa por PG en la figura 11.16. El lado PE es paralelo al eje x, EF al eje y, y FG al eje z.

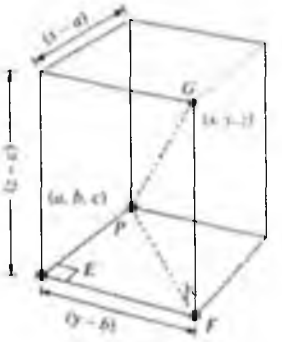


Figura 11.16 La diagonal PG da la distancia entre los puntos (x, y, z) y (a, b, c).

Si se usa dos veces el teorema de Pitágoras, se obtiene

$$(PG)^2 = (PF)^2 + (FG)^2 = (PE)^2 + (EF)^2 + (FG)^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Por lo tanto, una fórmula para encontrar la distancia entre los puntos (x, y, z) y (a, b, c) en el espacio es

$$\boxed{\text{Distancia} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.}$$

Ejemplo 8 Encontrar la distancia entre (1, 2, 1) y (–3, 1, 2).

Solución La fórmula dará

$$\text{Distancia} = \sqrt{(-3-1)^2 + (1-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{18} = 4.24$$

Ejemplo 9 Encontrar una expresión para determinar la distancia desde el origen al punto (x, y, z).

Solución El origen tiene coordenadas (0, 0, 0), por lo cual la distancia desde el origen a (x, y, z) está dada por

$$\text{Distancia} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ejemplo 10 Encontrar la ecuación para una esfera de radio 1 cuyo centro está en el origen.

Solución La esfera está formada por todos los puntos (x, y, z) cuya distancia desde el origen es 1, es decir, que satisfacen la ecuación

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$$

Ésta es una ecuación para la esfera. Si ambos lados se elevan al cuadrado se obtiene la ecuación en la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Observe que esta ecuación representa la *superficie* de la esfera. El espacio sólido encerrado por la esfera se representa por la desigualdad $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Problemas para la sección 11.2

1. De los puntos $A = (1.3, -2.7, 0)$, $B = (0.9, 0, 3.2)$ y $C = (2.5, 0.1, -0.3)$, ¿cuál está más cerca del plano yz?, ¿cuál en el plano xz? y ¿cuál más lejos del plano xy?
2. De los puntos $A = (23, 92, 48)$, $B = (-60, 0, 0)$ y $C = (60, 1, -92)$, ¿cuál está más cerca del plano yz?, ¿cuál en el plano xz? y ¿cuál más lejos del plano xy?
3. Una persona está en el punto $(-1, -3, -3)$, de pie y de frente al plano yz; camina dos unidades hacia adelante, da vuelta hacia la izquierda y camina otras dos unidades. ¿Cuál es su posición final? Desde el punto de vista de un observador que mira al sistema coordenado de la figura 11.8 de la página 9, ¿la persona está enfrente o atrás del plano yz? ¿Se encuentra a la izquierda o a la derecha del plano xz? ¿Está arriba o abajo del plano xy?
4. Una persona está en el punto $(3, 1, 1)$ de frente al plano yz y se encuentra de pie; camina dos unidades hacia adelante, da vuelta a la izquierda y camina otras dos unidades. ¿Cuál es su posición final? Desde el punto de vista de un observador que mira al sistema coordenado de la figura 11.8 de la página 9, ¿dicha persona está enfrente o atrás del plano yz? ¿Se encuentra a la izquierda o a la derecha del plano xz? ¿Está arriba o abajo del plano xy?

Trace las gráficas de las ecuaciones de los problemas 5, 6 y 7 en el espacio.

5. $x = -3$
6. $y = 1$
7. $z = 2$ y $y = 4$

8. Encuentre una fórmula para hallar la distancia más corta entre un punto (a, b, c) y el eje y.
9. Describa el conjunto de puntos cuya distancia desde el eje x es 2.
10. Describa el conjunto de puntos cuya distancia desde el eje x es igual a la distancia desde el plano yz.
11. De los puntos $P = (1, 2, 1)$ y $Q = (2, 0, 0)$, ¿cuál está más cerca del origen?
12. De los puntos $P_1 = (1, 2, 3)$, $P_2 = (3, 2, 1)$ y $P_3 = (1, 1, 0)$, ¿cuáles son los dos que están más cerca entre sí?
13. Un cubo está ubicado de tal manera que sus cuatro vértices superiores tienen las coordenadas $(-1, -2, 2)$, $(-1, 3, 2)$, $(4, -2, 2)$ y $(4, 3, 2)$. Obtenga las coordenadas del centro del cubo.
14. Un sólido rectangular se encuentra con su longitud paralela al eje y, y sus caras superior e inferior paralelas al plano $z = 0$. Si el centro del objeto está en $(1, 1, -2)$ y tiene una longitud de 13, una altura de 5 y un ancho de 6, obtenga las coordenadas de los ocho vértices y dibuje la figura; marque los ocho vértices.
15. De los puntos $P_1 = (-3, 2, 15)$, $P_2 = (0, -10, 0)$, $P_3 = (-6, 5, 3)$ y $P_4 = (-4, 2, 7)$, ¿cuál está más cerca de $P = (6, 0, 4)$?
16. En un conjunto de ejes x, y y z orientados como en la figura 11.8 de la página 9, dibuje una recta que pase por el origen, que se encuentre en el plano xz y tal que si usted avanza a lo largo de la recta de modo que crezca su coordenada x, su coordenada z decrezca.
17. En un conjunto de ejes x, y y z orientados como se indica en la figura 11.8 de la página 9, dibuje una recta que pase por el origen, que se encuentre en el plano yz y tal que si usted avanza a lo largo de la recta de modo que su coordenada y crezca, su coordenada z decrezca.

11.3

¿Cóm

Gráfic

18. Encuentre la ecuación de la esfera de radio 5 centrada en el origen.
19. Encuentre la ecuación de la esfera de radio 5 centrada en (1, 2, 3).
20. Dada la esfera

$$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=4,$$

a) Encuentre las ecuaciones de los círculos (si los hay) donde la esfera corte cada uno de los planos coordenados.
b) Encuentre los puntos (si los hay) donde la esfera corta a cada uno de los ejes coordenados.

11.3 GRÁFICAS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

¿Cómo se visualiza una función de dos variables?

El mapa meteorológico de la página 2 es una manera de visualizar una función de dos variables. En esta sección se indica cómo visualizar una función de dos variables de otra manera, mediante una superficie en el espacio tridimensional.

Gráfica de una función y cómo trazarla

Para una función de una variable, $y = f(x)$, la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el espacio bidimensional, tales que $y = f(x)$. En general, estos puntos se encuentran en una curva en el plano. Cuando una graficadora o computadora grafica f, aproxima la gráfica trazando puntos en el plano xy y luego uniendo puntos consecutivos mediante segmentos de recta. Cuantos más puntos haya, mejor será la aproximación.

Ahora considere una función de dos variables.

> La **gráfica** de una función de dos variables, f es el conjunto de todos los puntos (x, y, z), tales que $z = f(x, y)$. En general, la gráfica de una función de dos variables es una superficie en el espacio tridimensional.

Trazado de la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$

Para trazar la gráfica de f unimos puntos como se hace para una función de una variable. Primero se hace una tabla de valores de f, tal como la tabla 11.4.

TABLA 11.4 *Tabla de valores de* $f(x, y) = x^2 + y^2$

	−3	−2	−1	0	1	2	3
−3	18	13	10	9	10	13	18
−2	13	8	5	4	5	8	13
−1	10	5	2	1	2	5	10
0	9	4	1	0	1	4	9
1	10	5	2	1	2	5	10
2	13	8	5	4	5	8	13
3	18	13	10	9	10	13	18

Ahora trazamos los puntos. Por ejemplo, trazamos (1, 2, 5) porque $f(1, 2) = 5$ y trazamos (0, 2, 4) porque $f(0, 2) = 4$. Luego unimos los puntos correspondientes a los renglones y columnas de la tabla. El resultado se llama *imagen de malla de alambre* de la gráfica. Si se hace un relleno entre los alambres se obtiene una superficie. Así es como una computadora dibuja las gráficas de la figura 11.17 y 11.18. Cuantos más puntos se grafique, la imagen tendrá más semejanza con la superficie de la figura 11.19.

Compruebe que las figuras tienen sentido. Observe que la gráfica pasa por el origen porque $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ satisface $z = x^2 + y^2$, también que si x se mantiene fija y se deja variar y, la gráfica desciende y luego regresa, al igual que las cantidades de los renglones de la tabla 11.4. Del mismo modo, si y se mantiene fija y se deja variar x, la gráfica desciende y luego regresa, al igual que las columnas de la tabla 11.4.



Figura 11.17 Imagen de malla de alambre de $f(x, y) = x^2 + y^2$ para $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 3$.



Figura 11.18 Imagen de malla de alambre de $g(x, y) = 3 + x^2 + y^2$ con más puntos localizados.



Figura 11.19 Gráfica de $k(x, y) = x^2 + y^2$ para $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 3$.

Gráficas nuevas a partir de otras antiguas

Se puede usar la gráfica de una función para visualizar las gráficas de funciones relacionadas con ella.

Ejemplo 1 Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$. Describir oralmente las gráficas de las siguientes funciones:

a) $g(x, y) = x^2 + y^2 + 3$, b) $h(x, y) = 5 - x^2 - y^2$, c) $k(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$.

Solución Sabemos, por la figura 11.19, que la gráfica de f es un tazón con su vértice en el origen. A apartir de esto, podemos calcular la figura que tendrán las gráficas g, h y k.

a) La función $g(x, y) = x^2 + y^2 + 3 = f(x, y) + 3$, de modo que la gráfica de g es la gráfica de f, pero elevada en tres unidades. Véase figura 11.20.
b) Como $-x^2 - y^2$ es el negativo de $x^2 + y^2$, la gráfica de $-x^2 - y^2$ es un tazón invertido. Por lo tanto, la gráfica de $h(x, y) = 5 - x^2 - y^2 = 5 - f(x, y)$ parece un tazón invertido con vértice en (0, 0, 5), como en la figura 11.21.
c) La gráfica de $k(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 = f(x, y - 1)$ es un tazón con vértice en $x = 0$, $y = 1$ porque es ahí donde $k(x, y) = 0$, como en la figura 11.22.

Ejemplo 2

Solución

Seccio

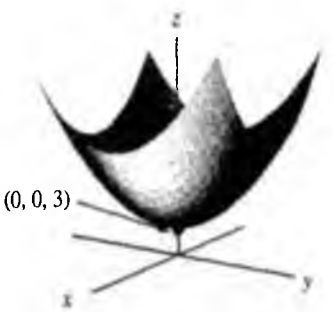


Figura 11.20 Gráfica de $g(x, y) = x^2 + y^2 + 3$.



Figura 11.21 Gráfica de $h(x, y) = 5 - x^2 - y^2$.

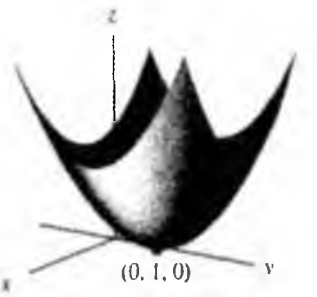


Figura 11.22 Gráfica de $k(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$.

Ejemplo 2 Describir la gráfica de $G(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$. ¿Qué simetría tiene?

Solución Como la función exponencial es siempre positiva, la gráfica se encuentra totalmente por encima del plano xy. De la gráfica de $x^2 + y^2$ vemos que $x^2 + y^2$ es cero en el origen y aumenta conforme nos alejamos del origen en cualquier dirección. De esta manera, $e^{-(x^2+y^2)}$ es 1 en el origen, y se hace más pequeña a medida que nos alejamos del origen en cualquier dirección. No puede pasar abajo del plano xy; en lugar de ello se aplana y se acerca cada vez más al plano. Se dice que la superficie es *asintótica* al plano xy (véase Fig. 11.23).

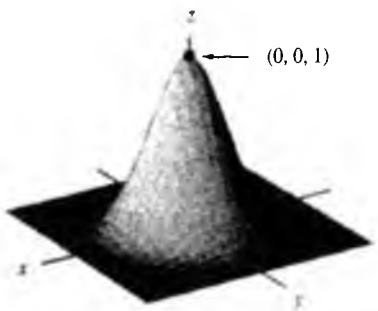


Figura 11.23 Gráfica de $G(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

Ahora considere un punto (x, y) en el círculo $x^2 + y^2 = r^2$. Como

$$G(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

el valor de la función G es el mismo en todos los puntos de este círculo. Por lo tanto, se dice que la gráfica de G tiene *simetría circular*.

Secciones transversales y la gráfica de una función

Ya se vio que una manera adecuada de analizar una función de dos variables es hacer que una cualquiera de ellas varíe, mientras que la otra se conserva fija.

Para una función $f(x, y)$, la función que se obtiene al mantener x fija y hacer variar y se llama **sección transversal** de f con x fija. La gráfica del corte de $f(x, y)$ con $x = c$ es la curva, o sección transversal, que se obtiene al cortar la gráfica de f con el plano $x = c$. Análogamente se define una sección trasversal de f con y fija.

Por ejemplo, la sección transversal de $f(x, y) = x^2 + y^2$ con $x = 2$ es $f(2, y) = 4 + y^2$. La gráfica de esta sección trasversal es la curva que se obtiene al cortar la gráfica de f con el plano perpendicular al eje x en $x = 2$ (véase Fig. 11.24).

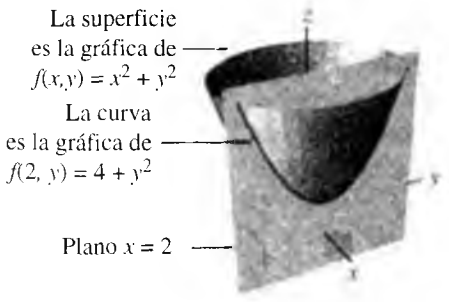


Figura 11.24 Sección transversal de la superficie $z = f(x, y)$ por el plano $x = 2$.

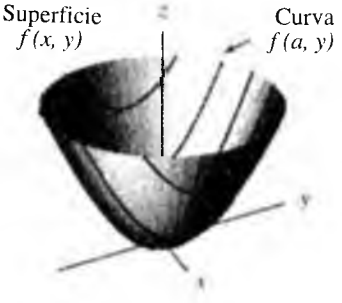


Figura 11.25 Las curvas $z = f(a, y)$ con a constante: secciones transversales con x fija.

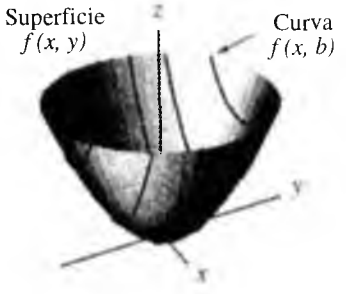


Figura 11.26 Las curvas $z = f(x, b)$ con b constante: secciones transversales con y fija.

En la figura 11.25 se muestran las gráficas de otras secciones transversales de f con x fija; en la figura 11.26 se muestran las gráficas de las secciones transversales con y fija.

Ejemplo 3 Describir las secciones transversales de la función $g(x, y) = x^2 - y^2$ con y fija y luego con x fija. Utiliza estas secciones transversales para describir la forma de la gráfica de g.

Solución Las secciones transversales con y fija en $y = b$ están dadas por

$$z = g(x, b) = x^2 - b^2$$

Así, cada corte con y fija da una parábola que abre hacia arriba, con un mínimo en $z = -b^2$. Las secciones transversales con x fija son de la forma

$$z = g(a, y) = a^2 - y^2$$

que son parábolas que abren hacia abajo con un máximo en $z = a^2$ (véanse Figs 11.27 y 11.28). La gráfica de g se muestra en la figura 11.29. Observe las parábolas que abren hacia arriba en la dirección x y las que abren hacia abajo en la dirección y. Se dice que la superficie tiene forma de *silla de montar*.

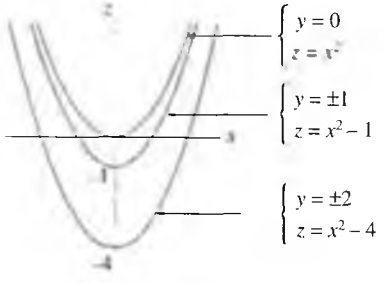


Figura 11.27 Secciones transversales de $g(x, y) = x^2 - y^2$ con y fija.

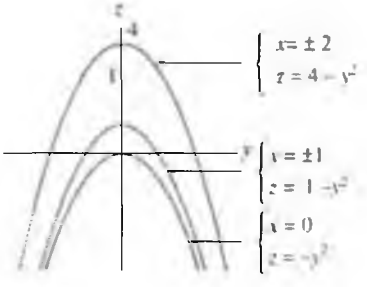


Figura 11.28 Secciones transversales de $g(x, y) = x^2 - y^2$ con x fija.

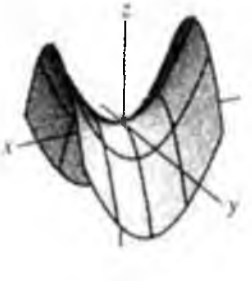


Figura 11.29 Gráfica de $g(x, y) = x^2 - y^2$ mostrando secciones transversales.

Funciones lineales

En cálculo de una variable son muy importantes las funciones lineales y también lo son en cálculo de varias variables. Quizá usted adivine la forma de la gráfica de una función lineal de dos variables (es un plano). Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4 Describir la gráfica de $f(x, y) = 1 + x - y$.

Solución El plano $x = a$ es vertical y paralelo al eje yz. Por lo tanto, la sección transversal con $x = a$ es la recta $z = 1 + a - y$ con pendiente hacia abajo en la dirección y. De la misma manera, el plano $y = b$ es paralelo al plano xz. Por lo tanto, la sección transversal con $y = b$ es la recta $z = 1 + x - b$ con pendiente hacia arriba en la dirección x. Como todas las secciones transversales son rectas, cabe esperar que la gráfica sea un plano, con pendiente hacia abajo en la dirección y y hacia arriba en la dirección x. Éste es justamente el caso (véase Fig. 11.30).

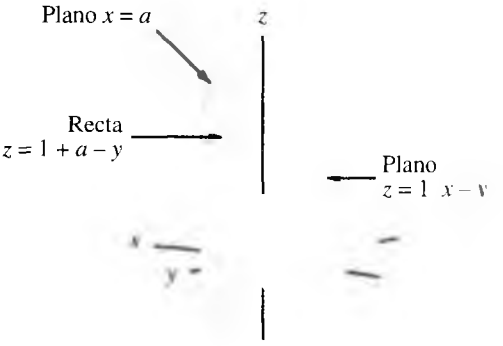


Figura 11.30 Gráfica de plano $z = 1 + x - y$ mostrando secciones transversales con $x = a$.

Cuando falta una variable: cilindros

Supongamos que se grafica una ecuación como $z = x^2$ a la que falta una variable. ¿Qué aspecto tiene la superficie? Como falta y de la ecuación, las secciones transversales con y fija son todas la misma parábola, $z = x^2$. Si se hace que y varíe hacia arriba y abajo del eje y, el barrido de esta parábola forma la superficie que se muestra en la figura 11.31. Las secciones transversales con x fija son rectas horizontales, obtenidas al cortar la superficie por un plano perpendicular al eje x.

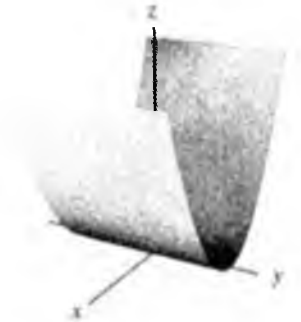


Figura 11.31 Cilindro parabólico $z = x^2$.



Figura 11.32 Cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$.

Esta superficie se denomina *cilindro parabólico*, porque está formada a partir de una parábola en la misma manera que un cilindro común y corriente se forma partiendo de un círculo; tiene una sección transversal parabólica en lugar de circular.

Ejemplo 5 Graficar la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ en el espacio.

Solución Aun cuando la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ no es una función, la superficie que la representa puede graficarse por el método utilizado para $z = x^2$. La gráfica de $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy es un círculo. Como z no aparece en la ecuación, la intersección de la superficie con cualquier plano será el mismo círculo $x^2 + y^2 = 1$. Por lo tanto, la superficie es el cilindro que aparece en la figura 11.32.

Problemas para la sección 11.3

1. La superficie de la figura 11.33 es la gráfica de la función $z = f(x, y)$ para x y y positivas.
   a) Suponga que y es fija y positiva. ¿Aumenta o disminuye z conforme x aumenta? Trace una gráfica de z contra x.
   b) Suponga que x es fija y positiva. ¿Aumenta o disminuye z conforme y aumenta? Trace una gráfica de z contra y.



Figura 11.33

2. Relacione las siguientes descripciones del éxito de una compañía con las gráficas de la figura 11.34.
   a) Simple y llanamente nuestro éxito se mide en dólares. Trabajar más duro no hace daño, pero tampoco sirve de mucho.
   b) No importa cuánto dinero se invirtió en la compañía, o qué tanto se trabajó, no se logró sacarla adelante.
   c) Aun cuando no siempre se obtiene un éxito total, parece que la cantidad de dinero invertido no importa. Mientras se trabaje fuerte en la compañía el éxito aumentará.
   d) El éxito de la compañía está basado tanto en el trabajo intenso como en la inversión.

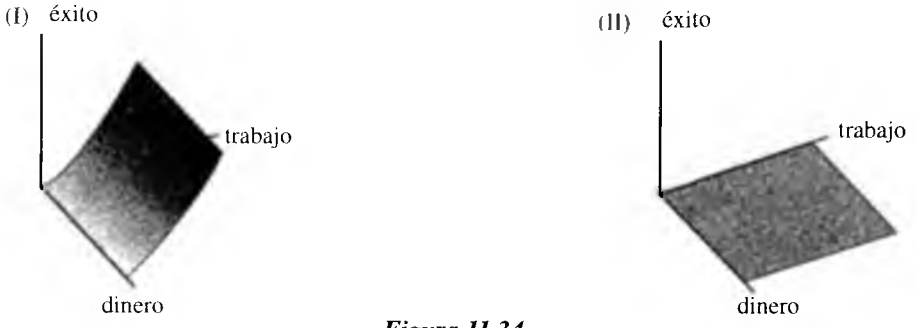


Figura 11.34

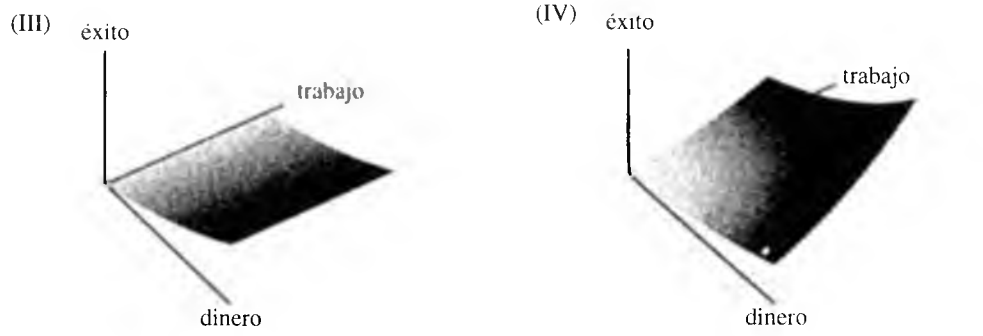


Figura 11.34 (Cont.).

3. Para cada una de las siguientes funciones, decida si podría ser un tazón, una placa o ninguno de los dos. Considere que una placa es cualquier superficie más bien plana y un tazón es cualquier recipiente que pueda contener agua, si se supone el eje z positivo hacia arriba.
   a) $z = x^2 + y^2$ b) $z = 1 - x^2 - y^2$ c) $x + y + z = 1$
   d) $z = -\sqrt{5 - x^2 - y^2}$ e) $z = 3$
4. Para cada función del problema 3, trace secciones transversales:
   i) Con x fija en $x = 0$ y $x = 1$.
   ii) Con y fija en $y = 0$ y $y = 1$.
5. Relacione las siguientes funciones con sus gráficas en la figura 11.35.

   a) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ b) $z = -e^{-x^2-y^2}$ c) $z = x + 2y + 3$

   d) $z = -y^2$ e) $z = x^3 - \operatorname{sen} y$.

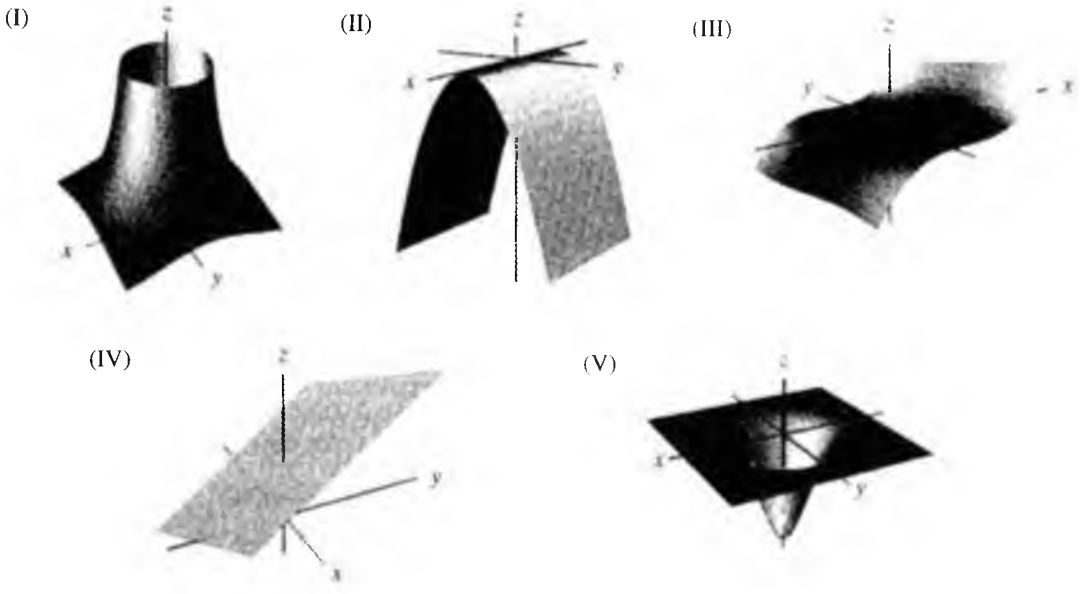


Figura 11.35

6. A usted le gusta la pizza y el refresco de cola. ¿Cuál de las gráficas de la figura 11.36 representa su satisfacción como función de cuántas pizzas y cuánto refresco de cola toma si
   a) nunca habrá demasiadas pizzas ni demasiado refresco de cola?
   b) puede haber demasiadas pizzas o demasiado refresco de cola?
   c) podrá haber demasiado refresco de cola, pero no demasiadas pizzas?

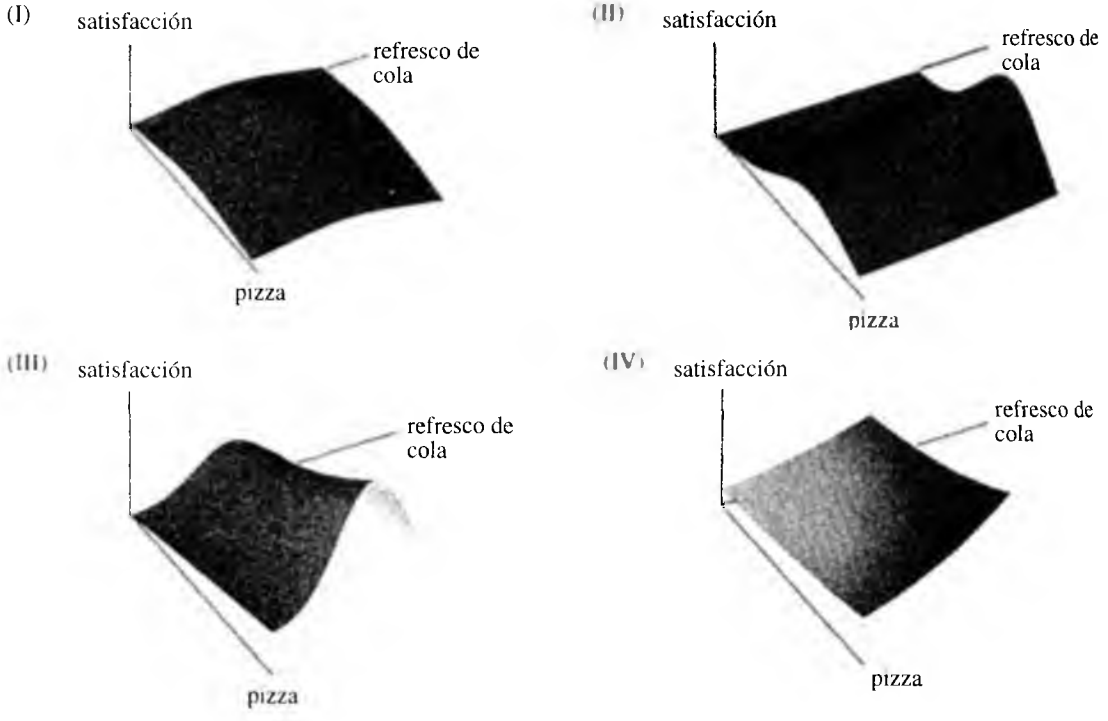


Figura 11.36

7. Para cada una de las gráficas del problema 6, dibuje:
   a) Dos secciones transversales con pizza fija.
   b) Dos secciones transversales con refresco de cola fijo.
8. La figura 11.37 contiene gráficas de las parábolas $z = f(x, b)$ para $b = -2, -1, 0, 1, 2$. ¿Cuál de las gráficas de $z = f(x, y)$ de la figura 11.38 se ajusta mejor a esta información?

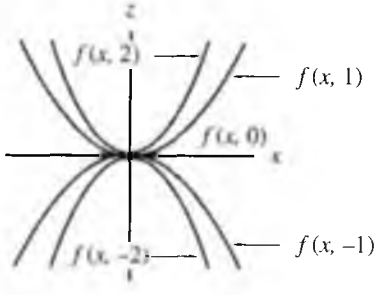
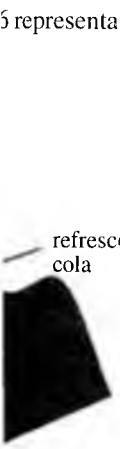


Figura 11.37





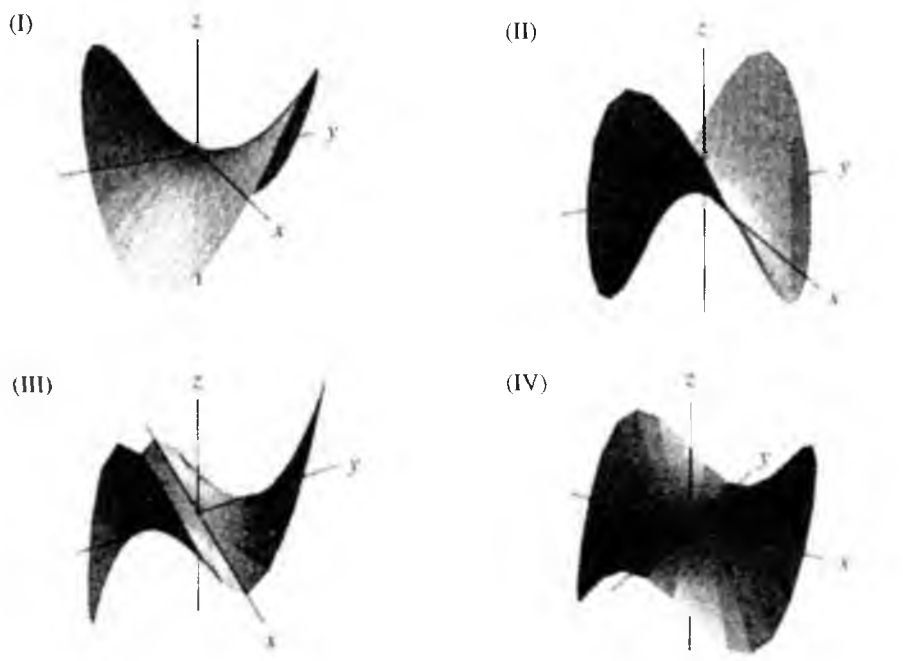


Figura 11.38

9. Imagine una ola solitaria que avanza por un canal. Suponga que x es la distancia a lo largo del canal desde su mitad, t es el tiempo y z es la altura del agua por encima del nivel de equilibrio. La gráfica de z como función de x y t se muestra en la figura 11.39.
   a) Dibuje el perfil de la ola para $t = -1, 0, 1, 2$. (Ilustre el eje x a la derecha y el eje z verticalmente.)
   b) ¿Avanza la ola en la dirección de x creciente o decreciente?
   c) Trace una superficie que represente una ola que avanza en la dirección contraria.

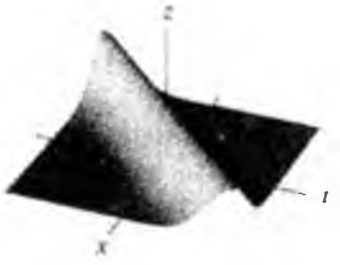


Figura 11.39

10. Describa verbalmente las secciones transversales con t fija y las secciones transversales con x fija de la función de la cuerda de guitarra en vibración

$$f(x, t) = \cos t \operatorname{sen} x, \quad 0 \le t \le 2 \le \pi$$

de la página 8. Explique la relación de estas secciones transversales con la gráfica de f.

11. Dibuje con computadora o calculadora la gráfica de la función de la cuerda de guitarra en vibración siguiente:

$$g(x, t) = \cos t \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Relacione la forma de la gráfica con las secciones transversales con t fija y aquellas con x fija.

12. Dibuje con computadora o calculadora una gráfica de la función de la ola que avanza:

$$h(x, t) = 3 + \cos(x - 0.5t), \quad 0 \le x \le 2\pi, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Relacione la forma de la gráfica con las secciones transversales con t fija y aquéllas con x fija.

13. Considere la función f dada por $f(x, y) = y^3 + xy$. Dibuje gráficas de secciones transversales con:
    a) x fija en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.
    b) y fija en $y = -1$, $y = 0$ y $y = 1$.

14. Un péndulo oscilante consta de una masa atada al extremo de una cuerda. En determinado instante, la cuerda forma un ángulo x con la vertical y la masa tiene velocidad y. En ese instante, la energía del péndulo, E, está dada por la expresión[2]

$$E = 1 - \cos x + \frac{y^2}{2}.$$

    a) Considere la superficie que representa la energía. Dibuje una sección transversal de la superficie:
        i) Perpendicular al eje x en $x = c$.
        ii) Perpendicular al eje y en $y = c$.
    b) Para cada una de las gráficas de las figuras 11.40 y 11.41, aproveche su respuesta a la pregunta del inciso a, a fin de decidir cuál es el eje x y cuál el y, y colocar unidades razonables en cada uno de ellos.

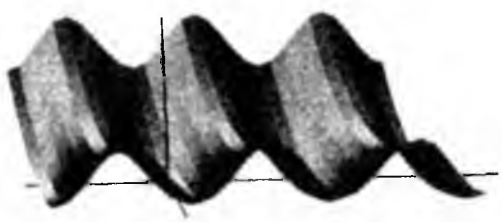


Figura 11.40



Figura 11.41

11.4 DIAGRAMAS DE CONTORNO

Con frecuencia, la superficie que representa una función de dos variables da una idea clara del comportamiento general de la función, por ejemplo si es creciente o decreciente conforme una de las variables crece. Sin embargo, es difícil leer valores numéricos de una superficie y puede ser complicado entender el comportamiento global de la función viendo sólo una superficie. En consecuencia, las funciones de dos variables se representan muchas veces mediante diagramas de contorno como el mapa meteorológico de la página 2. Los diagramas de contorno tienen la ventaja adicional de que se pueden extender a funciones de tres variables.

Mapas topográficos

Uno de los ejemplos más comunes de un diagrama de contorno es un mapa topográfico como el que se ilustra en la figura 11.42. Este mapa indica la elevación de la región y es una buena manera de tener una vista general del terreno: dónde están las montañas, dónde los terrenos planos. A veces, estos mapas topográficos se colorean de verde en las elevaciones menores y de café, rojo o blanco para las más altas.

[2] Adaptado de *Calculus in Context*, por James Callahan y Kenneth Hoffman, W. H. Freeman, Nueva York, 1995.

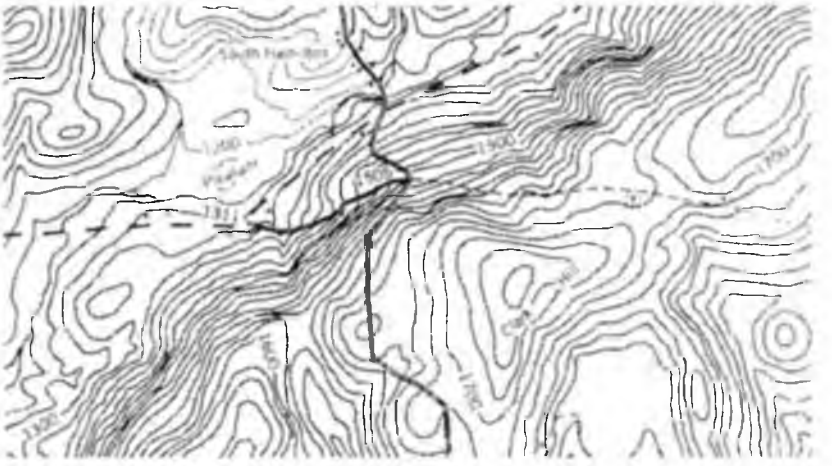


Figura 11.42 Mapa topográfico que muestra la región alrededor de South Hamilton, Nueva York.

Las curvas de un mapa topográfico, que separan elevaciones menores de las más altas, se denominan *líneas de contorno* porque describen el contorno o forma del terreno.[3] Debido a que cada punto situado a lo largo de un mismo contorno tiene la misma elevación, las líneas de contorno también se denominan *curvas de nivel* o *conjuntos de nivel*. Cuanto más próximas sean las líneas de contorno, el terreno es más abrupto y, por el contrario, cuanto más separadas, el terreno es más plano. (Esto ocurre, claro, siempre que la elevación entre contornos varíe en una cantidad constante.) Ciertos accidentes del terreno tienen características distintivas. Usualmente, la cima de una montaña está rodeada por líneas de contorno como las de la figura 11.43. Un puerto de una cadena de montañas puede tener contornos semejantes a la figura 11.44. Un valle elongado presenta líneas paralelas de contorno que indican las crecientes elevaciones a ambos lados del valle (véase Fig. 11.45); una sierra larga tiene el mismo tipo de líneas de contorno, sólo que las elevaciones disminuyen a ambos lados de la sierra. Observe que los números de las elevaciones de las líneas de contorno son tan importantes como las curvas mismas.

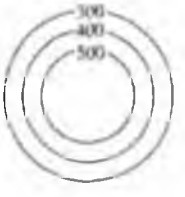


Figura 11.43 Cima de montaña.

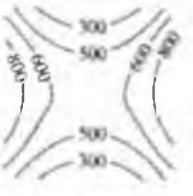


Figura 11.44 Puerto entre dos montañas.



Figura 11.45 Valle alargado.



Figura 11.46 Líneas de contorno imposibles.

Hay algunas cosas que las líneas de contorno no pueden hacer. Dos contornos correspondientes a diferentes elevaciones no pueden cruzarse (véase Fig. 11.46); si lo hicieran, el punto de intersección de las dos curvas tendría dos elevaciones diferentes, lo cual es imposible (suponiendo que el terreno no tiene salientes). Con frecuencia seguiremos aquí la costumbre de dibujar contornos para valores de z separados por cantidades iguales.

[3] De hecho, suelen no ser líneas rectas sino curvas. También pueden ser discontinuas.

Producción de maíz

Los mapas de contorno también pueden ser útiles para presentar información acerca de una función de dos variables sin hacer referencia a una superficie. Considere la manera de representar el efecto que diferentes condiciones atmosféricas tienen en la producción de maíz en Estados Unidos. ¿Qué ocurriría si la temperatura promedio aumentara (debido al calentamiento del planeta, por ejemplo)? ¿Qué ocurriría si la cantidad de lluvia disminuyera (debido a una sequía)? Una manera de calcular el efecto de estos cambios climáticos consiste en utilizar la figura 11.47. Éste es un diagrama de contorno que indica la producción de maíz $f(R, T)$ en Estados Unidos como función de la cantidad total de lluvia, R, en pulgadas, y de la temperatura promedio, T, en grados Fahrenheit, durante la temporada de cultivo.[4] Supongamos que actualmente $R = 15$ pulgadas y $T = 76°F$. La producción se mide como porcentaje de la producción actual; por lo tanto, el contorno que pasa por $R = 15$ y $T = 76$ tiene valor de 100, es decir, $f(15, 76) = 100$.

Ejemplo 1 Utilizar la figura 11.47 para calcular $f(18, 78)$ y $f(12, 76)$, y explicar la respuesta en términos de producción de maíz.

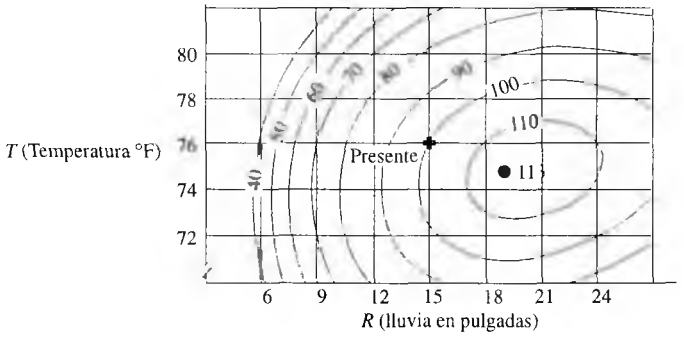


Figura 11.47 Producción de maíz como función de cantidad de lluvia y temperatura.

Solución El punto con coordenada R de 18 y coordenada T de 78 está en el contorno $C = 100$, así que $f(18, 78) = 100$. Esto significa que si la cantidad anual de lluvia fuera de 18 pulgadas y la temperatura de 78°F, el país produciría aproximadamente la misma cantidad de maíz que hoy día, aun cuando hubiera más humedad y la temperatura fuera más alta de lo que es ahora.

El punto con coordenada R de 12 y coordenada T de 76 está más o menos en medio de los contornos $C = 80$ y $C = 90$, así que $f(12, 76) \approx 85$. Lo anterior indica que si la cantidad de lluvia disminuye a 12 pulgadas y la temperatura se queda en 76°, entonces la producción de maíz disminuiría hasta alrededor de un 85% de lo que es ahora.

Ejemplo 2 Describir de manera verbal las secciones transversales con T y R constantes pasando por el punto que representa las condiciones actuales. Explicar la respuesta.

Solución Para ver lo que le ocurre a la producción de maíz si la temperatura permanece fija en 76°F, pero cambia la cantidad de lluvia, observe a lo largo de la línea horizontal $T = 76$. Al comenzar desde las condiciones actuales y avanzar a la izquierda a lo largo de la línea $T = 76$, los valores de los contornos disminuyen; en otras palabras, si hay una sequía, la producción de maíz disminuye. Por el contrario, si aumenta la cantidad de lluvia, es decir, si avanzamos hacia la derecha a lo largo de la línea $T = 76$, la producción de maíz aumenta y llega al máximo de más de 110% cuando $R = 21$, y luego disminuye (demasiada lluvia inunda los campos).

[4] Adaptado de *The Future of American Agriculture*, S. Beaty y R. Healy, Scientific American, vol. 248, No. 2, febrero de 1983.

Si en lugar de esto la cantidad de lluvia permanece en su valor actual y aumenta la temperatura, avanzamos hacia arriba sobre la línea vertical $R = 15$. En estas circunstancias, la producción de maíz disminuye; un aumento de 2° causa 10% de baja en la producción, lo que es congruente puesto que las temperaturas más altas ocasionan mayor evaporación y, por lo tanto, condiciones más secas incluso con una cantidad constante de lluvia de 15 pulgadas. De igual manera, una disminución en la temperatura también ocasiona un ligero aumento en la producción, llegando a un máximo de alrededor de 102% cuando $T = 74$, seguida por un descenso (el maíz no crecerá si hay demasiado frío).

Diagramas de contorno y gráficas

Los diagramas de contorno y las gráficas son dos maneras de representar una función de dos variables. ¿Cómo se pasa de una a otra? En el caso del mapa topográfico, el diagrama de contorno se creó al unir todos los puntos a la misma altura sobre la superficie y al bajar la curva al plano xy.

¿Cómo regresar a la otra representación? Supongamos que se desea trazar la superficie que representa la función de producción de maíz $C = f(R, T)$ dada por el diagrama de contorno de la figura 11.47. A lo largo de cada contorno, la función tiene un valor constante; si tomamos cada contorno y lo levantamos sobre el plano a una altura igual a su valor, obtenemos la superficie de la figura 11.48.

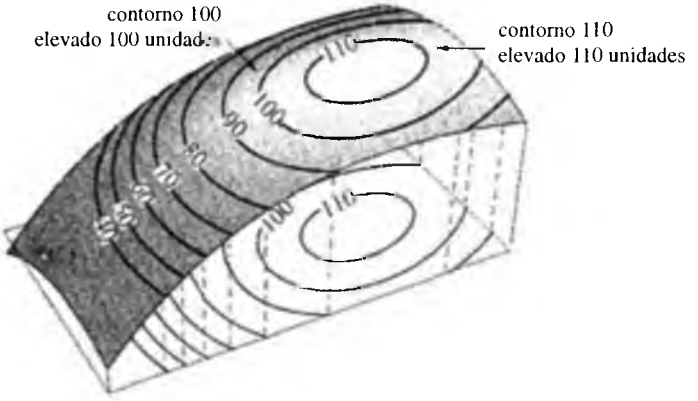


Figura 11.48 Obtención de la gráfica de la función producción de maíz a partir del diagrama de contorno.

Observe que los contornos alzados son las curvas que se obtienen si la superficie se corta horizontalmente. En general, se tiene el siguiente resultado:

> Las líneas de contorno, o curvas de nivel, de una superficie se obtienen cortándola con planos horizontales.

Cómo encontrar contornos algebraicamente

Es fácil encontrar las ecuaciones algebraicas para los contornos de una función f si tenemos una fórmula para $f(x, y)$. Supongamos que la superficie tiene ecuación

$$z = f(x, y).$$

Se obtiene un contorno al cortar la superficie con un plano horizontal con ecuación $z = c$. Por lo tanto, la ecuación para el contorno a la altura c está dado por:

$$f(x, y) = c$$

Ejemplo 3 Encontrar ecuaciones para los contornos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ y dibujar un diagrama de contorno para f. Relacionar el diagrama de contorno con la gráfica de f.

Solución El contorno a la altura c está dado por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = c$$

Éste es un contorno sólo para $c \geq 0$; para $c > 0$, es un círculo de radio $\sqrt{c}$; para $c = 0$, un solo punto (el origen). Por lo tanto, los contornos a una elevación de $c = 1, 2, 3, 4, \ldots$ son todos círculos con centro en el origen y radio 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, . . . El diagrama de contorno se muestra en la figura 11.49; la gráfica en forma de tazón de f, en la figura 11.50. Observe que la gráfica de f se inclina más conforme nos alejamos del origen. Esto se refleja en el hecho de que los contornos se pegan más unos a otros conforme nos alejamos del origen; por ejemplo, los contornos para $c = 6$ y $c = 8$ están más juntos que los contornos para $c = 2$ y $c = 4$.

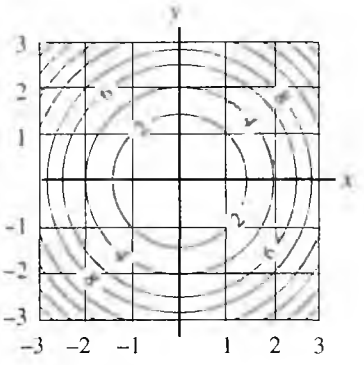


Figura 11.49 Diagrama de contorno para $f(x, y) = x^2 + y^2$ (sólo valores pares de c).

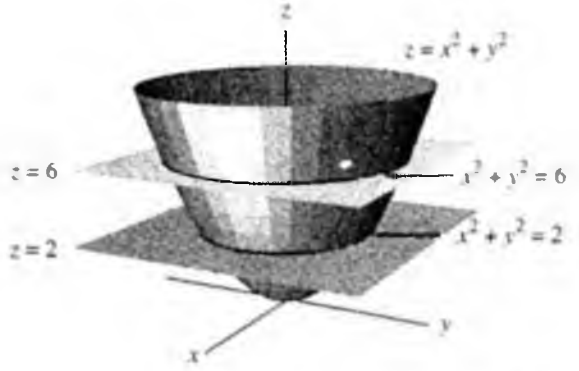


Figura 11.50 La gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Ejemplo 4 Dibujar un diagrama de contorno para $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ y relacionarlo con la gráfica de f.

Solución El contorno en el nivel c está dado por

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = c$$

Para $c > 0$ esto es un círculo, igual que en el ejemplo previo, pero aquí el radio es c en lugar de $\sqrt{c}$. Para $c = 0$, es el origen. Por lo tanto, si el nivel c aumenta en 1, el radio del contorno aumenta en 1. Esto significa que los contornos son círculos concéntricos igualmente espaciados (véase Fig 11.51) que no se pegan más a medida que nos alejamos del origen. En consecuencia, la gráfica de f tiene la misma pendiente constante (véase Fig. 11.52); es un cono más que un tazón.

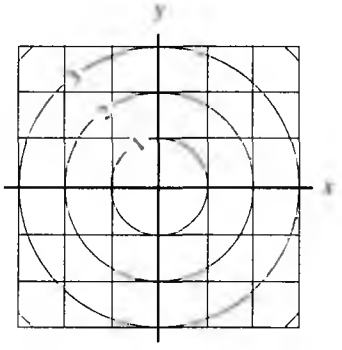


Figura 11.51 Un diagrama de contorno para $f(x,\ y) = \sqrt{x^2 + y^2}$



Figura 11.52 La gráfica de $f(x,\ y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

En los dos ejemplos anteriores, las curvas de nivel son círculos concéntricos porque las superficies tienen simetría circular. Cualquier función de dos variables que depende sólo de la cantidad $(x^2 + y^2)$ tiene tal simetría: por ejemplo, $G(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ o $H(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Ejemplo 5 Dibujar un diagrama de contorno para $f(x, y) = 2x + 3y + 1$.

Solución El contorno en el nivel c tiene ecuación $2x + 3y + 1 = c$. Si lo reescribimos como $y = -(2/3)x + (c - 1)/3$, veremos que los contornos son rectas paralelas con pendiente $-2/3$. La intersección y para el contorno en el nivel c es $(c - 1)/3$; cada vez que c aumenta en 3, la intersección y se desplaza hacia arriba en 1. En la figura 11.53 se ilustra el diagrama de contorno.

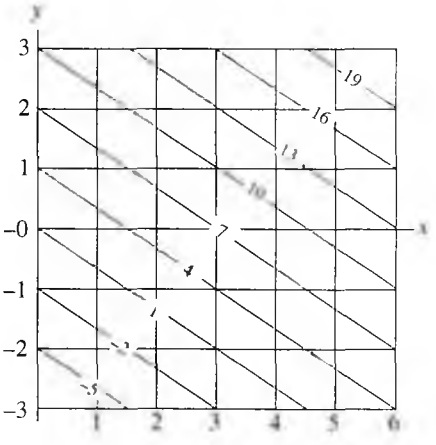


Figura 11.53 Diagrama de contorno para $f(x, y) = 2x + 3y + 1$.

Diagramas de contorno y tablas

A veces se puede tener una idea del aspecto que tendrá el diagrama de contorno de una función, examinando su tabla.

Ejemplo 6 Relacionar los valores de $f(x, y) = x^2 - y^2$ de la tabla 11.5 con su diagrama de contorno. (Fig. 11.54.)

TABLA 11.5 *Tabla de valores de* $f(x, y) = x^2 - y^2$.

3	0	−5	−8	−9	−8	−5	0
2	5	0	−3	−4	−3	0	5
1	8	3	0	−1	0	3	8
0	9	4	1	0	1	4	9
−1	8	3	0	−1	0	3	8
−2	5	0	−3	−4	−3	0	5
−3	0	−5	−8	−9	−8	−5	0
	−3	−2	−1	0	1	2	3

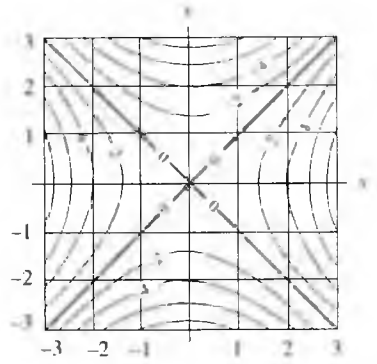


Figura 11.54 Mapa de contorno de $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Solución Una característica notable de los valores de la tabla 11.5 son los ceros a lo largo de las diagonales, lo cual ocurre porque $x^2 - y^2 = 0$ a lo largo de las líneas $y = x$ y $y = -x$. Por lo tanto, el contorno $z = 0$ está formado por estas dos líneas. En la región triangular de la tabla que se encuentra a la derecha de ambas diagonales, las cantidades son positivas; a la izquierda de ambas diagonales, las cantidades también son positivas. Así, en el diagrama de contorno, los contornos positivos estarán en las regiones triangulares a la derecha e izquierda de las líneas $y = x$ y $y = -x$. Además, la tabla muestra que los números de la izquierda son los mismos que los de la derecha; en consecuencia, cada contorno tendrá dos partes, una a la izquierda y otra a la derecha (véase Fig. 11.54). Conforme nos alejemos del origen a lo largo del eje x cruzamos contornos correspondientes a valores más grandes. En la gráfica en forma de silla de montar de $f(x, y) = x^2 - y^2$ que se muestra en la figura 11.55, esto corresponde a subir por la silla de montar a lo largo de una de las crestas. De igual manera, los contornos negativos se presentan en pares en las regiones triangulares superior e inferior; los valores se hacen cada vez más negativos conforme avanzamos a lo largo del eje y. Lo anterior corresponde a descender de la silla de montar a lo largo de los valles que están sumergidos bajo el plano xy en la figura 11.55. Observe que también se podría obtener el diagrama de contorno al graficar la familia de hipérbolas $x^2 - y^2 = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$.

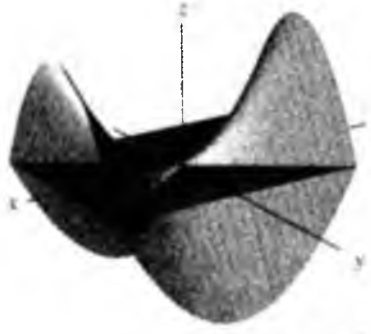


Figura 11.55 Gráfica de $f(x, y) = x^2 - y^2$ que muestra el plano $z = 0$.

Uso de los diagramas de contorno: la función de producción de Cobb–Douglas

Supongamos que el propietario de una pequeña imprenta decide ampliar su negocio porque tiene más pedidos de los que puede surtir. ¿Cómo debe ampliarse? ¿Debe establecer un turno de noche y contratar más personal? ¿Debe comprar computadoras más costosas, pero más rápidas, con lo que evitará que el personal actual no se retrase con el trabajo? ¿O debe buscar una combinación de los dos?

Obviamente, la manera en que se tome tal decisión en la práctica implica muchas otras consideraciones, como son saber si se podría contar en un turno de noche con personal capacitado, o si existen computadoras más rápidas. Ello no obstante, se puede hacer un modelo de la cantidad, P, de trabajo producido por el negocio como función de dos variables: el número total, N, de trabajadores, y el valor total, V, del equipo.

¿Cómo debería comportarse esta función de producción? En general, con más equipo y más trabajadores es posible producir más. Aumentar el equipo sin aumentar personal aumentará un poco la producción, pero sólo hasta cierto punto. (Si el equipo está ya ocioso, adquirir más no ayudará.) Del mismo modo, aumentar el personal sin aumentar el equipo aumentará la producción, pero no más allá del punto en que el equipo se utilice en toda su capacidad, porque el nuevo personal no contaría con equipo.

Ejemplo 7 Explicar por qué el diagrama de contorno de la figura 11.56 no sirve como modelo para el comportamiento esperado de la función de producción, en tanto que el diagrama de contorno de la figura 11.57 sí sirve.

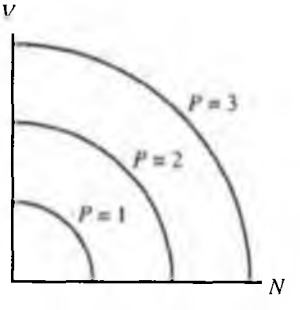


Figura 11.56 Contornos incorrectos para producción de impresos.

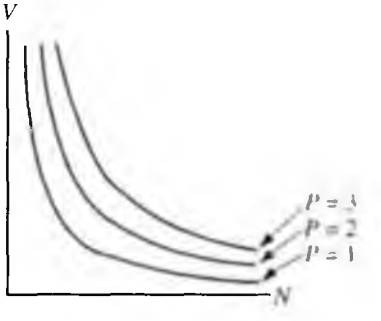


Figura 11.57 Contornos correctos para producción de impresos.

Solución Observe el diagrama de contorno de la figura 11.56. Fijar V en un valor en particular y hacer que N aumente significa desplazarse a la derecha en el diagrama de contorno. Al hacerlo, se cruzan contornos con valores P cada vez más y más grandes, lo cual indica que la producción aumenta indefinidamente. Por otro lado, en la figura 11.57, conforme avanzamos en la misma dirección nos encontramos avanzando casi en forma paralela a los contornos, cruzándolos cada vez con menos frecuencia. Por lo tanto, la producción aumenta cada vez menos a medida que N aumenta y V permanece fija. Del mismo modo, si N se mantiene fija y se deja aumentar V, el diagrama de contorno de la figura 11.56 muestra que la producción crece a una tasa constante, en tanto que la figura 11.57 muestra aumento en la producción, pero a una tasa decreciente. En consecuencia, la figura 11.57 se adapta mejor al comportamiento esperado de la función de producción.

Fórmula para una función de producción

Con frecuencia, las funciones de producción con el comportamiento cualitativo que deseamos se calculan mediante fórmulas de la forma

$$P = f(N, V) = cN^{\alpha} V^{\beta}$$

donde P es la cantidad total producida y c, α y β son constantes positivas con $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$.

Ejemplo 8 Demostrar que los contornos de la función $P = cN^{\alpha} V^{\beta}$ tienen aproximadamente la forma de los contornos de la figura 11.58.

Solución Los contornos son las curvas donde P es igual a un valor constante, por ejemplo P_0, es decir, donde

$$cN^{\alpha} V^{\beta} = P_0.$$

Al despejar V se obtiene

$$V = \left(\frac{P_0}{c}\right)^{1/\beta} N^{-\alpha/\beta}$$

Así, V es una potencia de N con exponente negativo y, por lo tanto, su gráfica tiene la forma que se ilustra en la figura 11.57.

El modelo de producción de Cobb–Douglas

En 1928, Cobb y Douglas utilizaron una función similar para modelar la producción de toda la economía de Estados Unidos en el primer cuarto de este siglo. Usando estimaciones gubernamentales de P, la producción total anual entre 1899 y 1922, K, la inversión total de capital en el mismo periodo, y L, el total de la fuerza laboral, encontraron que con la *función de producción Cobb–Douglas* se obtenía una buena aproximación a P.

$$P = 1.01 L^{0.75} K^{0.25}$$

Resultó que esta función modeló la economía de Estados Unidos sorprendentemente bien, tanto para el periodo en el que estuvo basada como durante algunos años más.

Problemas para la sección 11.4

Para las funciones de los problemas del 1 al 9, trace un diagrama de contorno con por lo menos cuatro contornos marcados. Describa verbalmente los contornos y cómo están espaciados.

1. $f(x,y) = x + y$
2. $f(x, y) = xy$
3. $f(x, y) = x^2 + y^2$
4. $f(x, y) = 3x + 3y$
5. $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 1$
6. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$
7. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$
8. $f(x, y) = y - x^2$
9. $f(x, y) = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$
10. La figura 11.58 es un diagrama de contorno del pago mensual de un préstamo a 5 años para comprar un auto, en función de la tasa de interés y de la cantidad solicitada. Supongamos que la tasa de interés es de 13% y el préstamo de US $6000.

a) ¿Cuál es el pago mensual?
b) Si la tasa de interés baja a 11%, ¿cuánto dinero más se puede pedir sin aumentar el pago mensual?
c) Haga una tabla de cuánto más se puede pedir, sin aumentar el pago mensual, en función de la tasa de interés.

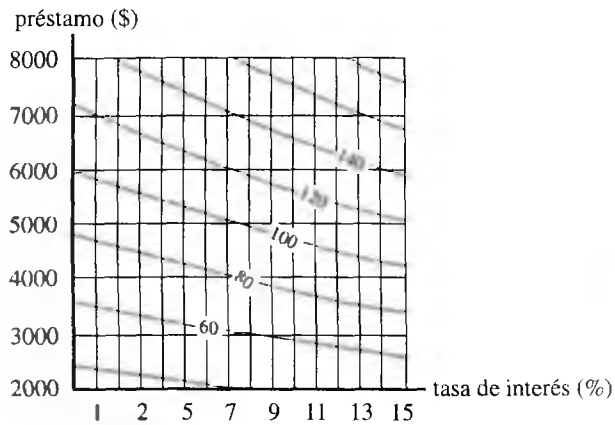


Figura 11.58

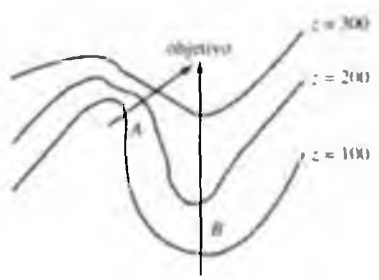


Figura 11.59

11. La figura 11.59 muestra un mapa de contorno de una colina con dos veredas, A y B.
    a) ¿En cuál vereda, A o B, uno tendría que caminar con más pendiente?
    b) ¿En cuál vereda, A o B, se tendrá mejor vista de los alrededores? (suponiendo que no haya árboles que obstruyan la vista).
    c) ¿A lo largo de cuál vereda es más probable que haya un arroyo?
12. Cada uno de los diagramas de contorno de la figura 11.60 muestra la densidad de población de cierta región. Escoja el diagrama de contorno que mejor corresponda a cada una de las siguientes situaciones; son posibles muchas correspondencias. Justifique su elección.
    a) El centro del diagrama es una ciudad.
    b) El centro del diagrama es un lago.
    c) El centro del diagrama es una planta de electricidad.

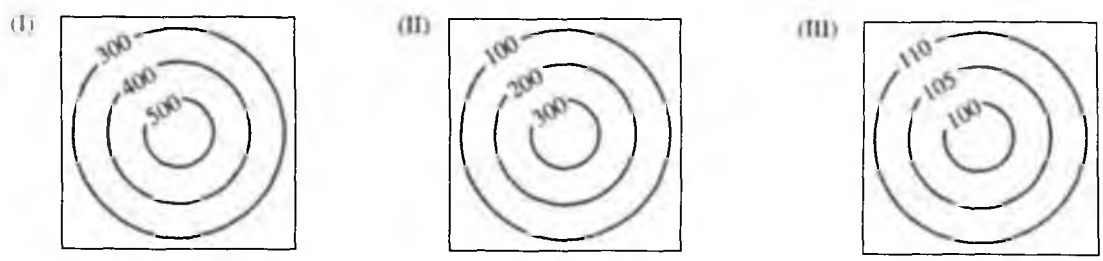


Figura 11.60

Para cada una de las superficies de los problemas 13, 14 y 15, trace un posible diagrama de contorno, marcado con valores z razonables. (Nota: hay muchas respuestas posibles.)

13.

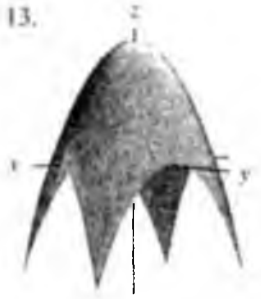


Figura 11.61

14.

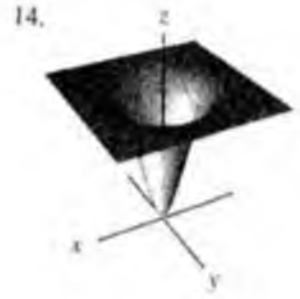


Figura 11.62

15.

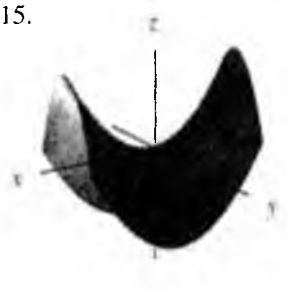


Figura 11.63

16. La figura 11.64 muestra la densidad de población P de zorras (en zorras por kilómetro cuadrado) en el sur de Inglaterra. Dibuje dos secciones transversales diferentes en dirección norte–sur y dos en dirección este–oeste de la densidad de población P.

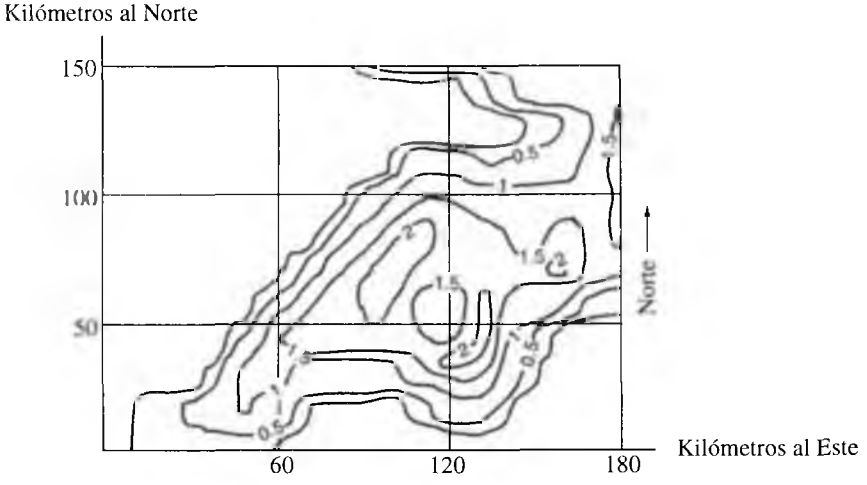


Figura 11.64 Densidad de población de zorras en el sudoeste de Inglaterra.

17. Trace con computadora o calculadora un diagrama de contorno para la función de cuerda en vibración siguiente

$$f(x, t) = \cos t \operatorname{sen} 2x, \qquad 0 \le x \le \pi, 0 \le t \le \pi.$$

Utilice $c = -2/3, -1/3, 0, 1/3, 2/3$. (No puede hacerse algebraicamente.)

18. En la página 4 se presentó la función de onda viajera

$$h(x, t) = 5 + \cos(0.5x - t).$$

Dibuje un diagrama de contorno con $c = 4, 4.5, 5, 5.5, 6$ para esta función. Explique cómo se relaciona su contorno con las secciones transversales de h estudiadas en la página 4. ¿En dónde están más juntos los contornos?, ¿y más separados?

19. Dibuje diagramas de contorno para cada una de las gráficas de pizza-refresco de cola-satisfacción dadas en el problema 6 de la página 21.

20. Un fabricante vende dos artículos; uno cuesta US $3000 por unidad y el otro US $12 000 por unidad. Suponga que se vende una cantidad q_1 del primer artículo y q_2 del segundo con un costo total de US $4000 para el fabricante.

a) Exprese la utilidad del fabricante, π, como función de q_1 y q_2.
b) Dibuje curvas de utilidad constante en el plano $q_1 q_2$ para $\pi = 10\,000$, $\pi = 20\,000$ y $\pi = 30\,000$ y la curva sin utilidad $\pi = 0$.

21. La córnea es la superficie exterior de los ojos. Los especialistas en córneas utilizan un sistema de modelo topográfico (TMS, por sus siglas en inglés) para trazar un "mapa" de la curvatura de la superficie del ojo. Una computadora analiza la luz reflejada por el ojo y dibuja curvas de nivel que enlazan puntos de curvatura constante. Las regiones entre estas curvas se colorean con colores diferentes.

Las primeras dos imágenes de la figura 11.65 son secciones transversales de ojos con curvatura constante, la más pequeña es de más o menos 38 unidades y la más grande de 50 unidades. El tercer ojo, para efectos de comparación, tiene curvatura variable.

a) Describa verbalmente cómo se ve el mapa de TMS de un ojo de curvatura constante.
b) Dibuje el mapa de TMS de un ojo con el corte de la figura 11.66. Suponga que el ojo es circular cuando se mira desde el frente, y el corte es igual en todas direcciones. Asigne números razonables a las curvas de nivel.



Figura 11.65 Imágenes de ojos con curvatura diferente.

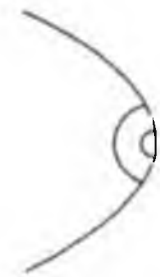


Figura 11.66.

22. Relacione las tablas de la 11.6 a la 11.9 con los diagramas de contorno del (I) al (IV) de la figura 11.67.

TABLA 11.6

$y \backslash x$	−1	0	1
−1	2	1	2
0	1	0	1
1	2	1	2

TABLA 11.7

$y \backslash x$	−1	0	1
−1	0	1	0
0	1	2	1
1	0	1	0

TABLA 11.8

$y \backslash x$	−1	0	1
−1	2	0	2
0	2	0	2
1	2	0	2

TABLA 11.9

$y \backslash x$	−1	0	1
−1	2	2	2
0	0	0	0
1	2	2	2

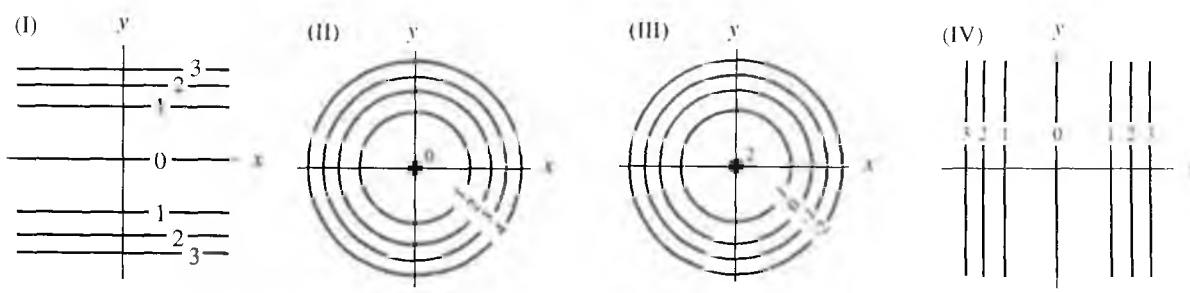


Figura 11.67

23. Relacione las superficies de la (a) a la (e) de la figura 11.68 con los diagramas de contorno del (I) al (V) de la figura 11.69.

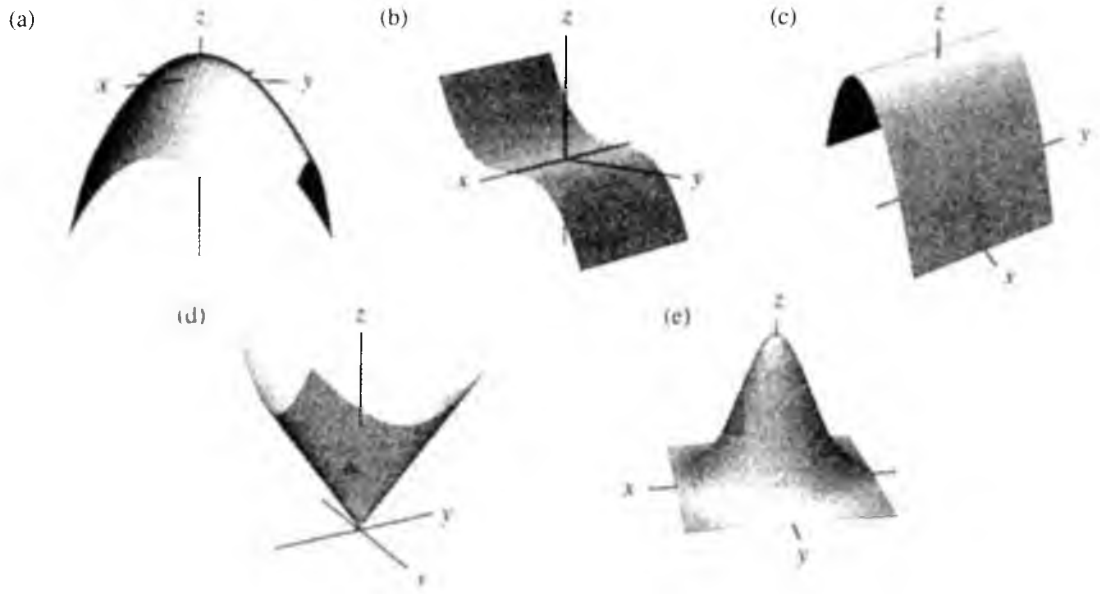


Figura 11.68

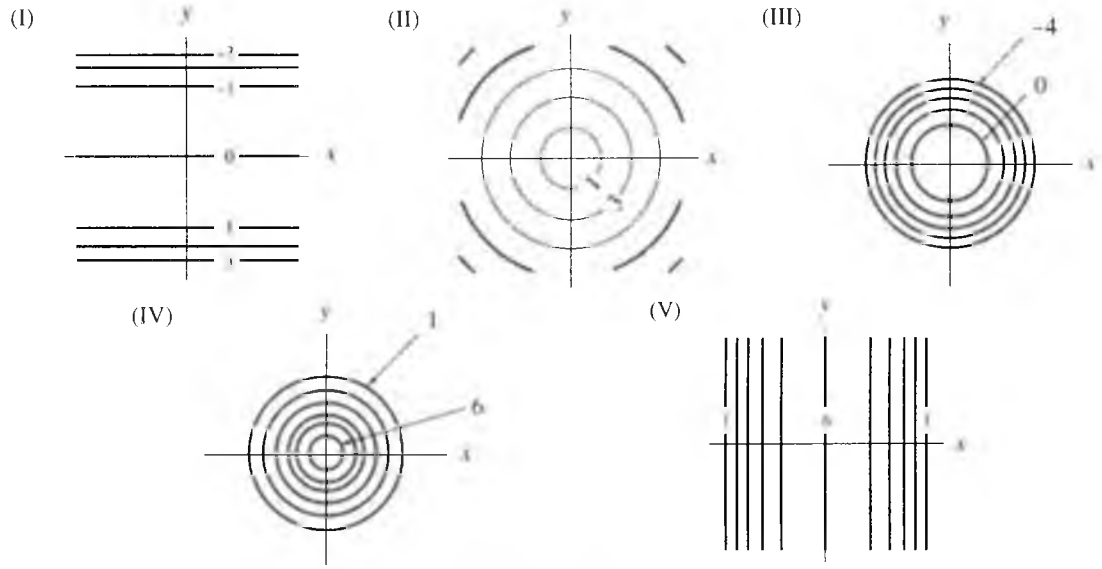


Figura 11.69

24. El mapa de la figura 11.70 se tomó de la tesis de graduación del profesor Robert Cook, Director del Arnold Arboretum de Harvard. Este mapa muestra curvas de nivel de la función que indica la densidad de especies de aves en reproducción en cada punto de Estados Unidos, Canadá y México.



Figura 11.70

Con base en el mapa de la figura 11.70, diga si los siguientes enunciados son ciertos o falsos. Explique sus respuestas.

a) Al desplazarse de sur a norte en Canadá, la densidad de especies aumenta.
b) La densidad de especies alrededor de Miami es de más de 100.
c) En general, las penínsulas (por ejemplo Florida, Baja California, Yucatán) tienen menor densidad de especies que las regiones alrededor de las mismas.
d) La tasa de cambio más alta en densidad de especies en función de la distancia ocurre en México. Si cree que esto es cierto, marque el punto y dirección que indican la máxima tasa de cambio y explique por qué seleccionó ese punto y dirección.

25. La temperatura T (en $°C$) en cualquier punto en la región $-10 \le x \le 10$, $-10 \le y \le 10$ está dada por la función

$$T(x, y) = 100 - x^2 - y^2$$

a) Dibuje curvas isotérmicas (curvas de temperatura constante) para $T = 100\ °C$, $T = 75°C$, $T = 50°C$, $T = 25°C$ y $T = 0°C$.
b) Suponga que a un insecto que busca el calor se le coloca en cualquier punto del plano xy. ¿En qué dirección debe desplazarse para aumentar su temperatura con más rapidez? ¿Cómo está relacionada esa dirección con la curva de nivel que pasa por ese punto?

26. La figura 11.71 muestra las curvas de nivel de la temperatura H de un salón cerca de una ventana recientemente abierta. Marque las tres curvas de nivel con valores razonables de H si la casa se ubica en los siguientes lugares:

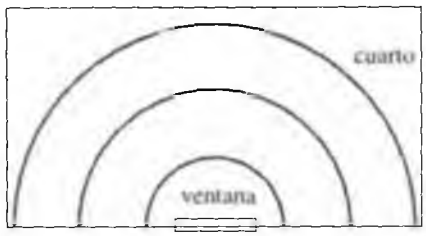


Figura 11.71

a) Minnesota en invierno (donde los inviernos son severos)
b) San Francisco en invierno (donde los inviernos son benignos)
c) Houston en verano (donde los veranos son calurosos)
d) Oregon en verano (donde los veranos son templados).

27. Relacione cada función de producción Cobb–Douglas con la gráfica correcta de la figura 11.72 y con los enunciados correctos.

a) $F(L, K) = L^{0.25}K^{0.25}$
b) $F(L, K) = L^{0.5}K^{0.5}$
c) $F(L, K) = L^{0.75}K^{0.75}$

D) Triplicar cada insumo triplica la producción.
E) Cuadruplicar cada insumo duplica la producción.
G) Duplicar cada insumo casi triplica la producción.

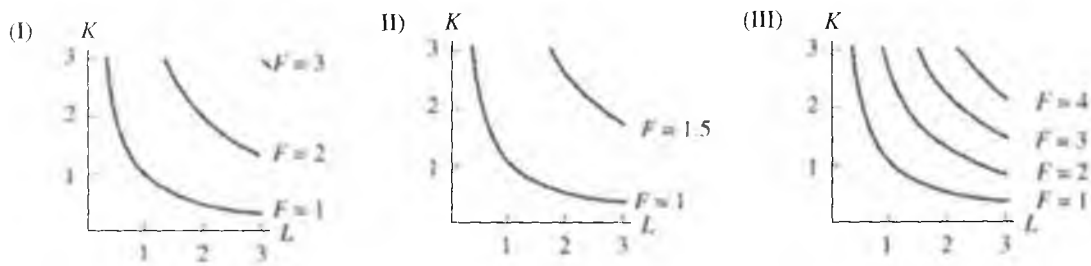


Figura 11.72

28. Considere la función de producción Cobb–Douglas $P = f(L, K) = 1.01\,L^{0.75}K^{0.25}$. ¿Cuál es el efecto en la producción si se duplica la mano de obra y el capital?

29. Una función de producción Cobb–Douglas general tiene la forma

$$P = cL^{\alpha}K^{\beta}$$

Una pregunta importante de tipo económico es ¿qué pasa con la producción si la mano de obra y el capital aumentan? Por ejemplo, ¿se duplica la producción si se duplican la mano de obra y el capital? Los economistas hablan de

- *rendimientos a escala creciente* si duplicar L y K duplica P sobradamente,
- *rendimientos a escala constante* si duplicar L y K exactamente duplica P,
- *rendimientos a escala decreciente* si duplicar L y K no alcanza a duplicar P.

¿Qué condiciones sobre α y β llevan a rendimientos crecientes, constantes o decrecientes a escala?

30. La figura 11.73 muestra los contornos de la temperatura de una pared de un cuarto con calefacción, a lo largo de un día de invierno. La hora se indica como en un reloj de 24 horas. El cuarto tiene un calentador colocado en el rincón de la extrema izquierda de la pared y una ventana en ésta. El calentador está controlado por un termostato situado aproximadamente a dos pies de la ventana.

a) ¿En dónde está la ventana?
b) ¿Cuándo está abierta la ventana?
c) ¿Cuándo está encendida la calefacción?
d) Trace gráficas de la temperatura a lo largo de la pared del cuarto a las 6 am, a las 11 am, a las 3 pm (15 h) y a las 5 pm (17 h).
e) Trace una gráfica de la temperatura como función del tiempo en el calentador, en la ventana y a una distancia intermedia entre ellos.
f) La temperatura en la ventana a las 5 pm (17 h) es menor que a las 11 am. ¿Cómo se explica esto?
g) ¿A qué temperatura cree que está puesto el termostato? ¿Cómo lo sabe?
h) ¿En dónde está el termostato?

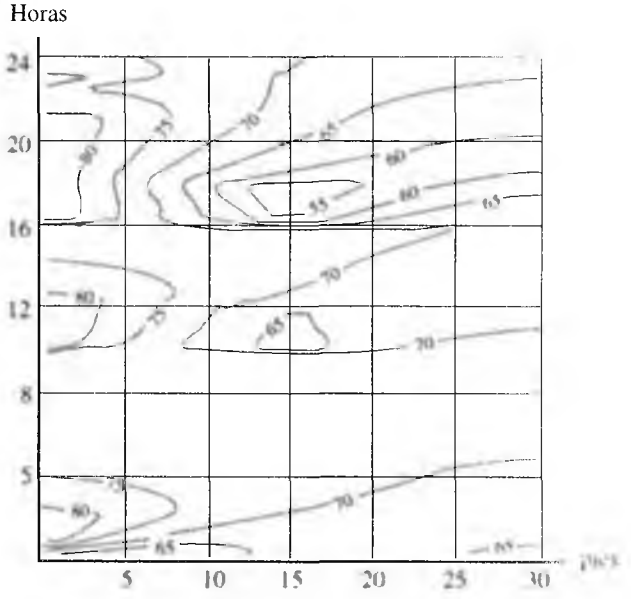


Figura 11.73

11.5 FUNCIONES LINEALES

¿Qué es una función lineal de dos variables?

Las funciones lineales tuvieron una función importante en el cálculo de una variable porque muchas funciones de una variable son localmente lineales; esto es, sus gráficas semejan una recta al ampliarlas. En el cálculo de dos variables, *funciones lineales* son aquéllas cuya gráfica es un plano. En el capítulo 13 veremos que la mayoría de las funciones de dos variables con las que trabajamos tienen gráficas que parecen planos cuando se amplían.

¿Qué hace que un plano sea plano?

¿Qué tiene una función $f(x, y)$ que hace que su gráfica $z = f(x, y)$ sea un plano? La gráfica de las funciones lineales de una variable es una línea recta porque tienen pendiente constante. No importa

dónde estemos en la gráfica, la pendiente es la misma: un aumento dado en la coordenada x siempre dará el mismo aumento en la coordenada y. En otras palabras, la proporción $\Delta y / \Delta x$ es constante. En un plano, la situación es un poco más complicada. Si caminamos alrededor de un plano inclinado, la pendiente no es siempre la misma: depende de la dirección en que caminemos. Sin embargo, es cierto que en todo punto del plano la pendiente es la misma mientras escojamos la misma dirección. Si caminamos en dirección paralela al eje x, siempre nos encontramos caminando hacia arriba o hacia abajo con la misma pendiente; lo mismo es cierto si caminamos en dirección paralela al eje y. En otras palabras, las proporciones de pendiente $\Delta z / \Delta x$ (con y fija) y $\Delta z / \Delta y$ (con x fija) son ambas constantes.

Ejemplo 1 Considere un plano que corta el eje z en $z = 5$, tiene pendiente 2 en la dirección x y pendiente -1 en la dirección y. ¿Cuál es la ecuación del plano?

Solución Encontrar la ecuación del plano significa escribir una fórmula para encontrar la coordenada z del punto del plano directamente encima del punto (x, y) del plano xy. Para llegar a ese punto comencemos desde el punto encima del origen, donde $z = 5$; luego caminamos x unidades en la dirección x, y como la pendiente en la dirección x es 2, nuestra altura aumenta en $2x$. Luego caminamos y unidades en la dirección y; como la pendiente en la dirección y es -1, nuestra altura disminuye y unidades. Como nuestra altura ha cambiado $2x - y$ unidades, nuestra coordenada z es $5 + 2x - y$. Por lo tanto, la ecuación para el plano es

$$z = 5 + 2x - y.$$

Para cualquier función lineal, si conocemos su valor en un punto (x_0, y_0), su pendiente en la dirección x, y su pendiente en la dirección y, entonces podemos escribir la ecuación de la función. Ésta es como la ecuación de una recta en el caso de una variable, excepto que hay dos pendientes en vez de una.

Si un plano tiene pendiente m en la dirección x, pendiente n en la dirección y, y pasa por el punto (x_0, y_0, z_0), entonces su ecuación es

$$z = z_0 + m\,(x - x_0) + n(y - y_0).$$

Este plano es la gráfica de la función lineal

$$f(x, y) = z_0 + m\,(x - x_0) + n(y - y_0).$$

Si escribimos $c = z_0 - mx_0 - ny_0$, entonces podemos escribir $f(x, y)$ en la forma equivalente

$$f(x, y) = c + mx + ny.$$

Así como en un espacio de dos dimensiones una recta está determinada por dos puntos, en un espacio de tres dimensiones un plano está determinado por tres puntos, a condición de que no pertenezcan a una misma recta.

Ejemplo 2 Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, 0, 1)$, $(1, -1, 3)$ y $(3, 0, -1)$.

Solución Los primeros dos puntos tienen la misma coordenada x, así que los usamos para encontrar la pendiente del plano en la dirección y. Cuando la coordenada y cambia de 0 a -1, la coordenada z cambia de 1 a 3, así que la pendiente en la dirección y es $n = \Delta z / \Delta y = (3-1) / (-1-0) = -2$. Los puntos primero y tercero tienen la misma coordenada y, por lo cual los usamos para encontrar la pendiente en la dirección x; es $m = \Delta z / \Delta x = (-1-1) / (3-1) = -1$. Debido a que el plano pasa por $(1, 0, 1)$, su ecuación es

$$z = 1 - (x - 1) - 2(y - 0) \quad \text{o} \quad z = 2 - x - 2y.$$

Compruebe que también los puntos (1, –1, 3) y (3, 0, –1) satisfacen esta ecuación.

El ejemplo anterior se facilitó debido a que dos de los puntos tienen la misma coordenada x y dos la misma coordenada y. Un método opcional, que funciona para tres puntos cualesquiera, consiste en sustituir los valores de x, y y z de cada uno de los tres puntos en la ecuación $z = c + mx + ny$. Las tres ecuaciones resultantes en c, m, n se pueden resolver simultáneamente. Véase el problema 2 de la página 41.

Funciones lineales desde un punto de vista numérico

Para evitar vuelos con demasiados asientos vacíos, las líneas aéreas venden algunos boletos a su precio normal y otros con descuento. La tabla 11.10 muestra los ingresos de una línea aérea en dólares por boletos vendidos en una ruta determinada, como función del número de boletos vendidos a precio normal, f, y el número de boletos vendidos con descuento, d.

TABLA 11.10 *Ingreso por venta de boletos (en dólares)*

Boletos con descuento (d) \ Boletos a precio normal (f)	100	200	300	400
200	39,700	63,600	87,500	111,400
400	55,500	79,400	103,300	127,200
600	71,300	95,200	119,100	143,000
800	87,100	111,000	134,900	158,800
1000	102,900	126,800	150,700	174,600

Al leer hacia abajo cualquiera de las columnas, vemos que el ingreso aumenta US $15 800 por cada 200 boletos adicionales vendidos con descuento. Por lo tanto, cada columna es una función lineal del número de boletos vendidos con descuento. Además, cada columna tiene la misma pendiente, que es 15 800/200 = 79 dólares/boleto. Éste es el precio de un boleto con descuento. De igual manera, cada renglón es una función lineal y todos los renglones tienen la misma pendiente, 239, que es el precio normal de un boleto. En consecuencia, R es una función lineal de f y d, dada por:

$$R = 239f + 79d.$$

Tenemos el siguiente resultado general:

Una **función lineal** puede reconocerse a partir de su tabla por las siguientes características:

- Cada renglón y cada columna es lineal.
- Todos los renglones tienen la misma pendiente.
- Todas las columnas tienen la misma pendiente (aun cuando la pendiente de los renglones y la pendiente de las columnas son, en general, diferentes).

Ejemplo 3 La tabla siguiente contiene algunos valores de una función lineal. Llenar el espacio y dar una fórmula para la función

$x \setminus y$	1.5	2.0
2	0.5	1.5
3	–0.5	

Solución En la primera columna la función decrece en 1 (de 0.5 a –0.5) conforme x pasa de 2 a 3. Como la función es lineal, debe decrecer en la misma cantidad en la segunda columna. Por lo tanto, la cantidad faltante será 1.5 – 1 = 0.5. La pendiente de la función en la dirección x es –1. La pendiente en la dirección y es 2, porque en cada renglón la función aumenta en 1 cuando y aumenta en 0.5. De la tabla se obtiene f (2, 1.5) = 0.5. Así, la fórmula es

$$f(x, y) = 0.5 - (x - 52) + 2(y - 1.5) = -0.5 - x + 2y.$$

¿Qué aspecto tiene el diagrama de contorno de una función lineal?

Considere la función para los ingresos de una línea aérea dada en la tabla 11.10. Su fórmula es

$$R = 239f + 79d,$$

donde f es el número de boletos vendidos a precio normal y d el de boletos vendidos con descuento. La figura 11.74 indica el diagrama de contorno para esta función.

Observe que los contornos son líneas rectas paralelas. ¿Cuál es el significado práctico de la pendiente? Considere el contorno R = 100 000; eso indica que buscamos combinaciones de ventas de boletos que den US $100 000 en ingresos. Si nos desplazamos hacia abajo y a la derecha del contorno, la coordenada f aumenta y la d disminuye, así que se venden más boletos a precio normal y menos a precio con descuento. Esto tiene sentido porque para recibir un ingreso fijo de US $100 000 deben venderse más boletos a precio normal si se venden menos a precio con descuento. La combinación exacta depende de la pendiente del contorno; el diagrama muestra que cada contorno tiene una pendiente de aproximadamente –3. Esto significa que para un ingreso fijo, deben venderse tres boletos con descuento para sustituir

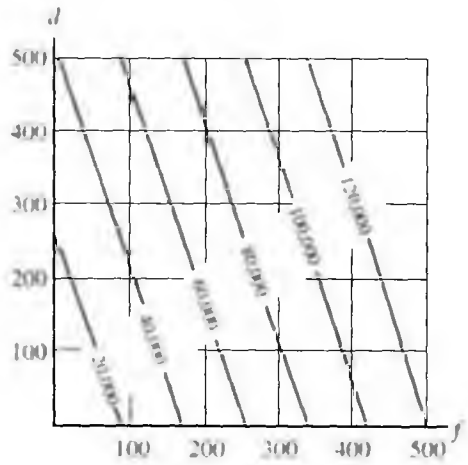


Figura 11.74 Ingreso como función del número de boletos vendidos a precio normal y a precio con descuento.

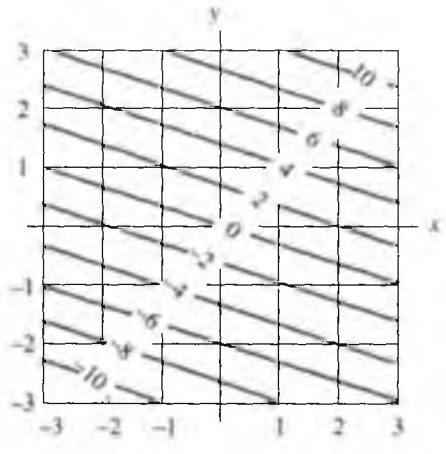


Figura 11.75 Mapa de contorno de la función lineal f (x, y).

un boleto
precio nor
descuento
cuántos de
tanto, los
Tamb
no import
aumento e
cantidad d
ingreso qu

Ejemplo 4 Encontrar l

Solución Comencen
contorno z
avance de 2
ción x es Δ

Problemas para la s

1. Supong
la direc
a) Un
b) Si z
2. Encuent
(0, 2, –1
3. Encuent
4. Encuent
el plano
5. Encuent
$z = 3x +$
6. Encuent
contiene
7. ¿Es linea

TAB

$u \setminus v$
3.2
3.4
3.6
3.8
4.0

un boleto a precio normal, lo que también se puede comprobar si se comparan los precios. Cada boleto a precio normal representa un ingreso de US $239; para ganar la misma cantidad con boletos vendidos con descuento se necesita vender 239 / 79 ≈ 3.03 ≈ 3 boletos. Como la relación de precios es independiente de cuántos de cada tipo se venden, esta pendiente permanece constante en todo el mapa de contorno; por lo tanto, los contornos son todos líneas rectas paralelas.

También debe observarse que los contornos están uniformemente espaciados, lo que significa que no importa en cuál contorno estemos, un aumento fijo de una de las variables ocasiona el mismo aumento en el valor de la función. En términos de ingresos, esto nos indica que cualquiera que sea la cantidad de boletos vendidos, otro boleto vendido a precio normal o con descuento generará el mismo ingreso que antes.

Ejemplo 4 Encontrar la ecuación de la función lineal cuyo diagrama de contorno está en la figura 11.75.

Solución Comencemos en el origen, en el contorno $z = 0$. Avanzar dos unidades en dirección y nos lleva al contorno $z = 6$; por lo tanto, la pendiente en dirección y es $\Delta z / \Delta y = 6 / 2 = 3$. De igual manera, un avance de 2 en la dirección x desde el origen nos lleva al contorno $z = 2$, así que la pendiente en la dirección x es $\Delta z / \Delta y = 2 / 2 = 1$. Como $f(0, 0) = 0$, tenemos que $f(x, y) = x + 3y$.

Problemas para la sección 11.5

1. Supongamos que z es una función lineal de x y y con pendiente 2 en la dirección x y pendiente 3 en la dirección y.
   a) Un cambio de 0.5 en x y –0.2 en y ¿qué cambio produce en z?
   b) Si $z = 2$ cuando $x = 5$ y $y = 7$, ¿cuál es el valor de z cuando $x = 4.9$ y $y = 7.2$?
2. Encuentre la ecuación de la función lineal $z = c + mx + ny$ cuya gráfica contiene los puntos (0, 0, 0), (0, 2, –1) y (–3, 0, –4).
3. Encuentre la función lineal cuya gráfica es el plano que pasa por los puntos (4, 0, 0), (0, 9, 0) y (0, 0, 2).
4. Encuentre una ecuación para el plano que contiene la recta en el plano xy donde $y = 1$, y la recta en el plano xz donde $z = 2$.
5. Encuentre la ecuación de la función lineal $z = c + mx + ny$ cuya gráfica corta al plano xz en la recta $z = 3x + 4$ y al plano yz en la recta $z = y + 4$.
6. Encuentre la función lineal $z = c + mx + ny$ cuya gráfica corta al plano xy en la recta $y = 3x + 4$ y contiene el punto (0, 0, 5).
7. ¿Es lineal la función representada en la tabla 11.11? Explique las razones de su respuesta.

TABLA 11.11

$u \setminus v$	1.1	1.2	1.3	1.4
3.2	11.06	12.06	13.07	14.07
3.4	11.75	12.82	13.89	14.95
3.6	12.44	13.57	13.89	14.95
3.8	13.13	14.33	15.52	16.71
4.0	13.82	15.08	16.34	17.59

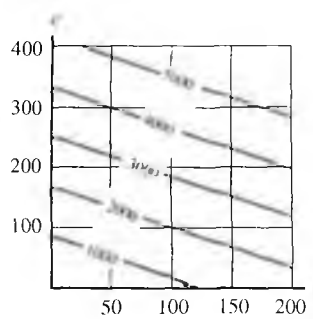


Figura 11.76

8. Una tienda de descuento vende discos compactos a un precio y casetes a otro precio. La figura 11.76 muestra los ingresos (en dólares) de la tienda en función del número, t, de casetes y el número, c, de discos compactos que vende. ¿Cuál es el precio de las casetes? y ¿cuál el de los discos compactos?

Para los problemas 9 y 10, encuentre ecuaciones para las funciones lineales con las tablas proporcionadas.

9.

$x \setminus y$	−1	0	1	2
0	1.5	1	0.5	0
1	3.5	3	2.5	2
2	5.5	5	4.5	4
3	7.5	7	6.5	6

10.

$x \setminus y$	10	20	30	40
100	3	6	9	12
200	2	5	8	11
300	1	4	7	10
400	0	3	6	9

Los problemas 11 y 12 contienen, cada uno, una tabla parcial de valores para una función lineal. Llene los espacios en blanco.

11.

$x \setminus y$	0.0	1.0
0.0		1.0
2.0	3.0	5.0

12.

$x \setminus y$	−1.0	0.0	1.0
2.0	4.0		
3.0		3.0	5.0

Para los problemas 13 y 14, encuentre ecuaciones para las funciones lineales con los diagramas de contorno dados.

13.

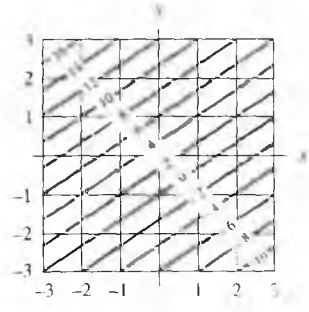


Figura 11.77

14.

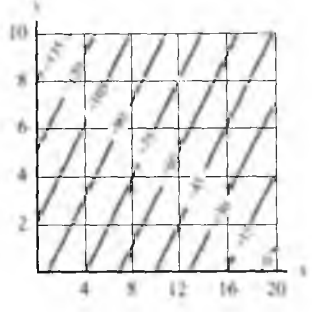


Figura 11.78

11.6 FI

Es difícil dibujar a mano un plano que sea la gráfica de una función lineal. Un método que funciona si las intersecciones x, y y z de la gráfica son positivas consiste en trazar las intersecciones y unirlas mediante un triángulo, como se observa en la figura 11.79; esto muestra la parte de la gráfica del octante donde $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Si las intersecciones no son todas positivas, el mismo método funciona si los ejes x, y y z se dibujan desde una perspectiva diferente. Utilice este método para trazar las gráficas de las funciones lineales de los problemas 15, 16 y 17.

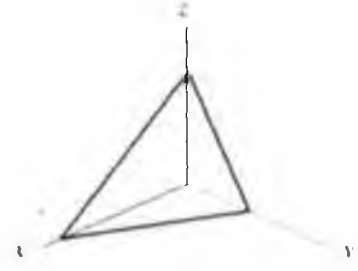


Figura 11.79 Gráfica de una función lineal con intersecciones x, y y z positivas.

15. $z = 6 - 2x - 3y$ 16. $z = 4 + x - 2y$ 17. $z = 2 - 2x + y$

18. Un fabricante elabora dos productos con dos materias primas. Sean q_1 y q_2 las cantidades vendidas de los dos productos, p_1 y p_2 sus precios, y m_1 y m_2 las cantidades compradas de las dos materias primas. De las siguientes funciones, ¿cuáles se espera que sean lineales y por qué? En cada caso, suponga que todas las variables, excepto las señaladas, se mantienen fijas.
    a) Gasto en materias primas como una función de m_1 y m_2.
    b) Ingreso como una función de q_1 y q_2.
    c) Ingreso como una función de p_1 y q_2.

19. La oficina de inscripciones de una universidad utiliza la siguiente ecuación lineal para pronosticar el promedio de calificaciones de un estudiante de nuevo ingreso:

$$z = 0.003x + 0.8y - 4,$$

donde z es el promedio de calificación pronosticado (GPA, por sus siglas en inglés) en una escala de 0 a 4.3, x la suma de las pruebas de aptitud escolar (SAT, por sus siglas en inglés) en matemáticas y expresión verbal, en una escala de 400 a 1600, y y el GPA de preparatoria del estudiante, en una escala de 0 a 4.3. La universidad admite estudiantes cuyo GPA pronosticado sea por lo menos de 2.3.
    a) ¿Será admitido un estudiante con SAT de 1050 y GPA de 3.0?
    b) ¿Será admitido todo estudiante con SAT de 1600?
    c) ¿Será admitido todo estudiante con GPA de 4.3?
    d) Dibuje un diagrama de contorno para la z del GPA pronosticado con $400 \le x \le 1600$ y $0 \le y \le 4.3$. Sombree los puntos correspondientes a estudiantes que serán admitidos.
    e) ¿Qué es más importante, otros 100 puntos en el SAT u otro 0.5 en el GPA de preparatoria?

20. Sea f la función lineal $f(x, y) = c + mx + ny$, donde c, m y n son constantes y $n \neq 0$.
    a) Demuestre que todos los contornos de f son rectas de pendiente $-m/n$.
    b) Demuestre que, para toda x y y

$$f(x + n, y - m) = f(x, y)$$

    c) Explique la relación entre los incisos a y b.

11.6 FUNCIONES DE MÁS DE DOS VARIABLES

En cálculo pueden aparecer funciones de cualquier número de variables. La densidad de la materia del universo es una función de tres variables, puesto que se necesitan tres números para especificar un punto en el espacio. Si deseamos estudiar la evolución de esta densidad con el tiempo, necesitamos agregar la cuarta variable, el tiempo. Se debe tener capacidad para aplicar el cálculo a funciones de un número arbitrario de variables.

El principal problema con las funciones de más de dos variables es la dificultad para visualizarlas. La gráfica de una función de una variable es una curva en el espacio bidimensional, la gráfica de una función de dos variables es una superficie en el espacio tridimensional, de manera que la gráfica de una función de tres variables sería un sólido en el espacio cuatridimensional. No se puede visualizar fácilmente el espacio cuatridimensional, o cualquier otro espacio de dimensión más alta y, por lo tanto, no utilizaremos las gráficas de funciones de tres o más variables.

Por otra parte, la idea de hacer secciones transversales de una función al conservar fija una variable nos permite representar una función de tres variables. También es posible obtener diagramas de contorno para estas funciones, sólo que ahora los contornos son superficies en el espacio tridimensional.

Representación de una función de tres variables usando diagramas de contorno

Una manera de analizar una función de tres variables, $f(x, y, z)$, es examinar secciones transversales con una variable fija. Supongamos que se conserva z fija y veamos f como una función de las dos variables restantes, x y y. Para cada valor fijo, $z = c$, representamos la función de dos variables $f(x, y, c)$ por un diagrama de contorno. Conforme c varía, se obtiene todo un conjunto de diagramas de contorno.

Ejemplo 1 Un estanque mide 30 metros de profundidad, 200 metros de diámetro y está infestado de algas. Suponer que la densidad de las algas en el punto z metros bajo la superficie, x metros al este y y metros al norte del centro de la superficie del estanque se calcula mediante la fórmula

$$f(x, y, z) = \frac{1}{10}\left(50 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)(30 - z),$$

donde la densidad se mide en gm/m^3. Dibujar diagramas de contorno para f en la superficie del estanque y a una profundidad de 10 m. Describir verbalmente cómo varía la densidad de las algas con la profundidad y la distancia desde el centro del estanque.

Solución En la superficie del estanque, $z = 0$, por lo que la fórmula para el corte $z = 0$ es

$$f(x, y, 0) = \frac{1}{10}\left(50 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)(30 - 0) = 150 + 3\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Observe que ahora tenemos una función de dos variables. Los contornos de esta función son círculos, porque $f(x, y, 0)$ es constante cuando $\sqrt{x^2 + y^2}$ es constante. El diagrama de contorno se muestra en la figura 11.80.

En la profundidad de $z = 10$, se tiene

$$f(x, y, 10) = \frac{1}{10}\left(50 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)(30 - 10) = 100 + 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

El diagrama de contorno para la sección transversal $z = 10$ se muestra en la figura 11.81. Si se comparan los dos diagramas de contorno vemos que hay más algas cerca de la superficie que en agua más profunda del estanque, y que hay más algas cerca de la orilla que en el centro en el estanque.

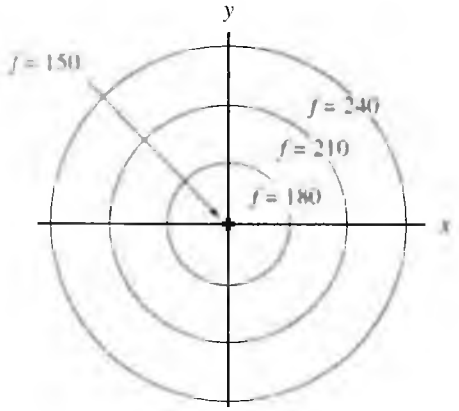


Figura 11.80 Densidad de algas en el estanque en la superficie: diagrama de contorno para $z = 0$.

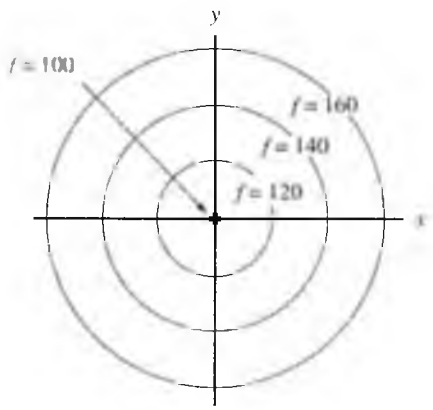


Figura 11.81 Densidad de algas en el estanque 10 metros bajo la superficie: diagrama de contorno para $z = 10$.

Para pronosticar las condiciones atmosféricas es importante conocer la presión barométrica y la temperatura, tanto en la superficie de la tierra como en la atmósfera. En la televisión podemos oír hablar de un sistema de baja presión "superficial" o de un sistema de baja presión de "alto nivel" (los mínimos de alto nivel afectan la corriente de chorro). Los mapas de superficie y de alto nivel estudiados por meteorólogos son diagramas de contorno de diferentes altitudes de la función de presión o de temperatura. Estos mapas son semejantes a los diagramas de contorno de densidad de las algas del ejemplo anterior.

Representación de una función de tres variables usando tablas

En el ejemplo previo vimos secciones transversales de una función de tres variables $f(x, y, z)$ como diagramas de contorno de una función de dos variables. También podemos ver las secciones transversales como tablas de valores.

Ejemplo 2 En la sección 11.1, el consumo de carne de res como función del precio, p, de esta carne y el ingreso familiar, I, se indicó en una tabla de valores. De hecho, el consumo de carne de las familias depende también de muchos otros aspectos, por ejemplo los precios de productos competidores. Veamos el consumo, C, de carne de res como función del precio, q, de una carne competidora, por ejemplo la de pollo, así como del precio de la carne de res y del ingreso familiar. Esto es, $C = f(I, p, q)$. Esta función puede representarse mediante un conjunto de tablas, una para cada valor diferente del precio q de la carne de pollo. Las tablas 11.12 y 11.13 muestran dos secciones transversales diferentes de la función consumo f con q fija. Explicar cómo están relacionadas las dos tablas.

TABLA 11.12 *Consumo de carne de res cuando el precio del pollo es* $q = 1.50$

I \ p	3.00	3.50	4.00
20	2.65	2.59	2.51
60	5.11	5.00	4.97
100	5.80	5.77	5.60

TABLA 11.13 *Consumo de carne de res cuando el precio del pollo es* $q = 2.00$

I \ p	3.00	3.50	4.00
20	2.75	2.75	2.71
60	5.21	5.12	5.11
100	5.80	5.77	5.60

Solución La comparación de tablas muestra que para familias con altos ingresos (por ejemplo $I = 100$), los cambios en el precio de la carne de pollo tienen poca repercusión en la cantidad de carne de res consumida (porque el precio no es un factor en su compra), pero para ingresos bajos (por ejemplo $I = 20$), un aumento en el precio del pollo (de $q = 1.50$ a $q = 2.00$) hace que las familias gasten más en carne de res.

Representación de una función de tres variables mediante una familia de superficies de nivel

Una función de dos variables, $f(x, y)$, puede representarse mediante una familia de curvas de nivel de la forma $f(x, y) = c$ para varios valores de la constante, c.

> Una función de tres variables, $f(x, y, z)$, puede representarse mediante una familia de superficies de la forma $f(x, y, z) = c$, cada una de las cuales se llama *superficie de nivel*.

Ejemplo 3 Suponer que la temperatura, en °C, en un punto (x, y, z) está dada por $T = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. ¿Qué aspecto tienen las superficies de nivel de la función f? y ¿qué significan en términos de temperatura?

Solución La superficie de nivel correspondiente a $T = 100$ es el conjunto de todos los puntos donde la temperatura es 100°C, es decir, donde $f(x, y, z) = 100$, así que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 100.$$

Esta es la ecuación de una esfera de radio 10, con centro en el origen. De igual manera, la superficie de nivel correspondiente a $T = 200$ es la esfera con radio $\sqrt{200}$. Las superficies de nivel son pues esferas concéntricas. La temperatura es constante en cada una. Se puede ver la distribución de temperatura como un conjunto de esferas anidadas, como capas concéntricas de una cebolla, cada una marcada con una temperatura diferente, comenzando desde bajas temperaturas en el centro y haciéndose más calientes conforme nos alejamos (véase Fig. 11.82). Las superficies de nivel se acercan más a medida que aumenta la distancia del origen, porque la temperatura crece en forma más rápida cuanto más lejos nos encontremos del origen.

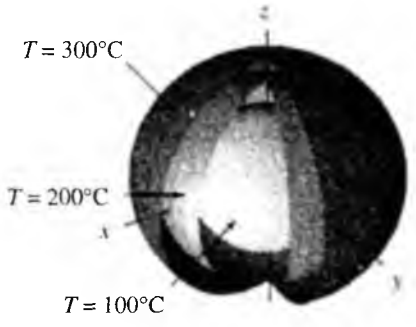


Figura 11.82 Superficies de nivel de $T = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, cada una a temperatura constante.

En general, las superficies de nivel de una función se superponen de algún modo, por lo cual con frecuencia es difícil dibujarlas. Suelen emplearse cortes para mostrar las superficies interiores, como se ve en la figura 11.82.

Ejemplo 4 ¿Qué aspecto tienen las superficies de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ y $g(x, y, z) = z - y$?

Solución La superficie de nivel de f correspondiente a la constante c es la superficie formada por todos los puntos que satisfacen la ecuación

$$x^2 + y^2 = c.$$

Como no hay coordenada z en la ecuación, z puede tomar cualquier valor. Para $c > 0$, se trata un cilindro circular de radio $\sqrt{c}$ alrededor del eje z. Las superficies de nivel son cilindros concéntricos; los angostos, cercanos al eje z, son aquéllos donde f tiene valores pequeños, y los anchos donde alcanza valores grandes (véase Fig. 11.83). La superficie de nivel de g correspondiente a la constante c es

$$z - y = c.$$

Esta vez no hay variable x, por lo cual esta superficie es la que se obtiene al tomar cada punto de la línea recta $z - y = c$ del plano yz y hacer que x avance en un sentido y otro. Se obtiene un plano que corta diagonalmente el plano yz; el eje x es paralelo a este plano (véase Fig. 11.84).

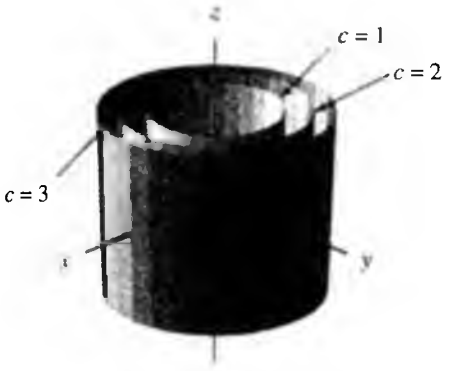


Figura 11.83 Superficies de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

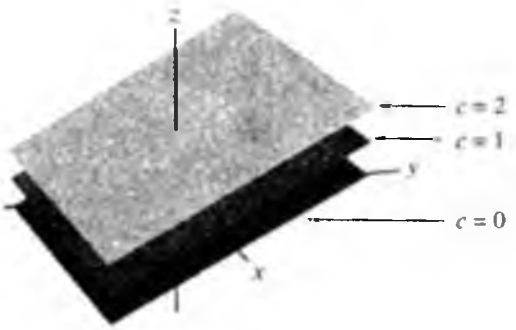


Figura 11.84 Superficies de nivel de $g(x, y, z) = z - y$.

Ejemplo 5 ¿Qué aspecto tienen las superficies de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$?

Solución De la sección 11.4 recordemos que la función cuadrática de dos variables $g(x, y) = x^2 - y^2$ tiene una gráfica en forma de silla de montar y tres tipos de contorno. La ecuación de contorno $x^2 - y^2 = c$ da una hipérbola que abre de derecha a izquierda cuando $c > 0$, una hipérbola que abre de arriba hacia abajo cuando $c < 0$, y un par de rectas que se cortan entre sí cuando $c = 0$. Del mismo modo, la función cuadrática de tres variables $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ tiene tres tipos de superficies de nivel, lo cual depende del valor de c en la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = c$. Suponga que $c > 0$, por ejemplo $c = 1$. Reescriba la ecuación como $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ y piense lo que pasa al cortar la superficie perpendicular al eje x al mantener z fija. El resultado es un círculo, $x^2 + y^2$ = constante, de radio por lo menos de 1 (porque la constante $z^2 + 1 \geq 1$). Los círculos se vuelven más grandes a medida que z crece. Si en lugar de ello tomamos el corte de $x = 0$, obtendríamos la hipérbola $y^2 - z^2 = 1$. El resultado se muestra en la figura 11.88, con $a = b = c = 1$.

En lugar de esto supongamos que $c < 0$, por ejemplo $c = -1$. Entonces las secciones transversales horizontales de $x^2 + y^2 = z^2 - 1$ son otra vez círculos excepto que los radios se contraen a 0 en $z = \pm 1$ y entre $z = -1$ y $z = 1$ no hay secciones transversales en absoluto. El resultado se muestra en la figura 11.89 con $a = b = c = 1$.

Cuando $c = 0$ se obtiene la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$. De nueva cuenta, las secciones transversales horizontales son círculos, esta vez el radio se reduce a exactamente 0 cuando $z = 0$. La superficie resultante, ilustrada en la figura 11.90 con $a = b = c = 1$, es el cono $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ estudiada en la sección 11.4, junto con el cono inferior $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

Catálogo de superficies

Para referencia posterior, he aquí un catálogo de superficies.



Figura 11.85 Paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

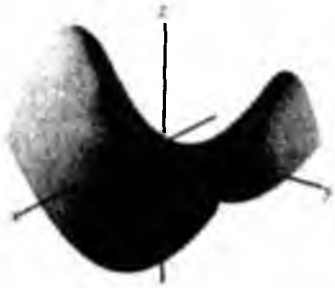


Figura 11.86 Paraboloide hiperbólico $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



Figura 11.87 Elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



Figura 11.88 Hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

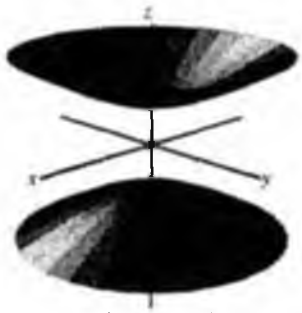


Figura 11.89 Hiperboloide de dos hojas $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$



Figura 11.90 Cono $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

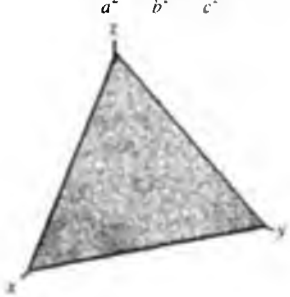


Figura 11.91 Plano $ax + by + cz = d$.



Figura 11.92 Superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = a^2$.



Figura 11.93 Cilindro parabólico $y = ax^2$.

(Estas figuras se consideran como ecuaciones de tres variables x, y y z.)

Cómo es que las superficies pueden representar funciones de dos variables y funciones de tres variables

Quizá usted ya observó que se han empleado superficies para representar funciones en dos maneras distintas. Primero, empleamos *una sola* superficie para representar una función de dos variables $z = f(x, y)$. En segundo lugar, empleamos una *familia* de superficies de nivel para representar una función de tres variables $w = F(x, y, z)$. Estas superficies de nivel tienen ecuación $F(x, y, z) = c$.

¿Cuál es la relación entre estos dos usos de superficies? Por ejemplo, considere la ecuación

$$z = x^2 + y^2 + 3.$$

Defina

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3 - z$$

Los puntos que satisfacen $z = x^2 + y^2 + 3$ también satisfacen $x^2 + y^2 + 3 - z = 0$. Por lo tanto, la superficie $z = x^2 + y^2 + 3$ es la misma que la superficie de nivel

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3 - z = 0.$$

Por lo tanto, se tiene el siguiente resultado:

> Una sola superficie, que representa una función de dos variables $z = f(x, y)$, siempre puede considerarse como miembro de la familia de superficies de nivel que representan una función de tres variables $G(x, y, z) = f(x, y) - z$. La gráfica de $z = f(x, y)$ es la superficie de nivel $G = 0$.

Por el contrario, un solo miembro de una familia de superficies de nivel puede considerarse como la gráfica de una función de la forma $z = f(x, y)$ si es posible despejar z. Por ejemplo, si $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ entonces un miembro de la familia de superficies de nivel es la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Esta ecuación define z implícitamente como función de x y y. Al resolverla se obtienen las funciones

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{y} \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

La gráfica de la primera función es la mitad superior de la esfera y la gráfica de la segunda función la mitad inferior.

Problemas para la sección 11.6

1. Por una esquina de una piscina rectangular entra agua caliente a nivel de la superficie de la misma. Trace posibles diagramas de contorno para encontrar la temperatura de la piscina en la superficie y la temperatura un metro bajo la superficie.
2. La figura 11.94 muestra diagramas de contorno de temperatura en grados Celsius en un cuarto a tres horas diferentes. Describa la circulación de calor en el cuarto. ¿Cuál podría ser la causa de esto?

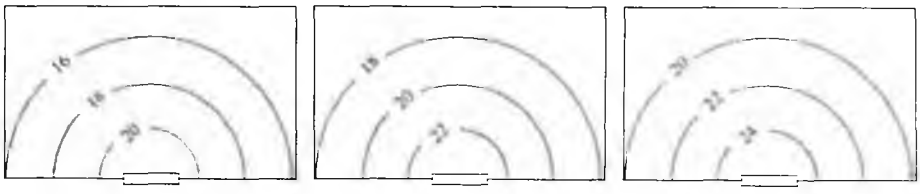


Figura 11.94

3. Relacione las siguientes funciones con las superficies de nivel de la figura 11.95.
   a) $f(x, y, z) = y^2 + z^2$ b) $h(x, y, z) = x^2 + z^2$

(I)



(II)



4. Describa verbalmente las superficies de nivel de $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(x + y + z)$.
5. Dibuje diagramas de contorno para tres secciones transversales diferentes con t fija, de la función
$$f(x, y, t) = \cos t \cos \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le \pi/2.$$
6. La altura (en metros) del agua sobre el fondo de un estanque en el tiempo t está dada por la función $h(x, y, t) = 20 + \operatorname{sen}(x + y - t)$, donde x y y se miden horizontalmente con el eje positivo y al norte y el eje positivo x al este, y donde t está en segundos. Con ayuda de los diagramas de contorno para diferentes valores de t describa el movimiento de la superficie del agua en el estanque.
7. Describa verbalmente las superficies de nivel de $g(x, y, z) = e^{-(x + y + z)}$

En los problemas 8 y 9 obtenga la ecuación de la función lineal $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$ que tiene los valores dados para las secciones transversales con $z = 1$ y $z = 4$.

Sección transversal con $z = 1$

x \ y	3	5
0	4	8
1		

Sección transversal con $z = 4$

x \ y	3	5
0		14
1		9

Sección transversal con $z = 1$

x \ y	3	5
0	4	
1		8

Sección transversal con $z = 4$

x \ y	3	5
0		
1	14	9

10. En los problemas 8 y 9, suponga que las dos tablas tuvieran sólo tres valores anotados. ¿Podría determinarse f ? Suponga que las dos tablas tuvieran cinco valores. ¿Podría siempre determinarse f?
11. Encuentre la función lineal $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$ que tiene los diagramas de contorno para las secciones transversales con $z = 3$ y $z = 4$ mostradas en las figuras 11.96 y 11.97.

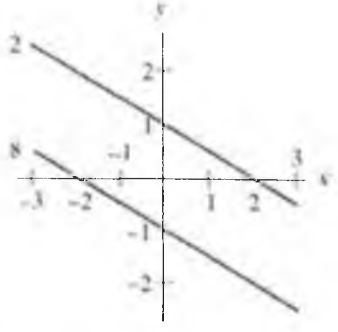


Figura 11.96 Corte con $z = 3$.

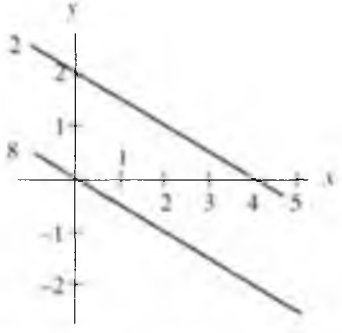


Figura 11.97 Corte con $z = 4$.

12. ¿Qué aspecto tienen las superficies de nivel de $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$? [Sugerencia: Utilice secciones transversales con y constante en vez de secciones transversales con z constante.]

Utilice el catálogo de superficies para identificar las superficies de los problemas del 13 al 19.

13. $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$
14. $-x^2 + y^2 - z^2 = 0$
15. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
16. $x^2 + z^2 = 1$
17. $x^2 + y^2/4 + z^2 = 1$
18. $x + y = 1$
19. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$

20. Describa la superficie $x^2 + y^2 = 2 + \text{sen } z)^2$. En general, si $f(z) \geq 0$ para toda z, describa la superficie $x^2 + y^2 = (f(z))^2$.

11.7 LÍMITES Y CONTINUIDAD

La pared vertical del monte Half Dome, en el Parque Nacional de Yosemite en California, fue tallada por un glaciar durante la era Glacial (véase Fig. 11.98). La altura del terreno se eleva abruptamente más de 1000 pies si se escala el peñón desde el oeste, en tanto que es posible hacer un ascenso gradual hasta la cima desde el este.

Si consideramos que la función h da la altura del terreno sobre el nivel del mar en términos de la longitud y latitud, entonces h tiene una *discontinuidad* a lo largo de la trayectoria en la base del risco Half Dome. Si se observa el mapa de contorno de la región de la figura 11.99, vemos que en la mayoría de los lugares un pequeño cambio de posición resulta en un pequeño cambio en altura, excepto cerca del risco. Ahí, no importa qué tan pequeño sea el paso que demos, se obtiene un gran cambio en altura. (Se puede ver lo compactados que son los contornos cerca del risco; algunos terminan abruptamente a lo largo de la discontinuidad.)

Esta característica geológica ilustra las ideas de continuidad y discontinuidad. En términos generales, se dice que una función es continua en un punto si sus valores en lugares cerca del punto son cercanos al valor en ese punto. Si éste no es el caso, se dice que la función es *discontinua*.

La propiedad de continuidad es aquella que, hablando prácticamente, solemos suponer de las funciones que estudiamos. De manera informal, esperamos (excepto en circunstancias especiales) que los valores de una función no cambien de manera drástica cuando se realicen pequeños cambios a las variables de entrada. Siempre que se haga un modelo de una función de una variable mediante una curva ininterrumpida, estamos haciendo esta suposición. Aun cuando las funciones nos sean presentadas como tablas de datos, por lo general se supone que los valores faltantes de la función en los puntos intermedios son cercanos a los medidos.



Figura 11.98 El monte Half Dome en el Parque Nacional de Yosemite.



Figura 11.99 Mapa de contorno del Half Dome.

En esta sección estudiaremos límites y continuidad de manera un poco más formal en el contexto de funciones de varias variables. Por simplicidad, estudiaremos estos conceptos para funciones de dos variables, pero nuestro análisis se puede adaptar a funciones de tres o más variables.

Se puede demostrar que las sumas, productos y composiciones de funciones continuas son continuas, en tanto que el cociente de dos funciones continuas es continuo siempre que la función del denominador sea diferente de cero. Por lo tanto, cada una de las funciones

$$\cos(x^2y), \quad \ln(x^2 + y^2), \quad \frac{e^{xy}}{x+y}, \quad \ln(\operatorname{sen}(x^2 + y^2))$$

es continua en todos los puntos (x, y) donde esté definida.

Al igual que para funciones de una variable, la gráfica de una función continua sobre un dominio no interrumpido tampoco se interrumpe, es decir, la superficie no tiene huecos o rasgaduras.

Ejemplo 1 De las figuras 11.100 a la 11.103, ¿cuál de las siguientes funciones parece ser continua en (0, 0)?

$$\text{(a) } f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases} \qquad \text{(b) } g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

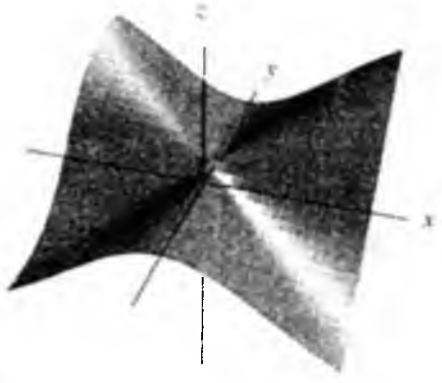


Figura 11.100 Gráfica de $z = x^2 y / (x^2 + y^2)$.

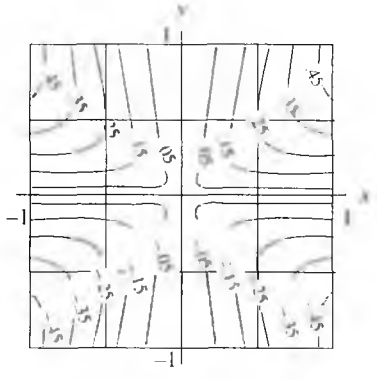


Figura 11.101 Diagrama de contorno de $z = x^2 y / (x^2 + y^2)$.



Figura 11.102 Gráfica de $z = x^2 / (x^2 + y^2)$.

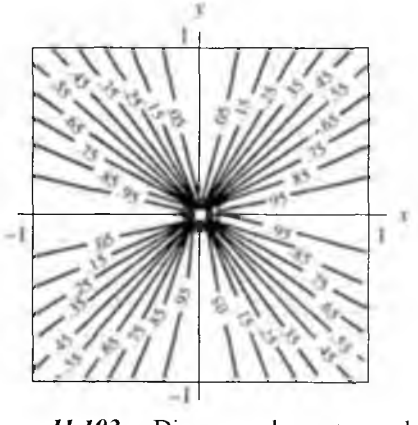


Figura 11.103 Diagrama de contorno de $z = x^2 / (x^2 + y^2)$.

Solución a) La
cu
es

de
b) La
co
ele
ca
an

El
función
sitamos
definida
pero sí p

La fu

si la
punto

Def
de una v

Una f

Una f

Por l
$\lim$
b) pero n
Ahor
continua

Ejemplo 2 Sean f y
como sigu

Utilizar la

Solución a) La gráfica y diagrama de contorno de f de las figuras 11.100 y 11.101 sugieren que f es cercana a 0 cuando (x, y) es cercano a (0, 0). Esto es, las figuras sugieren que f es continua en el punto (0, 0); es evidente que la gráfica no tiene huecos o rasgaduras ahí.

Sin embargo, las figuras no pueden señalarnos con seguridad si f es continua. Para cerciorarnos, debemos investigar analíticamente el límite, como se hizo en el ejemplo 2(a) de la página 56.

b) La gráfica de g y su contorno cerca de (0, 0) de la figura 11.102 y 11.103 sugieren que g se comporta de manera diferente de f: los contornos de g parecen "chocar" en el origen y la gráfica se eleva rápidamente de 0 a 1 cerca de (0, 0). Ligeros cambios en (x, y) cerca de (0, 0) pueden producir cambios grandes en g, por lo cual esperamos que g no sea continua en el punto (0, 0). De nuevo, un análisis más preciso aparece en el ejemplo 2(b) de la página 56.

El ejemplo previo sugiere que la continuidad *en* un punto depende del comportamiento de una función *cerca* del punto. Para estudiar de modo más formal el comportamiento cerca de un punto necesitamos definir el límite de una función de dos variables. Supongamos que $f(x, y)$ es una función definida en un conjunto en el espacio bidimensional que no necesariamente contiene el punto (a, b), pero sí puntos (x, y) arbitrariamente cerca de (a, b); supongamos que L es un número.

La función f tiene un **límite** L en el punto (a, b), escrito

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L,$$

si la diferencia $|f(x, y) - L|$ es tan pequeña como se quiera siempre que la distancia desde el punto (x, y) al punto (a, b) sea suficientemente pequeña, pero no cero.

Definimos la continuidad para funciones de dos variables de la misma manera que para funciones de una variable:

Una función f es **continua en el punto** (a, b) si

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Una función es **continua** si es continua en cada punto de su dominio.

Por lo tanto, si f es continua en el punto (a, b), entonces f debe estar definida en (a, b) y el límite, $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$, debe existir y ser igual al valor $f(a, b)$. Si una función está definida en un punto (a, b) pero no es continua ahí, entonces decimos que f es discontinua en (a, b).

Ahora aplicamos la definición de continuidad a las funciones del ejemplo 1, demostrando que f es continua en (0, 0) y que g es discontinua en (0, 0).

Ejemplo 2 Sean f y g las funciones definidas en todas partes en el espacio bidimensional, excepto en el origen, como sigue

$$\text{a)}\ f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \qquad \text{b)}\ g(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

Utilizar la definición de límite para demostrar que $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0$ $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} g(x, y)$ no existe.

Solución a) La gráfica y el diagrama de contorno de f sugieren ambas que $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0$. Para usar la definición de límite, debemos calcular $|f(x, y) - L|$ con $L = 0$:

$$\left|f(x, y) - L\right| = \left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0\right| = \left|\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right| |y| \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ahora $\sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia de (x, y) a $(0, 0)$. Por lo tanto, para hacer $|f(x, y) - 0| < 0.001$, por ejemplo, sólo necesitamos pedir que (x, y) esté a menos de 0.001 de $(0, 0)$. Más generalmente, para cualquier número positivo u, no importa lo pequeño que sea, estamos seguros que $|f(x, y) - 0| < u$ siempre que (x, y) no esté más lejos que u de $(0, 0)$. Esto es lo que queremos decir al afirmar que la diferencia $|f(x, y) - 0|$ se puede hacer tan pequeña como se desee escogiendo una distancia suficientemente pequeña. Por lo tanto, se puede concluir que

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Observe que la función f tiene un límite en el punto $(0, 0)$ aun cuando f no estaba definida en $(0, 0)$. Para hacer f continua en $(0, 0)$ debemos definir que su valor ahí sea 0, como hicimos en el ejemplo 1.

b) Aun cuando la fórmula que define la función g parece similar a la de f, vimos en el ejemplo 1 que el comportamiento de g cerca del origen es muy diferente. Si consideramos los puntos $(x, 0)$ a lo largo del eje x, cerca de $(0, 0)$, entonces los valores $g(x, 0)$ son iguales a 1, mientras que si consideramos los puntos $(0, y)$ a lo largo del eje y cerca de $(0, 0)$, entonces los valores $g(0, y)$ son iguales a 0. Por lo tanto, dentro de cualquier disco (no importa lo pequeño que sea) con centro en el origen, hay puntos donde $g = 0$ y puntos donde $g = 1$. Por lo tanto, el límite $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} g(x, y)$ no existe.

Mientras que las nociones de límite y continuidad parecen formalmente lo mismo para funciones de una y dos variables, son un poco más sutiles en el caso de varias variables. La razón de esto es que en la recta (espacio unidimensional) podemos aproximarnos a un punto desde dos direcciones solamente (izquierda o derecha), pero en el espacio bidimensional hay un número infinito de formas de aproximarse a un punto dado.

Problemas para la sección 11.7

1. Demuestre que la función f no tiene un límite en $(0, 0)$ examinando los límites de f conforme $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de la curva $y = kx^2$ para valores diferentes de k. La función está dada por

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y}, \qquad x^2 + y \neq 0.$$

2. Demuestre que la función f no tiene un límite en $(0, 0)$ examinando los límites de f conforme $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de la recta $y = x$ y a lo largo de la parábola $y = x^2$. La función está dada por

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \qquad (x, y) \neq (0, 0).$$

3. Considere la siguiente función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy\,(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Dibuje con computadora la gráfica y el diagrama de contorno de f.
b) ¿Sugieren sus respuestas al inciso a) que f es continua en (0, 0)? Explique su respuesta.

4. Considere la función f, cuya gráfica y diagrama de contorno están en las figuras 11.104 y 11.105, y que está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Demuestre que $f(0, y)$ y $f(x, 0)$ son cada una funciones continuas de una variable.
b) Demuestre que los rayos que emanan del origen están contenidos en contornos de f.
c) ¿f es continua en (0, 0)?

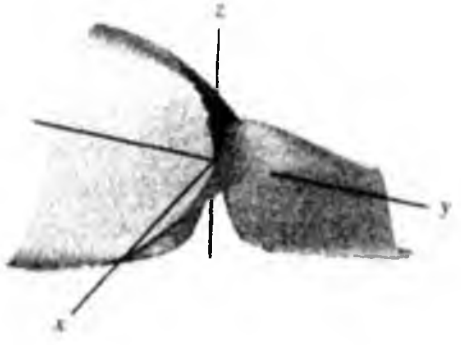


Figura 11.104 Gráfica de $z = xy / (x^2 + y^2)$.

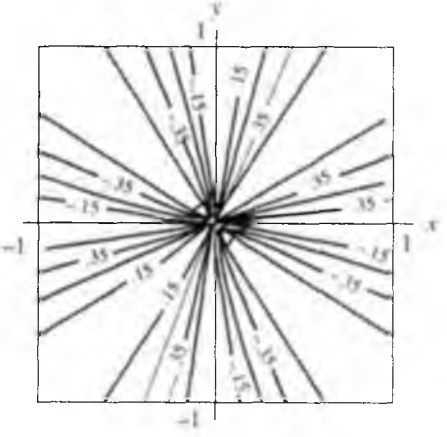


Figura 11.105 Diagrama de contorno de $z = xy / (x^2 + y^2)$.

Para los problemas del 5 al 9 calcule los límites de las funciones $f(x, y)$ a medida que $(x, y) \to (0, 0)$. Puede suponerse que las funciones polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son continuas.

5. $f(x, y) = x^2 + y^2$

6. $f(x, y) = e^{x-y}$

7. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

8. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{(\operatorname{sen} y) + 2}$

9. $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ [Sugerencia: puede suponerse $\lim_{t \to 0} (\operatorname{sen} t) / t = 1$.]

Para las funciones de los problemas del 10 al 12, demuestre que $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ no existe.

10. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$, $x \neq y$

11. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

12. $f(x, y) = \dfrac{xy}{|xy|}$, $x \neq 0$ y $y \neq 0$

13. Demuestre que los contornos de la función g definida en el ejemplo 1(b) de la página 54 son rayos que emanan del origen. Encuentre la pendiente del contorno $g(x, y) = c$.

14. Explique por qué la siguiente función no es continua a lo largo de la recta $y = 0$.

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x, & y \leq 0, \\ -2, & y < 0, \end{cases}$$

En los problemas 15 y 16, determine si hay un valor para c que haga que la función sea continua en todas partes. Si es así, encuéntrelo; si no, explique por qué.

15. $f(x, y) = \begin{cases} c + y, & x \leq 3, \\ 5 - y, & x > 3, \end{cases}$

16. $f(x, y) = \begin{cases} c + y, & x \leq 3, \\ 5 - x, & x > 3, \end{cases}$

PROBLEMAS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO ONCE

1. Describa el conjunto de puntos cuya coordenada x es 2 y cuya coordenada y es 1.
2. Encuentre el centro y radio de la esfera con ecuación $x^2 + 4x + y^2 - 6y + z^2 + 12z = 0$.
3. Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos (0, 0, 2), (0, 3, 0), (5, 0, 0).
4. Encuentre una función lineal cuya gráfica sea el plano que corta al plano xy a lo largo de la recta $y = 2x + 2$ y contiene el punto (1, 2, 2).
5. Considere la función $f(r, h) = \pi r^2 h$ que da el volumen de un cilindro de radio r y altura h. Trace las secciones transversales de f, primero conserve h fija y luego conserve r fija.
6. Considere la función $z = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$.

   a) Trace las curvas de nivel de esta función.
   b) Trace una sección transversal de la superficie $z = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$ en el plano que contiene los ejes x y z. Ponga unidades en sus ejes.
   c) Trace la sección transversal de la superficie $z = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$ del plano que contiene el eje z y la recta $y = x$ del plano xy.

Para los problemas del 7 al 10, trace con computadora o calculadora la gráfica de una función con las formas dadas. En su trazo incluya los ejes y la ecuación empleados para generarla.

7. Un cono de sección transversal circular que abre hacia abajo y con su vértice en el origen.
8. Un tazón que abre hacia arriba y tiene su vértice en 5 en el eje z.
9. Un plano que tiene sus intersecciones x, y y z todas positivas.
10. Un cilindro parabólico que abre hacia arriba a lo largo de la recta $y = x$ del plano xy.

Diga si los enunciados de los problemas del 11 al 15 son necesariamente ciertos, podrían ser ciertos o no pueden ser ciertos. La función $z = f(x, y)$ está definida en todas partes.

11. Las curvas de nivel correspondientes a $z = 1$ y $z = -1$ se cruzan en el origen.
12. La curva de nivel $z = 1$ consta del círculo $x^2 + y^2 = 2$ y el círculo $x^2 + y^2 = 3$, pero no otros puntos.
13. La curva de nivel $z = 1$ consta de dos rectas que se cortan en el origen.
14. Si $z = e^{-(x^2 + y^2)}$, hay una curva de nivel para todo valor de z.
15. Si $z = e^{-(x^2 + y^2)}$, hay una curva de nivel que pasa por todo punto (x, y).

Para cada una de las funciones de los problemas del 16 al 19, haga una gráfica de contorno en la región $-2 < x < 2$ y $-2 < y < 2$. En cada caso, ¿cuál es la ecuación y la forma de las líneas de contorno?

16. $z = \text{sen } y$ 17. $z = 3x - 5y + 1$ 18. $z = 2x^2 + y^2$ 19. $z = e^{-2x}$

20. Suponga que se encuentra en un cuarto de 30 pies de largo y hay un calentador en un extremo. Por la mañana, el cuarto tiene una temperatura de 65°F. Enciende el calentador, que rápidamente calienta el cuarto a 85°F. Sea $H(x, t)$ la temperatura a x pies del calentador, t minutos después que el calentador se enciende. La figura 11.106 muestra el diagrama de contorno para H. ¿Cuál es la temperatura a 10 pies del calentador 5 minutos después de encenderlo? y ¿10 minutos después de encenderlo?

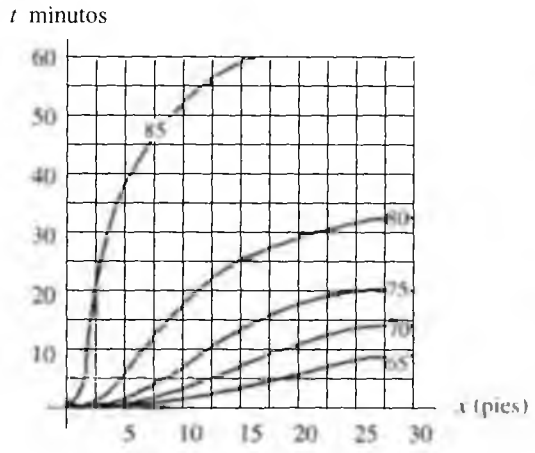


Figura 11.106

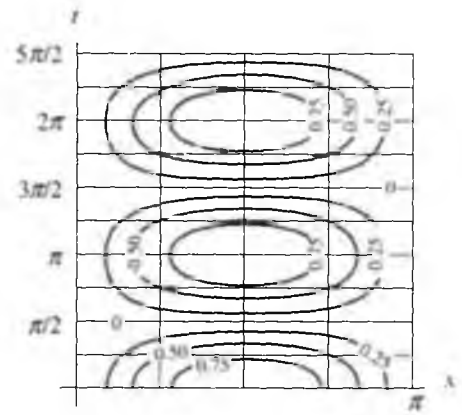


Figura 11.107

21. Utilice el diagrama de contorno de la figura 11.106 para trazar las gráficas de las funciones de una variable $H(x, 5)$ y $H(x, 20)$. Interprete las dos gráficas en términos prácticos, y explique la diferencia entre ellas.

22. La figura 11.107 muestra el diagrama de contorno para la función de cuerda en vibración de la página 8:

$$f(x, t) = \cos t \text{ sen } x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Mediante el diagrama, describa verbalmente las secciones transversales de f con t fija y las secciones transversales de f con x fija. Explique lo que se ve en términos del comportamiento de la cuerda.

Encuentre ecuaciones para las funciones lineales con los diagramas de contorno de los problemas 23 y 24.

23.

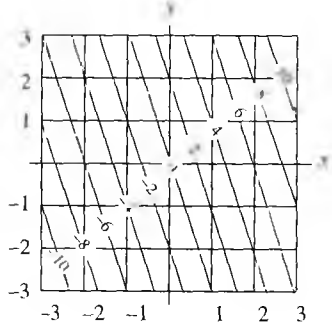


Figura 11.108 Mapa de contorno de $g(x, y)$.

24.

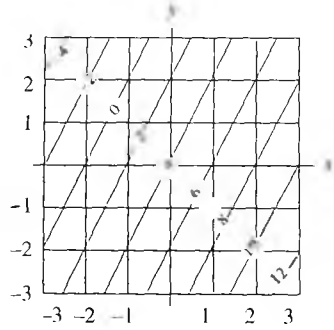


Figura 11.109 Mapa de contorno de $h(x, y)$.

25. La figura 11.110 muestra los contornos de intensidad luminosa como función de la posición y el tiempo en una guía de onda microscópica.

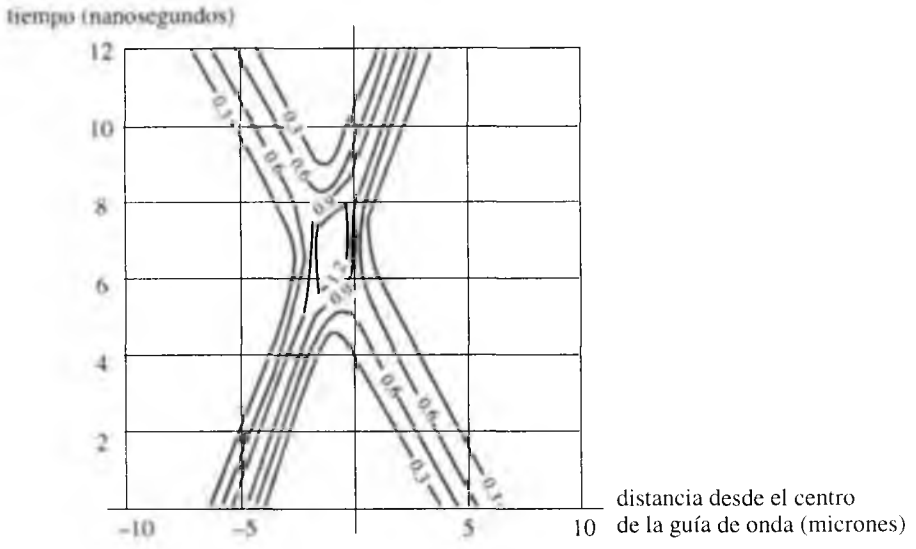


Figura 11.110

a) Dibuje gráficas que muestren la intensidad como función de la posición en los tiempos 0, 2, 4, 6, 8 y 10 nanosegundos.
b) Si pudiera crear una animación que muestre cómo varía la gráfica de intensidad en función de la posición conforme pasa el tiempo, ¿qué aspecto tendría?
c) Dibuje una gráfica de la intensidad en función del tiempo en las posiciones –5, 0 y 5 micrones desde el centro de la guía de onda.
d) Describa lo que hacen los rayos de luz en esta guía de onda.

CAPÍTULO DOCE

UNA HERRAMIENTA FUNDAMENTAL: LOS VECTORES

En el cálculo de una variable se representan cantidades como la velocidad mediante números, pero, para especificar la velocidad de un móvil en el espacio, es necesario precisar con qué rapidez avanza y en qué dirección. En este capítulo se utilizan *vectores* para representar cantidades que tienen dirección y magnitud.

12.1 VECTORES DE DESPLAZAMIENTO

Suponga que un piloto planea un vuelo de Dallas a Pittsburgh. Hay dos datos que debe saber: la distancia por recorrer (para tener combustible suficiente) y en qué dirección volar (para llegar a Pittsburgh). Estas dos cantidades representan el desplazamiento, o *vector de desplazamiento*, entre las dos ciudades.

> El **vector de desplazamiento** de un punto a otro es una flecha con su cola o extremo posterior en el primer punto y su punta en el segundo. La **magnitud** (o longitud) del vector de desplazamiento es la distancia entre los puntos, y está representada por la longitud de la flecha. La **dirección** del vector de desplazamiento es la dirección de la flecha.

La figura 12.1 muestra los vectores de desplazamiento de Dallas a Pittsburgh, de Albuquerque a Oshkosh, y de Los Ángeles a Buffalo, SD. Estos vectores de desplazamiento tienen la misma longitud y la misma dirección. Se dice que los vectores de desplazamiento entre las ciudades correspondientes son iguales, aun cuando no coincidan. En otras palabras

> Los vectores de desplazamiento que apuntan en la misma dirección y tienen la misma magnitud se consideran iguales, aun cuando no coincidan.



Figura 12.1 Vectores de desplazamiento entre ciudades.

Notación y terminología

El vector de desplazamiento es el primer ejemplo de un vector. Los vectores tienen magnitud y dirección; en comparación con ellos, una cantidad especificada sólo por un número, pero sin dirección, se llama *escalar*.[1] Por ejemplo, el tiempo empleado en volar de Dallas a Pittsburgh es una cantidad escalar. El desplazamiento es vector porque se necesita distancia y dirección para especificarlo.

En este libro, los vectores se escriben con una flecha encima, $\vec{v}$ para distinguirlos de los escalares.

Otros libros utilizan una **v** negrita para denotar un vector. Aquí usamos la notación $\vec{PQ}$ para denotar el vector de desplazamiento del punto P al punto Q. La magnitud, o longitud, de un vector $\vec{v}$ se escribe $\|\vec{v}\|$.

[1] Así llamada por W. R. Hamilton porque son simplemente números en la escala de $-\infty$ a ∞

Suma y resta de vectores de desplazamiento

Supongamos que la NASA ordena que un robot en Marte se desplace 75 metros en una dirección y luego 50 metros en otra dirección (véase Fig. 12.2). ¿En dónde termina el robot? Supongamos también que los desplazamientos están representados por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, respectivamente. Entonces la suma $\vec{v} + \vec{w}$ indica la posición final.

La **suma** $\vec{v} + \vec{w}$ de dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es el desplazamiento combinado que resulta de aplicar primero $\vec{v}$ y luego $\vec{w}$ (véase Fig. 12.3). La suma $\vec{w} + \vec{v}$ da el mismo desplazamiento.



Figura 12.2 Suma de desplazamientos de robots en Marte.

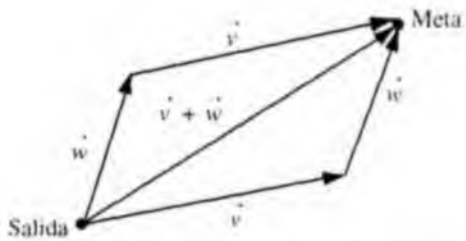


Figura 12.3 La suma $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$.

Supongamos que dos robots empiezan a desplazarse desde el mismo lugar. Uno avanza a lo largo de un vector de desplazamiento $\vec{v}$ y el otro a lo largo del vector de desplazamiento $\vec{w}$. ¿Cuál es el vector de desplazamiento, $\vec{x}$, desde el primer robot al segundo? (véase Fig. 12.4). Como $\vec{v} + \vec{x} = \vec{w}$, definimos que $\vec{x}$ es la diferencia $\vec{v} = \vec{w} - \vec{v}$. En otras palabras $\vec{w} - \vec{v}$ nos lleva de $\vec{v}$ a $\vec{w}$.

La **diferencia**, $\vec{w} - \vec{v}$, es el vector de desplazamiento que cuando se suma a $\vec{v}$, produce $\vec{w}$; esto es, $\vec{w} = \vec{v} + (\vec{w} - \vec{v})$ (véase Fig. 12.4).

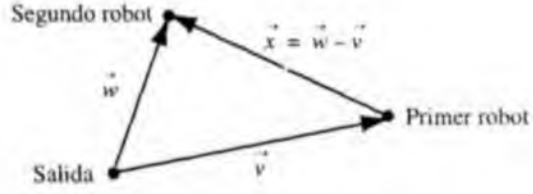


Figura 12.4 La diferencia $\vec{w} - \vec{v}$.

Si el robot termina donde empezó, entonces el vector de desplazamiento total es el *vector cero*, $\vec{0}$. El vector cero no tiene dirección.

El **vector cero**, $\vec{0}$, es un vector de desplazamiento con longitud cero.

Multiplicación de vectores de desplazamiento por un escalar

Si $\vec{v}$ representa un vector de desplazamiento, el vector $2\vec{v}$ representa un desplazamiento dos veces mayor, en la misma dirección que $\vec{v}$. De igual manera, $-2\vec{v}$ representa un desplazamiento del doble de magnitud en dirección contraria (véase Fig. 12.5).

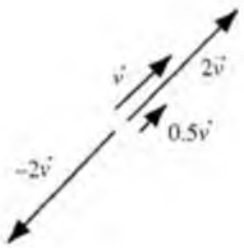


Figura 12.5 Múltiplos escalares del vector $\vec{v}$.

Si λ es un escalar y $\vec{v}$ es un vector de desplazamiento, el **múltiplo escalar de $\vec{v}$ por λ**, escrito $\lambda\vec{v}$, es el vector de desplazamiento con las siguientes propiedades:

- El vector de desplazamiento $\lambda\vec{v}$ es paralelo a $\vec{v}$, apuntando en la misma dirección si $\lambda > 0$, y en la dirección opuesta si $\lambda < 0$.
- La magnitud de $\lambda\vec{v}$ es $|\lambda|$ veces la magnitud de $\vec{v}$, esto es, $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\,\|\vec{v}\|$.

Observe que $|\lambda|$ representa el valor absoluto del escalar λ en tanto que $\|\lambda\vec{v}\|$, la magnitud del vector $\lambda\vec{v}$.

Ejemplo 1 Explicar por qué $\vec{w} - \vec{v} = \vec{w} + (-1)\vec{v}$.

Solución El vector $(-1)\vec{v}$ tiene la misma magnitud de $\vec{v}$, pero apunta en dirección opuesta. La figura 12.6 muestra que el desplazamiento combinado $\vec{w} + (-1)\vec{v}$ es el mismo que el desplazamiento $\vec{w} - \vec{v}$.

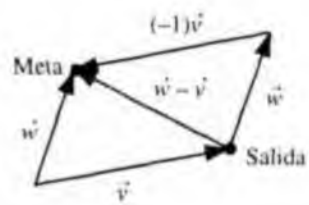


Figura 12.6 Explicación de por qué $\vec{w} - \vec{v} = \vec{w} + (-1)\vec{v}$.

Vectores paralelos

Dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son *paralelos* si uno es un múltiplo escalar del otro, es decir, si $\vec{w} = \lambda\vec{v}$.

Componentes de vectores de desplazamiento: los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$

Suponga que usted vive en una ciudad con calles equidistantes, que corren de este a oeste y de norte a sur, y que desea indicarle a alguien cómo llegar de un lugar a otro. Probablemente le diría cuántas manzanas recorrer de este a oeste y cuántas de norte a sur. Por ejemplo, para ir de P a Q en la figura 12.7, caminamos cuatro manzanas al este y una al sur. Si $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son como se muestra en la figura 12.7, entonces el vector de desplazamiento de P a Q es $4\vec{i} - \vec{j}$.

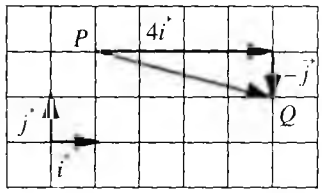


Figura 12.7 El vector de desplazamiento de P a Q es $4\vec{i} - \vec{j}$.

La misma idea la extendemos a tres dimensiones. Primero elegimos un sistema cartesiano de ejes coordenados. Los tres vectores de longitud 1 que se muestran en la figura 12.8 son el vector $\vec{i}$, que apunta en dirección del eje positivo de las x, el vector $\vec{j}$, en dirección del eje positivo de las y, y el vector $\vec{k}$, en dirección del eje positivo de las z.

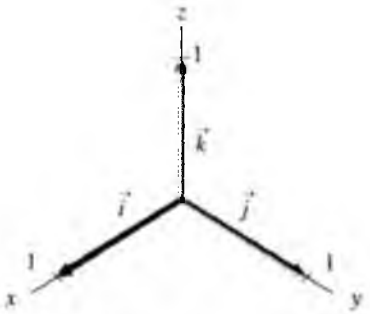


Figura 12.8 Los vectores $\vec{i}, \vec{j}$ y $\vec{k}$ en el espacio.

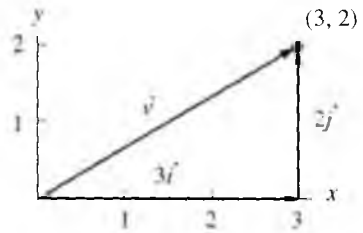


Figura 12.9 Se descompone $\vec{v}$ en componentes al escribirlo como $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

Notación de los vectores de desplazamiento usando $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$

Cualquier desplazamiento, en tres dimensiones o en el plano, se puede expresar como una combinación de desplazamientos en las direcciones de los ejes de coordenadas. Por ejemplo, la figura 12.9 muestra que el vector de desplazamiento $\vec{v}$ desde el origen al punto (3, 2) puede escribirse como una suma de vectores de desplazamiento a lo largo de los ejes x y y:

$$\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

Esta operación recibe el nombre de *descomponer $\vec{v}$ en sus componentes*. En general:

Descomponemos $\vec{v}$ en sus componentes al escribir $\vec{v}$ en la forma

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}.$$

Llamamos a $v_1\vec{i}$, $v_2\vec{j}$ y $v_3\vec{k}$, las **componentes** de $\vec{v}$.

Otra notación para vectores

Muchas personas escriben un vector en tres dimensiones como una fila de tres números, es decir, como

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ en lugar de } \vec{v} = (v_1\vec{i}, v_2\vec{j}, v_3\vec{k}).$$

Como la primera notación puede confundirse con un punto y la segunda no, por lo general usamos esta última.

Ejemplo 2 Descomponer el vector de desplazamiento, $\vec{v}$, desde el punto $P_1 = (2, 4, 10)$ al punto $P_2 = (3, 7\ 6)$ en sus componentes.

Solución Para llegar de P_1 a P_2, avanzamos una unidad en la dirección positiva de x, tres en dirección positiva y y cuatro en dirección negativa de z. Por lo tanto, $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

Ejemplo 3 Decir si el vector $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ es paralelo a cada uno de los siguientes vectores:

$$\vec{w} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 10\vec{k}, \quad \vec{a} = -\vec{i} - 1.5\vec{j} - 2.5\vec{k}, \quad \vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$$

Solución Como $\vec{w} = 2\vec{v}$ y a $= -0.5\vec{v}$, los vectores $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{a}$ son paralelos, pero $\vec{b}$ no es múltiplo de $\vec{v}$ (porque, por ejemplo $4 / 2 \neq 9 / 5$), así que v y b no son paralelos.

En general, la figura 12.10 muestra cómo expresar en sus componentes un vector de desplazamiento entre dos puntos:

Componentes de los vectores de desplazamiento

El vector de desplazamiento del punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ al punto $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ está dado en componentes por

$$\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

Vectores de posición: Desplazamiento de un punto desde el origen

Un vector de desplazamiento cuya cola está en el origen se llama vector de posición. Así, cualquier punto (x_0, y_0, z_0) en el espacio tiene asociado consigo al vector de posición $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$. (Véase Fig. 12.11). En general, un vector de posición indica el desplazamiento de un punto desde el origen.

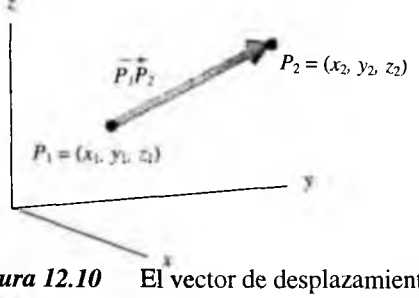


Figura 12.10 El vector de desplazamiento $\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$.

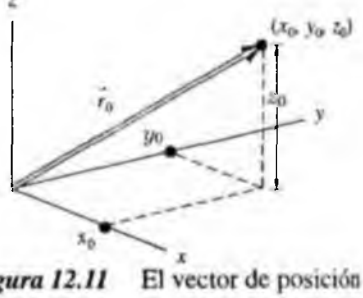


Figura 12.11 El vector de posición $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$.

Las componentes del vector cero

El vector de desplazamiento cero tiene magnitud igual a cero y se escribe $\vec{0}$. Así, $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$.

La magnitud de un vector en componentes

Para encontrar la magnitud $\|\vec{v}\|$, de un vector, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$, se emplea el teorema de Pitágoras (véase Fig. 12.12).

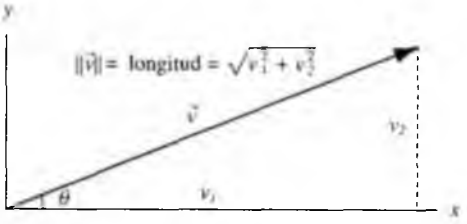


Figura 12.12

En tres dimensiones, para un vector $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, se tiene

> Magnitud de $\vec{v} = \|\vec{v}\|$ = longitud de la flecha $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Por ejemplo, si $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$, entonces $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{50}$.

Suma y multiplicación por un escalar de vectores en componentes

Supongamos que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ están dados en componentes:

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$$

Entonces

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1)\,\vec{i} + (v_2 + w_2)\,\vec{j} + (v_3 + w_3)\,\vec{k},$$

y

$$\lambda\vec{v} = \lambda v_1\vec{i} + \lambda v_2\vec{j} + \lambda v_3\vec{k}$$

Las figuras 12.13 y 12.14 ilustran estas propiedades en dos dimensiones. Finalmente, $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-1)\vec{w}$, así que se puede escribir $\vec{v} - \vec{w} = (v_1 - w_1)\vec{i} + (v_2 - w_2)\vec{j} + (v_3 - w_3)\vec{k}$.

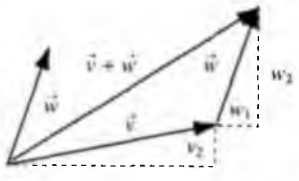


Figura 12.13 La suma $\vec{v} + \vec{w}$ en componentes.

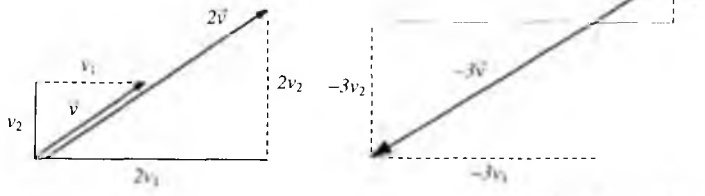


Figura 14 Múltiplos escalares de vectores $\vec{v}$, $2\vec{v}$, y $-3\vec{v}$.

Forma de descomponer un vector en sus componentes

Uno puede preguntarse cómo encontrar las componentes de un vector de dos dimensiones, dada su lon-
tud y dirección. Supongamos que el vector $\vec{v}$ tiene longitud v y forma un ángulo θ con el eje x, m
en sentido contrario al de las manecillas de un reloj, como en la figura 12.15. Si $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$, la fig
12.15 muestra que

$$v_1 = v\cos\theta \quad \text{y} \quad v_2 = v\,\text{sen}\,\theta.$$

Por lo tanto, descomponemos el vector $\vec{v}$ en sus componentes al escribir

$$\vec{v} = (v\cos\theta)\vec{i} + (v\,\text{sen}\,\theta)\vec{j}.$$

Los vectores en tres dimensiones se descomponen usando cosenos directores; véase el problema 29 de l
página 95.

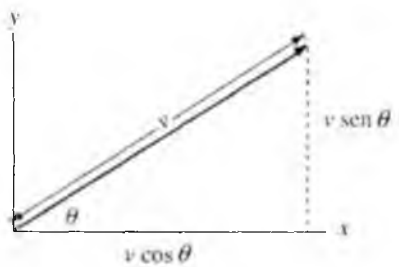


Figura 12.15 Descomposición de un vector: $\vec{v} = (v\cos\theta)\vec{i} + (v\,\text{sen}\,\theta)\vec{j}$.

Ejemplo 4 Descomponer el vector $\vec{v}$ en sus componentes si $v = 2$ y $\theta = \pi/6$.

Solución Tenemos $\vec{v} = 2\cos(\pi/6)\vec{i} + 2\,\text{sen}\,(\pi/6)\vec{j} = 2\left(\sqrt{3}/2\right)\vec{i} + 2(1/2)\vec{j} = \sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}$.

Vectores unitarios

Un vector unitario es aquél cuya magnitud es 1. Los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ son vectores unitarios en las direcciones de los ejes coordenados. A veces resulta útil encontrar un vector unitario con la misma dirección que un vector $\vec{v}$ dado. Supongamos que $\|\vec{v}\| = 10$; un vector unitario de la misma dirección que $\vec{v}$ es $\vec{v}/10$. En general, un vector unitario en la dirección de cualquier vector $\vec{v}$ diferente de cero es

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

Ejemplo 5 Encontrar un vector unitario, $\vec{u}$, en la dirección del vector $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$.

Solución Si $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$, entonces $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$. Por lo tanto, un vector unitario en la misma dirección está dado por

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\vec{i} + 3\vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{j} = 0.32\vec{i} + 0.95\vec{j}.$$

Ejemplo 6 Encontrar un vector unitario en el punto (x, y, z) que apunta radialmente hacia afuera desde el origen.

Solución El vector desde el origen hasta (x, y, z) es el vector de posición

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Por lo tanto, si ponemos su cola en (x, y, z) apuntará alejándose desde el origen. Su magnitud es

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

así que un vector unitario que apunte en la misma dirección es

$$\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k}.$$

Problemas para la sección 12.1

1. Los vectores $\vec{w}$ y $\vec{u}$ son los de la figura 12.16. Relacione los vectores $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$ con cinco de los siguientes vectores: $\vec{u} + \vec{w}$, $\vec{u} - \vec{w}$, $\vec{w} - \vec{u}$, $2\vec{w} - \vec{u}$, $\vec{u} - 2\vec{w}$, $2\vec{w}$, $-2\vec{w}$, $2\vec{u}$, $-2\vec{u}$, $-\vec{w}$, $-\vec{u}$.

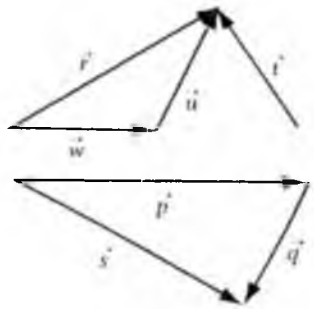


Figura 12.16

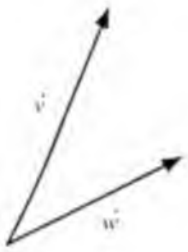


Figura 12.17

2. Dados los vectores de desplazamiento $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en la figura 12.17, dibuje los siguientes vectores:
   a) $\vec{v} + \vec{w}$ b) $\vec{v} - \vec{w}$ c) $2\vec{v}$ d) $2\vec{v} + \vec{w}$ e) $\vec{v} - 2\vec{w}$.

Para los problemas del 3 al 8, efectúe las operaciones indicadas en los siguientes vectores:

$$\vec{a} = 2\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{b} = -3\vec{j} + 5\vec{j} + 4\vec{k}, \quad \vec{c} = \vec{i} + 6\vec{j}, \quad \vec{x} = -2\vec{i} + 9\vec{j}, \quad \vec{y} = 4\vec{i} - 7\vec{j}, \quad \vec{z} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}.$$

3. $\|\vec{z}\|$
4. $\vec{a} + \vec{z}$
5. $5\vec{b}$
6. $2\vec{c} + \vec{x}$
7. $\|\vec{y}\|$
8. $2\vec{a} + 7\vec{b} - 5\vec{z}$

Para los problemas del 9 al 12, efectúe el cálculo indicado.

9. $(4\vec{i} + 2\vec{j}) - (3\vec{i} - \vec{j})$
10. $(\vec{i} + 2\vec{j}) + (-3)(2\vec{i} + \vec{j})$
11. $-4(\vec{i} - 2\vec{j}) - 0.5(\vec{i} - \vec{k})$
12. $2(0.45\vec{i} - 0.9\vec{j} - 0.01\vec{k}) - 0.5(1.2\vec{i} - 0.1\vec{k})$

Encuentre la longitud de los vectores de los problemas del 13 al 16.

13. $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$
14. $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$
15. $\vec{v} = 1.2\vec{i} - 3.6\vec{j} + 4.1\vec{k}$
16. $\vec{v} = 7.2\vec{i} - 1.5\vec{j} + 2.1\vec{k}$

Un gato está en el suelo en el punto (1, 4, 0) observando una ardilla que se encuentra en lo alto de un árbol. El árbol mide una unidad de alto y su base está en el punto (2, 4, 0). Encuentre los vectores de desplazamiento de los problemas del 17 al 20.

17. Del origen al gato.
18. De la base del árbol a la ardilla.
19. De la base del árbol al gato.
20. Del gato a la ardilla.
21. En la gráfica de la figura 12.18, dibuje el vector $\vec{v} = 4\vec{i} + \vec{j}$ dos veces, una vez con su cola en el origen y otra con su cola en el punto (3, 2).

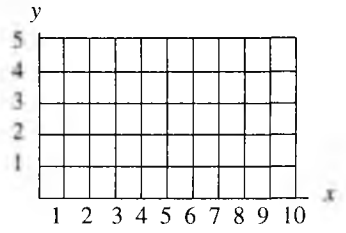


Figura 12.18

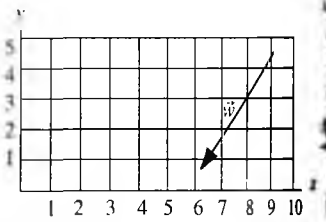
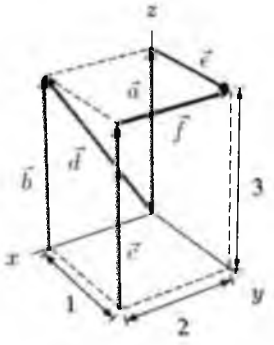


Figura 12.19 Escala: largo de 1 cuadro = 0.25 pulgadas.

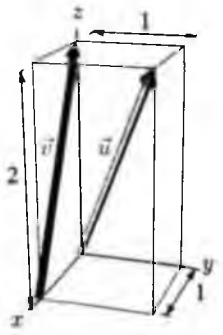
Descomponga los vectores de los problemas del 22 al 26 en sus componentes.

22. El vector mostrado en la figura 12.19.
23. Un vector que se inicia en el punto $P = (1, 2)$ y termina en el punto $Q = (4, 6)$.
24. Un vector que se inicia en el punto $Q = (4, 6)$ y termina en el punto $P = (1, 2)$.

25.



26.



27. Encuentre la longitud de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del problema 26.
28. Encuentre un vector que apunte en la misma dirección que $\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, pero de longitud 2.
29. a) Encuentre un vector unitario del punto $P = (1, 2)$ y hacia el punto $Q = (4, 6)$.
    b) Encuentre un vector de longitud 10 que apunte en la misma dirección.
30. De los siguientes vectores, ¿cuáles son paralelos?

$$\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{w} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k},$$
$$\vec{p} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{q} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}, \quad \vec{r} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}.$$

31. La figura 12.20 muestra una molécula con cuatro átomos en *O, A, B* y *C*. Verifique que cada uno de los átomos de la molécula se encuentre a dos unidades de otro átomo cualquiera.

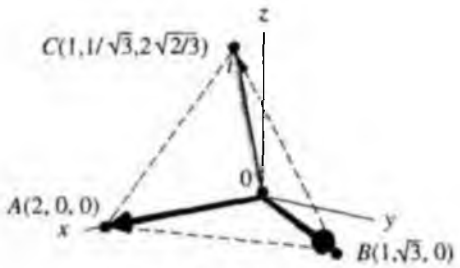


Figura 12.20

Para los problemas 32 y 33, considere el mapa de la figura 11.1 de la página 2.

32. Si alguien sale de Topeka a lo largo de los siguientes vectores, ¿aumenta o disminuye la temperatura?

a) $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ b) $\vec{v} = -\vec{i} - \vec{j}$ c) $\vec{w} = -5\vec{i} - 5\vec{j}$.

33. Trace un vector que apunte en la dirección en que la temperatura aumenta con más rapidez, comenzando en Buffalo. Después, comenzando en Boise, trace un vector que apunte en la dirección en que la temperatura disminuya con más rapidez.

34. Un camión se dirige al norte a 30 km/h y se aproxima a un crucero. En un camino perpendicular, una patrulla viaja al oeste hacia la intersección a 40 km/h. Supongamos que ambos vehículos llegarán al crucero exactamente en una hora. Encuentre el vector que representa el desplazamiento del camión con respecto a la patrulla.

35. Demuestre que las medianas de un triángulo se cortan en un punto situado a 1/3 de la distancia a lo largo de cada mediana, medida desde el lado que corta.

36. Demuestre que las rectas que unen el centroide (el punto de intersección de las medianas) de una cara del tetraedro y el vértice opuesto se encuentran en un punto situado a $\frac{1}{4}$ de la distancia de cada centroide a su vértice opuesto.

12.2 VECTORES EN GENERAL

Además del desplazamiento, hay muchas cantidades que tienen magnitud y dirección y se suman y multiplican por escalares al igual que los desplazamientos. Cualquiera de tales cantidades recibe el nombre de *vector* y está representada por una flecha de la misma manera que se representan los desplazamientos. La longitud de una flecha es la *magnitud* del vector, y la dirección de la flecha es la *dirección* del vector.

Velocidad vectorial contra rapidez escalar

La rapidez de un móvil indica qué tan rápido se desplaza, por ejemplo a 80 km/h. La rapidez es sólo un número y, por lo tanto, es escalar. La velocidad, por otra parte, nos indica con qué rapidez se desplaza y cuál es la dirección del movimiento; es un vector. Por ejemplo, si un automóvil se dirige al noreste a 80 km/h, entonces su velocidad es un vector de longitud 80 que apunta hacia el noreste.

El **vector de velocidad** de un móvil es un vector cuya magnitud es la rapidez del objeto y cuya dirección es la dirección de su movimiento.

Ejemplo 1 Un vehículo se dirige al norte a una rapidez de 100 km/h, en tanto que un avión vuela horizontalmente al suroeste a una rapidez de 500 km/h. Dibujar los vectores de velocidad del vehículo y del avión.

Solución La figura 12.21 muestra los vectores de velocidad. El vector de velocidad del avión es cinco veces más largo que el del vehículo, porque su rapidez es cinco veces mayor.

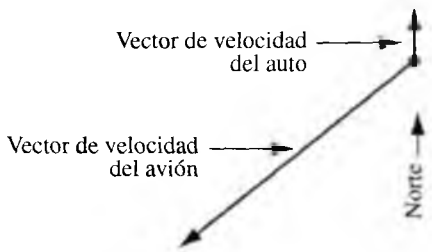


Figura 12.21 El vector de velocidad del auto es 100 km/h al norte y el del avión 500 km/h al suroeste.

El siguiente ejemplo ilustra que los vectores de velocidad para dos movimientos se suman para dar el vector de velocidad para el movimiento combinado, al igual que los desplazamientos.

Ejemplo 2 Una lancha se desplaza por un río con velocidad $\vec{v}$ y una rapidez de 8 km/h en relación con el agua. Además, el río tiene una corriente $\vec{c}$ y una rapidez de 1 km/h (véase Fig. 12.22). ¿Cuál es el significado físico del vector $\vec{v} + \vec{c}$?



Figura 12.22 La velocidad de la lancha en relación con el lecho del río es la suma $\vec{v} + \vec{c}$.

Solución El vector $\vec{v}$ indica cómo avanza la lancha en relación con el agua, en tanto que $\vec{c}$ indica cómo fluye el agua en relación con el lecho del río. Durante una hora, imagine que la lancha se desplaza 8 km en relación con el agua, que permanece inmóvil; este desplazamiento se representa por $\vec{v}$. Luego imagine que el agua avanza 1 km mientras el bote continúa estacionario en relación con el agua; este desplazamiento se representa por $\vec{c}$. El desplazamiento combinado se representa por $\vec{v} + \vec{c}$. Por lo tanto, el vector $\vec{v} + \vec{c}$ es la velocidad del bote en relación con el lecho del río.

Observe que la rapidez efectiva del bote no es necesariamente 9 km/h, a menos que el bote se desplace en la dirección de la corriente. Aun cuando sumamos los vectores de velocidad, no necesariamente sumamos sus longitudes.

El **vector de velocidad** de un móvil es un vector cuya magnitud es la rapidez del objeto y cuya dirección es la dirección de su movimiento.

Ejemplo 1 Un vehículo se dirige al norte a una rapidez de 100 km/h, en tanto que un avión vuela horizontalmente al suroeste a una rapidez de 500 km/h. Dibujar los vectores de velocidad del vehículo y del avión.

Solución La figura 12.21 muestra los vectores de velocidad. El vector de velocidad del avión es cinco veces más largo que el del vehículo, porque su rapidez es cinco veces mayor.

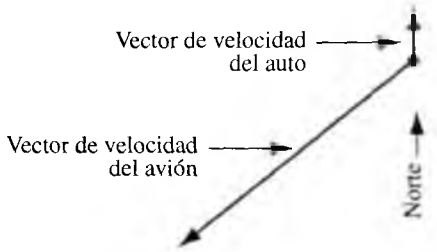


Figura 12.21 El vector de velocidad del auto es 100 km/h al norte y el del avión 500 km/h al suroeste.

El siguiente ejemplo ilustra que los vectores de velocidad para dos movimientos se suman para dar el vector de velocidad para el movimiento combinado, al igual que los desplazamientos.

Ejemplo 2 Una lancha se desplaza por un río con velocidad $\vec{v}$ y una rapidez de 8 km/h en relación con el agua. Además, el río tiene una corriente $\vec{c}$ y una rapidez de 1 km/h (véase Fig. 12.22). ¿Cuál es el significado físico del vector $\vec{v} + \vec{c}$?



Figura 12.22 La velocidad de la lancha en relación con el lecho del río es la suma $\vec{v} + \vec{c}$.

Solución El vector $\vec{v}$ indica cómo avanza la lancha en relación con el agua, en tanto que $\vec{c}$ indica cómo fluye el agua en relación con el lecho del río. Durante una hora, imagine que la lancha se desplaza 8 km en relación con el agua, que permanece inmóvil; este desplazamiento se representa por $\vec{v}$. Luego imagine que el agua avanza 1 km mientras el bote continúa estacionario en relación con el agua; este desplazamiento se representa por $\vec{c}$. El desplazamiento combinado se representa por $\vec{v} + \vec{c}$. Por lo tanto, el vector $\vec{v} + \vec{c}$ es la velocidad del bote en relación con el lecho del río.

Observe que la rapidez efectiva del bote no es necesariamente 9 km/h, a menos que el bote se desplace en la dirección de la corriente. Aun cuando sumamos los vectores de velocidad, no necesariamente sumamos sus longitudes.

La multiplicación por un escalar también tiene sentido para vectores de velocidad. Por ejemplo, si $\vec{v}$ es un vector de velocidad, entonces $-2\vec{v}$ representa una velocidad del doble de la magnitud en dirección opuesta.

Ejemplo 3 Una pelota se desplaza con velocidad $\vec{v}$ cuando choca contra una pared y rebota directamente hacia atrás, con su velocidad reducida en 20%. Expresar su nueva velocidad en términos de la anterior.

Solución La nueva velocidad es $-0.8\,\vec{v}$, donde el signo negativo expresa el hecho de que la nueva velocidad tiene una dirección opuesta a la anterior.

Podemos descomponer vectores de velocidad en sus componentes como que se hizo en la página 65.

Ejemplo 4 Representar, mediante componentes, los vectores de velocidad del automóvil y el avión del ejemplo 1. Tomar el norte como el eje positivo de las y, el este como el eje positivo de las x y hacia arriba como el eje positivo de las z.

Solución El automóvil se dirige al norte a 100 km/h, de modo que la componente y de su velocidad es $100\vec{j}$ y la componente x es $0\vec{i}$. Como viaja horizontalmente, la componente z es $0\vec{k}$. Por lo tanto, se tiene

$$\text{Velocidad del automóvil} = 0\vec{i} + 100\vec{j} + 0\vec{k} = 100\vec{j}\,.$$

El vector de velocidad del avión también tiene componente $\vec{k}$ igual a cero. Como se dirige al sudoeste, sus componentes i y j tienen coeficientes negativos (el norte y el este son positivos). Como el avión vuela a 500 km/h, en una hora se ha desplazado $500 / \sqrt{2} \approx 354$ km al oeste y 354 km al sur (véase Fig. 12.23). Por lo tanto,

$$\text{Velocidad del avión} = -(500 \cos 45°)\vec{i} - (500 \operatorname{sen} 45°)\vec{j} \approx -354\vec{i} - 354\vec{j}$$

Por supuesto, si el automóvil subiera por una montaña o si el avión descendiera para aterrizar, entonces la componente $\vec{k}$ no sería cero.

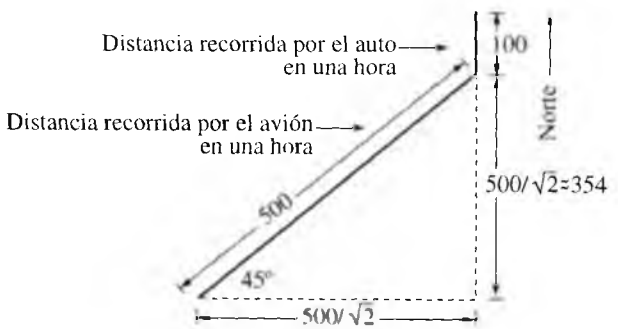


FIGURA 12.23 Distancias recorridas por el avión y el auto en una hora.

Aceleración

Otro ejemplo de una cantidad vectorial es la aceleración. Al igual que la velocidad, la aceleración se especifica mediante una magnitud y una dirección; por ejemplo, la aceleración debida a la gravedad es 9.81 m/s^2 verticalmente hacia abajo.

Fuerza

La fuerza es otro ejemplo de una cantidad vectorial. Supongamos que alguien empuja una puerta abierta; el resultado depende de la fuerza con que se empuje y en qué dirección. Por lo tanto, para especificar una fuerza debemos dar su magnitud (o fuerza) y la dirección en la que se aplica. Por ejemplo, la fuerza gravitacional ejercida sobre un objeto por la Tierra es un vector que apunta desde el objeto hacia el centro de la Tierra; su magnitud es la intensidad de la fuerza gravitacional.

Ejemplo 5 La Tierra gira alrededor del Sol en una elipse. La fuerza gravitacional sobre la Tierra y la velocidad de ésta están controladas por las siguientes leyes:
Ley de Newton de la gravitación: La magnitud de la atracción gravitacional, F, entre dos masas m_1 y m_2 separadas una distancia r, está dada por $F = Gm_1m_2/r^2$, donde G es una constante. El vector de fuerza yace a lo largo de la recta entre las masas.
Segunda ley de Kepler: La recta que une un planeta al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

a) Trazar vectores que representen la fuerza gravitacional del Sol sobre la Tierra en dos posiciones diferentes en la órbita de la Tierra.
b) Trazar el vector de velocidad de la Tierra en dos puntos en su órbita.

Solución

a) La figura 12.24 muestra a la Tierra mientras gira alrededor del Sol. Observe que el vector de fuerza gravitacional siempre apunta hacia el Sol y es más grande cuando la Tierra está más cerca del Sol, debido al término r^2 del denominador. (De hecho, la órbita real es mucho más parecida a un círculo de lo que se ha ilustrado aquí.)
b) El vector de velocidad apunta en la dirección de movimiento de la Tierra. Por lo tanto, el vector de velocidad es tangente a la elipse. Véase figura 12.25. Además, el vector de velocidad es más largo en puntos de la órbita donde el planeta se desplaza rápidamente, debido a que la magnitud del vector de velocidad es la rapidez. La segunda ley de Kepler permite determinar cuándo la Tierra gira rápidamente y cuándo con lentitud. En un periodo fijo, por ejemplo un mes, la recta que une la Tierra y el Sol recorre un sector que tiene cierta área. La figura 12.25 muestra dos sectores recorridos en dos intervalos diferentes de un mes. La ley de Kepler estipula que las áreas de los dos sectores son iguales. Por lo tanto, la Tierra debe desplazarse mayor distancia en un mes cuando está cerca del Sol que cuando está lejos de éste. En consecuencia, la Tierra gira más rápidamente cuando está más cerca del Sol y más despacio cuando está lejos.

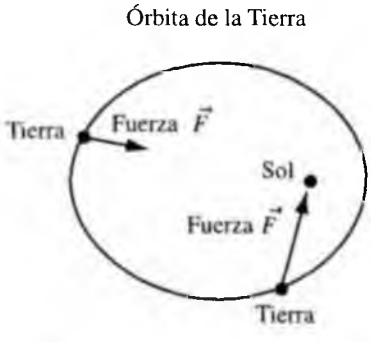


Figura 12.24 Fuerza gravitacional, F, ejercida por el Sol sobre la Tierra: mayor magnitud más cerca del Sol.

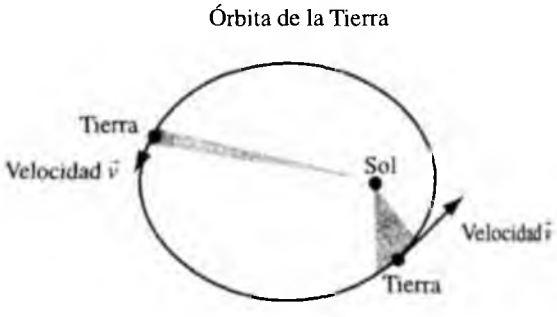


Figura 12.25 El vector de velocidad, $\vec{v}$, de la Tierra: mayor magnitud más cerca del Sol.

Propiedades de la suma y la multiplicación por un escalar

En general, los vectores se suman, restan y multiplican por escalares igual que los vectores de desplazamiento. Por lo tanto, para cualesquier vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y cualesquier escalares a y b, se tienen las siguientes propiedades:

Conmutativa	**Asociativa**	
1. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$	**2.** $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$	
	3. $\alpha(\beta \vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$	
Distributiva	**Identidad**	
4. $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$	**6.** $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$	**8.** $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
5. $\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$	**7.** $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$	**9.** $\vec{w} + (-1) \cdot \vec{v} = \vec{w} - \vec{v}$

En los problemas del 16 al 23, que se encuentran al final de esta sección, se pide justificar estos resultados en términos de vectores de desplazamiento.

...o de componentes

...plo 6 Un avión, que vuela hacia el este a una rapidez con respecto al aire de 600 km/h, encuentra un viento de 50 km/h que sopla hacia el noreste. Determinar la dirección del avión y su rapidez con respecto a tierra.

...ción Escogemos un sistema de coordenadas con el eje x apuntando al este y el eje y apuntando al norte (véase Fig. 12.26).

La velocidad con respecto al aire nos da la velocidad del avión relativa al aire inmóvil. Por lo tanto, el avión se dirige al este con velocidad $\vec{v} = 600\vec{i}$ con respecto al aire inmóvil. Además, el aire avanza con una velocidad $\vec{w}$. Si se escribe w en componentes, tenemos

$$\vec{w} = (50 \cos 45°)\vec{i} + (50 \operatorname{sen} 45°)\vec{j} = 35.4\vec{i} + 35.4\vec{j}\ .$$

El vector $\vec{v} + \vec{w}$ representa el desplazamiento del avión en una hora en relación con tierra. Por lo tanto, $\vec{v} + \vec{w}$ es la velocidad del avión en relación con tierra. En componentes, tenemos

$$\vec{v} + \vec{w} = 600\vec{i} + (35.4\vec{i} + 35.4\vec{j}) = 635.4\vec{i} + 35.4\vec{j}$$

La dirección del movimiento del avión en relación con tierra está dada por el ángulo θ de la figura 12.26, donde

$$\tan\theta = \frac{35.4}{635.4}$$

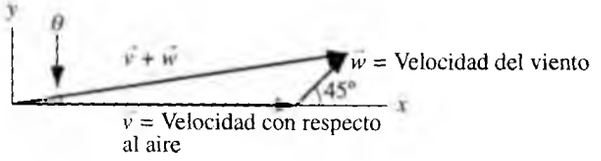


Figura 12.26 La velocidad del avión respecto del suelo es la suma $\vec{v} + \vec{w}$.

Así que

$$\theta = \arctan\left(\frac{35.4}{635.4}\right) = 3.2°.$$

Por otro lado, la rapidez respecto a tierra es

$$\text{Rapidez respecto a tierra} = \sqrt{635.4^2 + 35.4^2} = 636.4 \text{ km / h}.$$

Así pues, la rapidez del avión con respecto a tierra ha aumentado ligeramente a causa del viento (como cabe esperar, ya que el viento tiene una componente en la dirección en que viaja el avión). El ángulo θ muestra cuánto el avión es desviado de su curso por el viento.

Vectores en *n* dimensiones

Mediante la notación $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ para un vector en tres dimensiones, se puede definir un vector en n dimensiones como una serie de n números. Por lo tanto, un vector de n dimensiones puede escribirse como

$$\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

La suma y multiplicación por un escalar están definidas por las fórmulas

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)$$

y

$$\lambda\vec{v} = \lambda\,(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n).$$

¿Para qué sirven los vectores en *n* dimensiones?

Pueden emplearse vectores en dos y tres dimensiones para hacer modelos de desplazamientos, velocidades o fuerzas. Pero ¿para qué sirven los vectores en n dimensiones? Existe otra interpretación de los vectores en tres dimensiones que es útil: se pueden considerar como un listado de tres cantidades diferentes, por ejemplo, los desplazamientos paralelos a los ejes x, y y z. De igual manera, el vector n dimensional.

$$\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

puede concebirse como una manera de ordenar n cantidades diferentes. Por ejemplo, un vector *poblacional* $\vec{N}$ indica el número de niños y adultos en una población:

$$\vec{N} = (\text{número de niños, número de adultos}),$$

o bien, si nos interesa un desglose más detallado de edades, podríamos dar la población de cada intervalo de 10 años de edad (hasta la edad de 110) de la manera siguiente:

$$\vec{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4, \ldots, N_{10}, N_{11}),$$

donde N_1 es la población con edad de 0 a 9, N_2 la población con edad de 10 a 19, y así sucesivamente.

Un vector de *consumo*,

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

muestra las cantidades $q_1, q_2, \ldots, q_n$ consumidas de cada una de n mercancías diferentes. Un vector de *precio*

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

contiene los precios de n artículos diferentes.

En 1907, Hermann Minkowski utilizó vectores con cuatro componentes cuando introdujo *coordenadas de espacio-tiempo*, donde a cada evento se le asigna un vector de posición v con cuatro coordenadas, tres para su posición en el espacio y una para el tiempo:

$$v = (x, y, z, t).$$

Ejemplo 7 Supongamos que el vector I representa el número de copias, en miles, hechas por cada uno de cuatro centros de copiado en el mes de diciembre, y J el número de copias hechas en los mismos cuatro centros de copiado durante los once meses anteriores (el "año a la fecha"). Si $I = (25, 211, 818, 642)$ y $J = (331, 3227, 1377, 2570)$, calcule $I + J$. ¿Qué representa esta suma?

Solución La suma es

$$I + J = (25 + 331, 211 + 3227, 818 + 1377, 642 + 2570) = (356, 3438, 2195, 3212).$$

Cada término $I + J$ representa la suma del número de copias hechas en diciembre más las de los once meses anteriores, es decir, el número total de copias hechas durante todo el año en ese centro de copiado.

Ejemplo 8 El vector de precio $p = (p_1, p_2, p_3)$ representa los precios en dólares de tres artículos. Escribir un vector que indique los precios de los mismos artículos en centavos.

Solución Los precios en centavos son $100p_1$, $100p_2$, $100p_3$ respectivamente, de modo que el nuevo vector de precio es

$$(100p_1, 100p_2, 100p_3) = 100p$$

Problemas para la sección 12.2

En los problemas del 1 al 4, diga si la cantidad dada es un vector o un escalar.

1. La distancia de Seattle a St. Louis.
2. La población de Estados Unidos.
3. El campo magnético en un punto de la superficie de la Tierra.
4. La temperatura en un punto de la superficie de la Tierra.
5. Un automóvil se desplaza a una rapidez de 50 km/h. Suponga que el eje positivo de las y es el norte y el eje positivo de las x el este. Descomponga el vector de velocidad del automóvil (en dos dimensiones) en sus componentes si viaja en cada una de las siguientes direcciones:
   a) Este b) Sur c) Sureste d) Noroeste.
6. ¿Cuál se desplaza más rápido, un automóvil cuyo vector de velocidad es $21i + 35j$ o uno cuyo vector de velocidad es $40i$, suponiendo que las unidades son las mismas para ambas direcciones?
7. Un móvil tiene un vector de velocidad $50i + 20j$ en metros por segundo. Exprese la velocidad en kilómetros por hora.

8. Un automóvil se desplaza, en el sentido de las manecillas del reloj, alrededor de la pista de la figura 12.27; disminuye su velocidad en las curvas y acelera en las rectas. Dibuje vectores de velocidad en los puntos *P, Q* y *R*.
9. Un automóvil de carreras corre, en el sentido de las manecillas del reloj, alrededor de la pista de la figura 12.27 y a velocidad constante. ¿En qué punto de la pista tiene el auto el vector de aceleración más largo, y aproximadamente en qué dirección apunta? (Recuerde que la aceleración es la rapidez de cambio de la velocidad.)



Figura 12.27

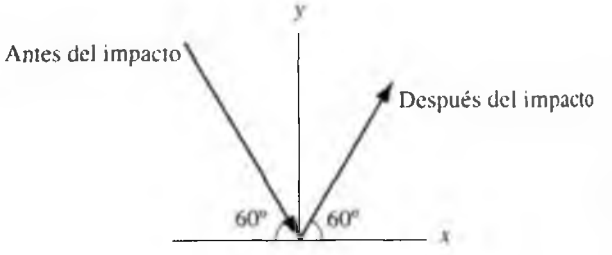


Figura 12.28

10. Una partícula que avanza con velocidad v se impacta contra una barrera a un ángulo de 60° y rebota a un ángulo de 60° en dirección opuesta, con velocidad reducida en 20%, como se muestra en la figura 12.28. Encuentre el vector de velocidad del objeto después del impacto.
11. Hay cinco estudiantes en un grupo. Sus calificaciones a mitad del curso (sobre 100) están dadas por el vector $\vec{v} = (73, 80, 91, 65, 84)$; al final, por $\vec{w} = (82, 79, 88, 70, 92)$. Si la calificación final vale el doble que la de medio curso, encuentre un vector que indique las calificaciones totales de los estudiantes (como porcentaje).
12. Poco después de despegar, un avión se eleva hacia el noreste en aire sin corrientes a una rapidez con respecto del aire de 200 km/h, y su rapidez de ascenso es de 300 m/min. Descomponga su vector de velocidad en sus componentes en un sistema de coordenadas en que el eje x apunta al este, el eje y apunta al norte y el z apunta hacia arriba.
13. Un avión se dirige al noreste a una velocidad con respecto del aire de 700 km/h, pero hay un viento que sopla del oeste a 60 km/h. ¿En qué dirección termina por volar el avión? ¿Cuál es su rapidez con relación a tierra?
14. Un avión vuela a una velocidad de 600 km/h con respecto del aire en un viento cruzado que sopla del noreste a una velocidad de 50 km/h. ¿Qué dirección debe tomar el avión para terminar volando hacia el este?
15. Un avión se dirige al este y se eleva a razón de 80 km/h. Si su velocidad con respecto del aire es de 480 km/h y hay un viento que sopla a 100 km/h al noreste, ¿cuál es la velocidad del avión con respecto a tierra?

Utilice la definición geométrica de suma y multiplicación por un escalar para explicar cada una de las propiedades de los problemas del 16 al 23.

16. $\vec{w} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{w}$
17. $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
18. $\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$
19. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
20. $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$
21. $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
22. $1\vec{v} = \vec{v}$
23. $\vec{v} + (-1)\vec{w} = \vec{v} - \vec{w}$

3 EL PRODUCTO PUNTO

Ya vimos cómo sumar vectores; ¿será posible multiplicar dos vectores? En las siguientes dos secciones veremos dos maneras de hacerlo: el *producto escalar* (o *producto punto*), que da como resultado un escalar, y el *producto vectorial* (o *producto cruz*), cuyo resultado es un vector.

finición del producto punto

El producto punto enlaza la geometría y el álgebra. Ya sabemos cómo calcular la longitud de un vector a partir de sus componentes; el producto punto nos indica una manera de calcular el ángulo entre dos vectores. Para dos vectores cualesquiera $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ y $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$, como los que se ilustran en la figura 12.29, se define un escalar de la manera siguiente:

Las siguientes dos definiciones del **producto punto**, o **producto escalar**, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, son equivalentes:

- **Definición geométrica**

$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos\theta$ donde θ es el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y $0 \leq \theta \leq \pi$.

- **Definición algebraica**

$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$

Observe que el producto punto de dos vectores es un *número*.

¿Por qué no se da sólo una definición de $\vec{v} \cdot \vec{w}$? Porque ambas definiciones son igualmente importantes; la definición geométrica nos da una imagen de lo que significa el producto punto y, la algebraica, una manera de calcularlo.

¿Cómo se sabe que las dos definiciones son equivalentes, es decir, que realmente definen lo mismo? Primero observemos que las dos definiciones dan el mismo resultado en un ejemplo particular. Luego demostraremos por qué son equivalentes en general.

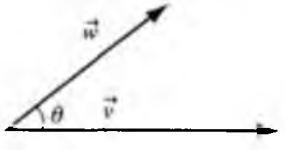


Figura 12.29 Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

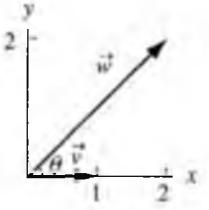


Figura 12.30 El cálculo del producto punto de los vectores $\vec{v} = \vec{i}$ y $\vec{w} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ geométrica y algebraicamente da el mismo resultado.

Ejemplo 1 Supóngase que $\vec{v} = \vec{i}$ y $\vec{w} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$. Calcular $\vec{v} \cdot \vec{w}$ geométrica y algebraicamente.

Solución Para usar la definición geométrica, véase la figura 12.30. El ángulo entre los vectores es $\pi/$ y las longitudes de los vectores están dadas por

$$\|\vec{v}\| = 1 \quad \text{y} \quad \|\vec{w}\| = 2\sqrt{2}.$$

Por lo tanto,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos\theta = 1 \cdot 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

Por la definición algebraica, obtenemos el mismo resultado:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 = 2$$

¿Por qué las dos definiciones del producto punto dan el mismo resultado

En el ejemplo anterior, las dos definiciones dan el mismo valor para el producto punto. Para que las definiciones geométrica y algebraica del producto punto siempre dan el mismo result mos demostrar que, para cualesquier vectores $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ y $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$ con θ entre ellos:

$$\|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos\theta = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3.$$

Enseguida se verá un método para demostrarlo; en el problema 33 de la página 89 aparece o utiliza la trigonometría.

Aplicación de la ley de los cosenos. Suponga que $0 < \theta < \pi$, de modo que los vectores $\vec{v}$ y un triángulo (véase Fig. 12.31). Por la ley de los cosenos tenemos

$$\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos\theta.$$

Este resultado también se cumple para $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Calculamos las longitudes mediante com

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\
\|w\|^2 &= w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 \\
\|v - w\|^2 &= (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + (v_3 - w_3)^2 \\
&= v_1^2 - 2v_1w_1 + w_1^2 + v_2^2 - 2v_2w_2 + w_2^2 + v_3^2 - 2v_3w_3 + w_3^2.
\end{aligned}$$

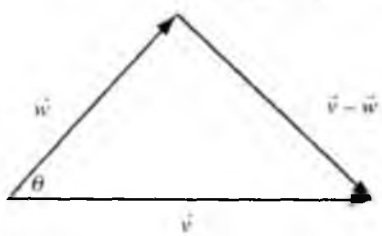


Figura 12.31 Triángulo empleado en la justificación de $\|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos\theta = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$.

Al sustituir en la ley de los cosenos y cancelar, vemos que

$$-2v_1w_1 - 2v_2w_2 - 2v_3w_3 = -2\|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos\theta.$$

Por lo tanto tenemos el resultado deseado, es decir:

$$v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos\theta.$$

Propiedades del producto punto

Las siguientes propiedades del producto punto se pueden justificar si usamos la definición algebraica (problema 26 de la página 88). Para una interpretación geométrica de la propiedad 3, véase el problema 30.

Propiedades del producto punto. Para cualesquier vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y cualquier escalar λ,

1. $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
2. $\vec{v} \cdot (\lambda \vec{w}) = \lambda(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\lambda \vec{v}) \cdot \vec{w}$
3. $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$

Perpendicularidad, magnitud y productos punto

Dos vectores son perpendiculares si el ángulo entre ellos es $\pi/2$ o 90°. Como $\cos(\pi/2) = 0$, si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares, entonces $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. Por el contrario, siempre que $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, entonces $\cos\theta = 0$, así que $\theta = \pi/2$ y los vectores son perpendiculares. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado:

Dos vectores diferentes de cero $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son **perpendiculares**, u **ortogonales**, si, y sólo si,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

Por ejemplo: $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$.

Si tomamos el producto punto de un vector con sí mismo, entonces $\theta = 0$ y $\cos\theta = 1$. Para cualquier vector $\vec{v}$:

La magnitud y el producto punto están relacionados así:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$$

Por ejemplo: $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$.

o del producto punto

Según el caso, una definición del producto punto puede ser más cómoda de usar que la otra. En el ejemplo 2, a continuación, la definición geométrica es la única que puede usarse porque no conocemos las componentes. En el ejemplo 3, se utiliza la definición algebraica.

plo 2 Supóngase que el vector $\vec{b}$ es fijo y tiene longitud 2; el vector $\vec{a}$ puede girar libremente y tiene longitud 3. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo del producto punto $\vec{a} \cdot \vec{b}$, conforme el vector $\vec{a}$ gira por todas las posiciones posibles? ¿Cuáles posiciones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ llevan a estos valores?

ción La definición geométrica indica $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta = 3 \cdot 2 \cos\theta = 6 \cos\theta$. Por lo tanto, el valor máximo de $\vec{a} \cdot \vec{b}$ es 6, y ocurre cuando $\cos\theta = 1$ así que $\theta = 0$, es decir, cuando $\vec{a}$ y $\vec{b}$ apuntan en la misma dirección. El valor mínimo de $\vec{a} \cdot \vec{b}$ es –6, y tiene lugar cuando $\cos\theta = -1$ así que $\theta = \pi$ es decir, cuando $\vec{a}$ y $\vec{b}$ apuntan en direcciones opuestas (véase Fig. 12.32).

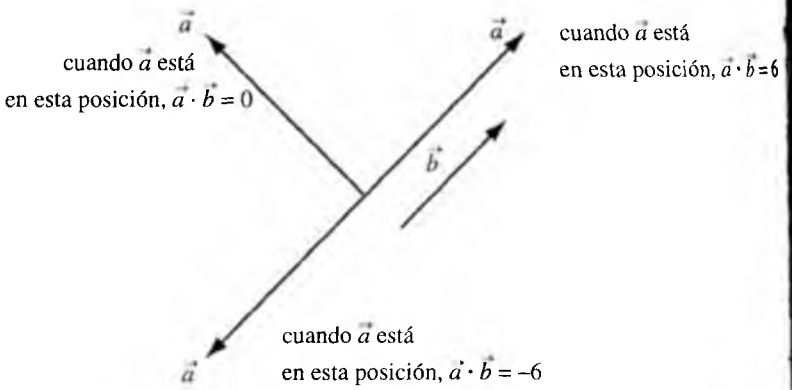

cuando $\vec{a}$ está
en esta posición, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
cuando $\vec{a}$ está
en esta posición, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$
$\vec{b}$
cuando $\vec{a}$ está
en esta posición, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$

Figura 12.32 Valores máximo y mínimo de $\vec{a} \cdot \vec{b}$ obtenidos de un vector fijo $\vec{b}$ de longitud 2 y un vector giratorio $\vec{a}$ de longitud 3.

Ejemplo 3 ¿Cuáles pares, de la siguiente lista de vectores en tres dimensiones, son perpendiculares entre sí?

$$\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{k}, \quad \vec{v} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}, \quad \vec{w} = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}.$$

Solución La definición geométrica establece que dos vectores son perpendiculares si, y sólo si, su producto p es cero. Como los vectores están dados en sus componentes, calculamos productos punto usa definición algebraica:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} + 0\vec{k}) \cdot (\vec{i} + 0\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}) = 1 \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 0 + 0 \cdot \sqrt{3} = 1,$$
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} + 0\vec{k}) \cdot (\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = 1 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot 1 + 0(-1) = 2\sqrt{3},$$
$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \cdot (\vec{i} + 0\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}) = \sqrt{3} \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot \sqrt{3} = 0.$$

Por lo tanto, los únicos dos vectores que son perpendiculares son $\vec{w}$ y $\vec{u}$.

Vectores normales y la ecuación de un plano

En la sección 11.5 escribimos la ecuación de un plano dada su pendiente en x, su pendiente en y y intersección en z. Ahora escribiremos la ecuación de un plano usando un vector y un punto que encuentra en el plano. Un vector normal a un plano es un vector perpendicular al plano, es decir, perpendicular a todo vector de desplazamiento entre cualesquier dos puntos del plano. Sea $\vec{n} = a\vec{i} +$ $+ c\vec{k}$ un vector normal al plano, sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo del plano, y sea $P = (x, y, z)$ otro p cualquiera del plano. Entonces $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k$ es un vector cuya cabeza y c encuentran en el plano (véase Fig. 12.33). Por lo tanto, los vectores $\vec{n}$ y $\overrightarrow{P_0P}$ son perpendiculares, por que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$. La definición algebraica del producto punto indica $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = a(x - x_0)(y - y_0) + c($ $z_0)$, así que se obtiene el siguiente resultado:

La **ecuación del plano** con vector normal $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ y que contiene el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ es

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Al hacer $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ (una constante), podemos escribir la ecuación del plano en la forma

$$ax + by + cz = d$$

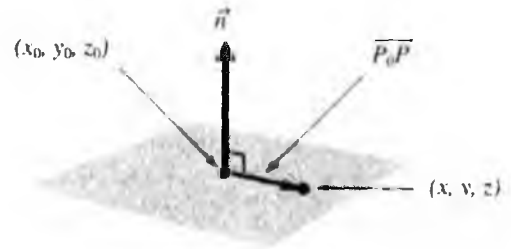


Figura 12.33 Plano con normal $\vec{n}$ y que contiene un punto fijo (x_0, y_0, z_0).

Ejemplo 4 Encontrar la ecuación del plano perpendicular a $-\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ y que pasa por el punto (1, 0, 4).

Solución La ecuación del plano es

$$-(x - 1) + 3(y - 0) + 2(z - 4) = 0,$$

que se simplifica a

$$-x + 3y + 2z = 7.$$

Ejemplo 5 Encontrar un vector normal al plano con ecuación a) $x - y + 2z = 5$ b) $z = 0.5x + 1.2y$.

Solución a) Como los coeficientes de $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ en un vector normal son los coeficientes de x, y, z en la ecuación del plano, un vector normal es $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

b) Antes que podamos encontrar un vector normal, reescribimos la ecuación del plano en la forma

$$0.5x + 1.2y - z = 0$$

Por lo tanto, un vector normal es $\vec{n} = 0.5\vec{i} + 1.2\vec{j} - \vec{k}$.

El producto punto en n dimensiones

La definición algebraica del producto punto se puede extender a vectores en más dimensiones.

> Si $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ entonces el producto punto de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el escalar
>
> $$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n.$$

Ejemplo 6 Una tienda de video vende videos, cintas, discos compactos y juegos de computadora. Se define el vector de cantidad $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$, donde q_1, q_2, q_3, q_4 denotan las cantidades vendidas de cada uno de los artículos, y el vector de precio $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, donde p_1, p_2, p_3, p_4 denotan el precio por unidad de cada artículo. ¿Qué representa el producto punto $\vec{p} \cdot \vec{q}$?

Solución El producto punto es $\vec{p} \cdot \vec{q} = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + p_4q_4$. La cantidad p_1q_1 representa el ingreso recibido por la tienda por venta de videos, p_2q_2 representa el ingreso por venta de cintas, y así sucesivamente. El producto punto representa el ingreso total recibido por la tienda por la venta de estos cuatro artículos.

Descomposición de un vector en componentes: proyecciones

En la sección 12.1 descompusimos un vector en componentes paralelas a los ejes. Ahora veremos cómo descomponer un vector, $\vec{v}$, en componentes, llamadas $\vec{v}_{\text{paralelo}}$ y $\vec{v}_{\text{perp}}$, que son paralela y perpendicular, respectivamente, a un vector dado distinto de cero, $\vec{u}$ (véase Fig. 12.34).

La proyección de $\vec{v}$ en $\vec{u}$, escrita $\vec{v}_{\text{paralelo}}$, mide (en algunos casos) qué tanto está alineado el vector v con el $\vec{u}$. La longitud de $\vec{v}_{\text{paralelo}}$ es la longitud de la "sombra" proyectada por $\vec{v}$ sobre una recta en la dirección de $\vec{u}$.

Para calcular $\vec{v}_{\text{paralelo}}$, suponemos que $\vec{u}$ es un vector unitario. (Si no, hay que crear uno dividiendo entre su longitud.) Entonces la figura 12.34 a) muestra que, si $0 \leq \theta \leq \pi/2$:

$$\|\vec{v}_{\text{paralelo}}\| = \|\vec{v}\| \cos\theta = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \text{(ya que } \|\vec{u}\| = 1\text{)}.$$

Ahora $\vec{v}_{\text{paralelo}}$ es un múltiplo escalar de $\vec{u}$, y como $\vec{u}$ es un vector unitario,

$$\vec{v}_{\text{paralelo}} = (\|\vec{v}\| \cos\theta)\vec{u} = (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}.$$

Un razonamiento similar demuestra que si $\pi/2 < \theta \leq \pi$, como en la figura 12.34 b), esta fórmula para $\vec{v}_{\text{paralelo}}$ aún se cumple. El vector $\vec{v}_{\text{perp}}$ está especificado por

$$\vec{v}_{\text{perp}} = \vec{v} - \vec{v}_{\text{paralelo}}$$

Por lo tanto, tenemos los siguientes resultados:

Proyección de $\vec{v}$ sobre la recta en la dirección del vector unitario $\vec{u}$

Si $\vec{v}_{\text{paralelo}}$ y $\vec{v}_{\text{perp}}$ son componentes de $\vec{v}$ que son paralela y perpendicular, respectivamente, a $\vec{u}$, entonces

$$\text{Proyección de } \vec{v} \text{ en } \vec{u} = \vec{v}_{\text{paralelo}} = (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u} \qquad \text{siempre que } \|\vec{u}\| = 1$$

$$\text{y } \vec{v} = \vec{v}_{\text{paralelo}} + \vec{v}_{\text{perp}} \quad \text{así que} \quad \vec{v}_{\text{perp}} = \vec{v} - \vec{v}_{\text{paralelo}}.$$

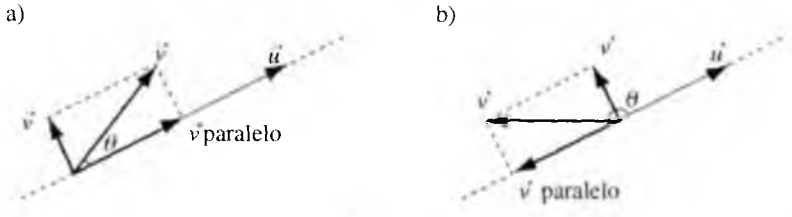


Figura 12.34 Descomposición de $\vec{v}$ en componentes paralela y perpendicular a $\vec{u}$
a) $0 < \theta < \pi/2$ b) $\pi/2 < \theta < \pi$

Ejemplo 7 La figura 12.35 muestra la fuerza que el viento ejerce sobre la vela de un bote. Encontrar la componente de la fuerza en la dirección en que navega el bote.

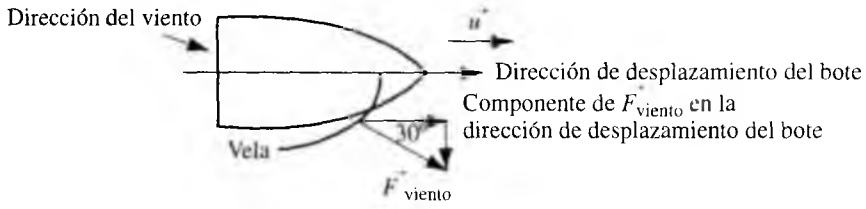


Figura 12.35 Viento que impulsa a un bote.

Solución Sea $\vec{u}$ un vector unitario en la dirección del viaje. La fuerza del viento sobre la vela forma un ángulo de 30° con $\vec{u}$. Por lo tanto, la componente de esta fuerza en la dirección de $\vec{u}$ es

$$\vec{F}_{\text{paralelo}} = (\vec{F} \cdot \vec{u})\vec{u} = \|\vec{F}\| (\cos 30°)\vec{u} = 0.87\|\vec{F}\|\vec{u}.$$

En consecuencia, el bote está siendo impulsado hacia adelante con alrededor del 87% de la fuerza debida al viento. (En realidad, la interacción entre el viento y la vela es mucho más compleja de lo que sugiere este modelo.)

Interpretación física del producto punto: trabajo

En física, la palabra "trabajo" tiene un significado un poco diferente de su significado usual. En esta ciencia, cuando una fuerza de magnitud F actúa sobre un objeto a través de una distancia d, se dice que el *trabajo*, W, realizado por la fuerza es

$$W = Fd$$

siempre que la fuerza y el desplazamiento estén en la misma dirección. Por ejemplo, si un cuerpo de 1 kg cae 10 metros bajo la fuerza de la gravedad, que es de 9.8 newtons, entonces el trabajo realizado por la gravedad es

$$W = (9.8 \text{ newtons}) \times (10 \text{ metros}) = 98 \text{ joules}.$$

¿Qué pasa si la fuerza y el desplazamiento no están en la misma dirección? Suponga que una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre un objeto a medida que éste avanza a lo largo de un vector de desplazamiento $\vec{d}$. Sea θ el ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{d}$. Primero, suponemos que $0 \le \theta \le \pi/2$. La figura 12.36 muestra cómo se puede descomponer $\vec{F}$ en componentes que son paralelos y perpendiculares a $\vec{d}$:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{paralelo}} + \vec{F}_{\text{perp}}$$

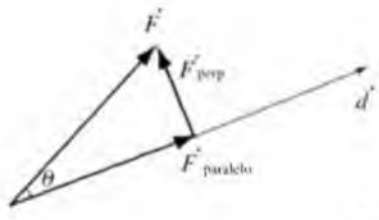


Figura 12.36 Descomposición de la fuerza $\vec{F}$ en dos fuerzas, una paralela a $\vec{d}$ y una perpendicular a $\vec{d}$.

Entonces el trabajo realizado por $\vec{F}$ está definido como

$$W = \|\vec{F}_{\text{paralelo}}\| \, \|\vec{d}\|.$$

En la figura 12.36 vemos que $\vec{F}_{\text{paralelo}}$ tiene magnitud $\|\vec{F}\| \cos \theta$. Por lo tanto, el trabajo está dado por el producto punto:

$$W = (\|\vec{F}\| \cos \theta)\, \|\vec{d}\| = \|\vec{F}\| \, \|\vec{d}\| \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{d}.$$

La fórmula $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ se cumple también cuando $\pi / 2 < \theta \leq \pi$. En ese caso, el trabajo realizado por la fuerza es negativo y el objeto se desplaza contra la fuerza. Por lo tanto, tenemos la siguiente definición:

El **trabajo**, W, realizado por la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre un objeto a lo largo de un desplazamiento $\vec{d}$, está dado por

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}.$$

Observe que si los vectores $\vec{F}$ y $\vec{d}$ son paralelos en la misma dirección, con magnitudes F y d, entonces $\cos\theta = \cos 0 = 1$, y $W = \|\vec{F}\| \, \|\vec{d}\| = Fd$, que es la definición original. Cuando los vectores son perpendiculares, $\cos \theta = \cos \pi / 2 = 0$, así que $W = 0$ y no se realiza trabajo en la acepción técnica de la palabra. Por ejemplo, si una persona carga una caja pesada en un cuarto a la misma altura, la gravedad no realiza ningún trabajo porque la fuerza de gravedad es vertical, mientras que el movimiento es horizontal.

Problemas para la sección 12.3

Para los problemas del 1 al 6, efectúe las siguientes operaciones en los vectores de tres dimensiones dados.

$\vec{a} = 2\vec{j} + \vec{k}$ $\quad \vec{b} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$ $\quad \vec{c} = \vec{i} + 6\vec{j}$ $\quad \vec{y} = 4\vec{i} - 7\vec{j}$ $\quad \vec{z} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$

1. $\vec{c} \cdot \vec{y}$
2. $\vec{a} \cdot \vec{z}$
3. $\vec{a} \cdot \vec{b}$
4. $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}$
5. $(\vec{a} \cdot \vec{y})\,(\vec{c} \cdot \vec{z})$
6. $((\vec{c} \cdot \vec{c})\vec{a}) \cdot \vec{c}$
7. Calcule el ángulo entre los vectores $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.
8. ¿Cuáles pares de los vectores $\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}$, $3\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$, $\vec{i} - \sqrt{3}\,\vec{j}$ son paralelos y cuáles son perpendiculares?
9. ¿Para qué valores de t son $\vec{u} = t\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = t\vec{i} + t\vec{j} - 2\vec{k}$ perpendiculares? ¿Hay valores de t para los cuales $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos?

En los problemas 10, 11 y 12 encuentre un vector normal al plano dado.

10. $2x + y - z = 5$
11. $z = 3x + 4y - 7$
12. $2(x - z) = 3(x + y)$

En los problemas del 13 al 17, encuentre una ecuación de un plano que satisfaga las condiciones dadas.

13. Perpendicular al vector $-\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ y pasa por el punto (1, 0, 2).
14. Perpendicular al vector $5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ y pasa por el punto (0, 1, −1).
15. Perpendicular al vector $2\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}$ y pasa por el punto (1, −1, 2).
16. Paralelo al plano $2x + 4y - 3z = 1$ y pasa por el punto (1, 0, −1).

17. Pasa por el punto (–2, 3, 2) y es paralelo a $3x + y + z = 4$.
18. Sea S el triángulo con vértices $A = (2, 2, 2)$, $B = (4, 2, 1)$ y $C = (2, 3, 1)$.
    a) Encuentre la longitud del lado más corto de S.
    b) Encuentre el coseno del ángulo BAC en el vértice A.
19. Escriba $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$ como la suma de dos vectores, uno paralelo a $\vec{d} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ y el otro perpendicular a $\vec{d}$.
20. Encuentre los puntos donde el plano $z = 5x - 4y + 3$ corta a cada uno de los ejes coordenados. Luego encuentre las longitudes de los lados y los ángulos del triángulo formado por estos puntos.
21. Encuentre el ángulo entre los planos $5(x - 1) + 3(y + 2) + 2z = 0$ y $x + 3(y - 1) + 2(z + 4) = 0$.
22. Un gimnasio de basquetbol mide 25 metros de alto, 80 de ancho y 200 de largo. Para un número artístico durante el medio tiempo, las porristas quieren tender dos cuerdas, una desde cada una de las dos esquinas sobre uno de los tableros hasta las esquinas diagonalmente opuestas del piso del gimnasio. ¿Cuál es el coseno del ángulo formado por las cuerdas cuando se cruzan?
23. Un vector de consumo de tres artículos está definido por $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, donde x_1, x_2 y x_3 son las cantidades consumidas de los tres artículos. Considere una restricción de presupuesto representada por la ecuación $\vec{p} \cdot \vec{x} = k$, donde $\vec{p}$ es el vector de precio de los tres artículos y k es una constante. Demuestre que la diferencia entre dos vectores de consumo correspondientes a puntos que satisfacen la misma restricción de presupuesto es perpendicular al vector de precio $\vec{p}$.
24. Una carrera de 100 metros se realiza en una pista orientada en la dirección del vector $\vec{v} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$. La velocidad del viento $\vec{w}$ es $5\vec{i} + \vec{j}$ km/h. Las reglas establecen que una velocidad legal del viento, medida en la dirección de la carrera, no debe pasar de 5 km/h. ¿Se descalificarán los resultados de la carrera debido a un viento ilegal? Justifique su respuesta.
25. Recuerde que en dos o tres dimensiones, si θ es el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$, el producto punto está dado por

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos \theta$$

Esta relación la usamos para definir el ángulo entre dos vectores en n dimensiones. Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son n vectores, entonces el producto punto, $\vec{v} \cdot \vec{w} = u_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n$, se utiliza para definir[2] el ángulo θ mediante la relación:

$$\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|} \qquad \text{siempre que } \|\vec{v}\|, \|\vec{w}\| \neq 0.$$

Ahora aplicamos esta idea de ángulo para medir qué tan cercanas están genéticamente dos poblaciones entre sí. La tabla 12.1 muestra las frecuencias relativas de cuatro alelos (variantes de un gene) en cuatro poblaciones.

TABLA 12.1

Alelo	Esquimal	Bantú	Inglesa	Coreana
A_1	0.29	0.10	0.20	0.22
A_2	0.00	0.08	0.06	0.00
B	0.03	0.12	0.06	0.20
O	0.67	0.69	0.66	0.57

[2] El resultado del problema 34 demuestra que la cantidad del lado derecho de esta ecuación está entre –1 y 1, así que la definición tiene sentido.

Sean $\vec{a}_1$ el vector que muestra las frecuencias relativas en la población de esquimales;

$\vec{a}_2$ el vector que muestra las frecuencias relativas en la población bantú;

$\vec{a}_3$ el vector que muestra las frecuencias relativas en la población inglesa;

$\vec{a}_4$ el vector que muestra las frecuencias relativas en la población coreana.

La distancia genética entre dos poblaciones está definida como el ángulo entre los vectores correspondientes. Mediante esta definición, ¿la población inglesa está más cerca genéticamente de la bantú o de la coreana? Explique[3].

26. Demuestre cómo cada una de las propiedades del producto punto del recuadro de la página 81 se deriva de la definición algebraica del producto punto:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

27. ¿Cuál es la interpretación geométrica de la propiedad 2 del producto punto del recuadro de la página 81?

28. Demuestre que los vectores $(\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$ y $\vec{c}$ son perpendiculares.

29. Demuestre que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores tales que

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}$$

para todo vector $\vec{w}$, entonces

$$\vec{u} = \vec{v}.$$

30. La figura 12.37 muestra que, dados tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, la suma de las componentes de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en la dirección de $\vec{u}$ es el componente de $\vec{v} + \vec{w}$ en la dirección de $\vec{u}$. (Aunque la figura está dibujada en dos dimensiones, este resultado también se cumple en tres dimensiones.) Utilice esta figura para explicar por qué la definición geométrica del producto punto satisface $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.

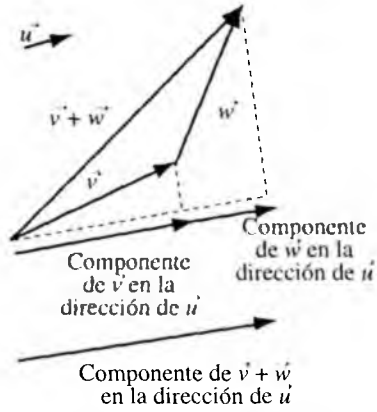

$\vec{u}$
$\vec{v} + \vec{w}$
$\vec{w}$
$\vec{v}$
Componente de $\vec{w}$ en la dirección de $\vec{u}$
Componente de $\vec{v}$ en la dirección de $\vec{u}$
Componente de $\vec{v} + \vec{w}$ en la dirección de $\vec{u}$

Figura 12.37 La componente de $\vec{v} + \vec{w}$ en la dirección de $\vec{u}$ es la suma de las componentes de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en esa dirección.

31. a) Mediante la definición geométrica del producto punto, demuestre que

$$\vec{u} \cdot (-\vec{v}) = -(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

[3] Adaptado de *"Models and Estimation Procedures"* de Cavalli-Sforza y Edwards, Am. J. Hum. Genet., vol. 19 ,1967, pp. 223–57.

12.4

Área d

[Sugerencia: ¿qué le pasa al ángulo cuando multiplicamos $\vec{v}$ por -1?]

b) Mediante la definición geométrica del producto punto, demuestre que para cualquier escalar negativo λ

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$$
$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

32. La ley de los cosenos para un triángulo con lados a, b y c y con el ángulo C opuesto al lado c, estipula que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

En la página 76 usamos la ley de los cosenos para demostrar que las dos definiciones del producto punto son equivalentes. En este problema, deberá usarse la definición geométrica del producto punto y sus propiedades (recuadro de la página 81) para demostrar la ley de los cosenos. [Sugerencia: sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores de desplazamiento desde C a los otros dos vértices, y exprese c^2 en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.]

33. Utilice los siguientes pasos y los resultados de los problemas 30 y 31 para demostrar (sin trigonometría) que las definiciones geométrica y algebraica del producto punto son equivalentes.

Siga estos pasos. Sean $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ y $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ cualesquier vectores. Escriba $(\vec{u} \cdot \vec{v})_{\text{geom}}$ para el resultado del producto punto calculado geométricamente. Sustituya $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ y utilice los problemas 30 y 31 para expandir $(\vec{u} \cdot \vec{v})_{\text{geom}}$. A continuación sustituya $\vec{v}$ y expanda. Finalmente, calcule geométricamente los productos punto $\vec{i} \cdot \vec{i}$, $\vec{i} \cdot \vec{j}$, etcétera.

34. Suponga que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son dos vectores cualesquiera. Considere la siguiente función de t:

$$q(t) = (\vec{v} + t\vec{w}) \cdot (\vec{v} + t\vec{w})$$

a) Explique por qué $q(t) \geq 0$ para toda t real.
b) Expanda $q(t)$ como un polinomio cuadrático en t usando las propiedades de la página 81.
c) Mediante el discriminante de la fórmula cuadrática, demuestre que

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|.$$

12.4 EL PRODUCTO CRUZ

En la sección anterior combinamos dos vectores para obtener un número, el producto punto. En esta sección vemos otra manera de combinar dos vectores, esta vez para obtener un vector, el *producto cruz*. Dos vectores cualesquiera en tres dimensiones forman un paralelogramo. Definimos el producto cruz usando este paralelogramo.

Área de un paralelogramo

Considere el paralelogramo formado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ con un ángulo de θ entre ellos. Entonces la figura 12.38 demuestra que

$$\text{área de paralelogramo} = \text{base} \cdot \text{altura} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \operatorname{sen} \theta.$$

¿Cómo se calcularía el área del paralelogramo si se dieran $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en componentes, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ y $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$? El problema 27 de la página 97 demuestra que si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ están en el plano xy, $v_3 = w_3 = 0$, entonces

$$\text{área de paralelogramo} = |v_1 w_2 - v_2 w_1|.$$

¿Qué pasa si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no están en el plano xy? El producto cruz hace posible calcular el área del paralelogramo formado por dos vectores cualesquiera.

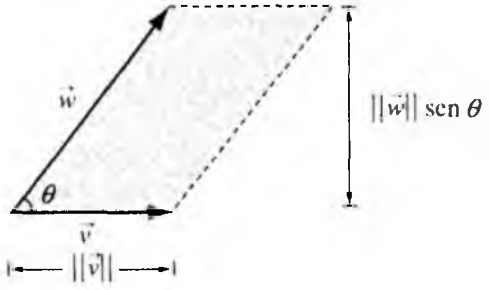


Figura 12.38 El paralelogramo formado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tiene área = $\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|$ sen θ.

Definición del producto cruz

Se define el producto cruz de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, escrito $\vec{v} \times \vec{w}$, como el vector perpendicular tanto a $\vec{v}$ como a $\vec{w}$. La magnitud de este vector es el área del paralelogramo formado por los dos vectores. La dirección de $\vec{v} \times \vec{w}$ está dada por el vector normal, $\vec{n}$, al plano definido por $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Si se necesita que $\vec{n}$ sea un vector unitario, hay dos opciones para $\vec{n}$, que salen del plano en direcciones opuestas. Escogemos una mediante la siguiente regla (véase Fig. 12.39):

La regla de la mano derecha: Ponga $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de modo que sus colas coincidan y coloque los dedos de su mano derecha alrededor del menor de los dos ángulos de $\vec{v}$ a $\vec{w}$; el dedo pulgar apunta en la dirección del vector normal, $\vec{n}$.

Como el producto punto, existen dos definiciones equivalentes del producto cruz:

Las siguientes dos definiciones del producto cruz o producto vectorial $\vec{v} \times \vec{w}$ son equivalentes:

- **Definición geométrica**
  Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son paralelos, entonces

$$\vec{v} \times \vec{w} = \left\{ \begin{array}{l} \text{área del paralelogramo} \\ \text{con lados } \vec{v} \text{ y } \vec{w} \end{array} \right\} \vec{n} = (\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\| \text{ sen } \theta)\,\vec{n},$$

  donde $0 \leq \theta \leq \pi$ es el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y $\vec{n}$ el vector unitario perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ apuntando en la dirección dada por la regla de la mano derecha. Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos, entonces $\vec{v} \times \vec{w} = 0$.

- **Definición algebraica**

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_2w_3 - v_3w_2)\vec{i} + (v_3w_1 - v_1w_3)\vec{j} + (v_1w_2 - v_2w_1)\vec{k}$$

  donde $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ y $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$.

Observe que la magnitud de la componente $\vec{k}$ es el área de un paralelogramo bidimensional y las otras dos componentes tienen forma similar. Los problemas 25 y 26 que aparecen al final de esta sección demuestran que las definiciones geométrica y algebraica del producto cruz dan el mismo resultado.

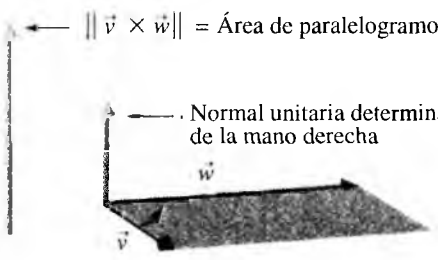
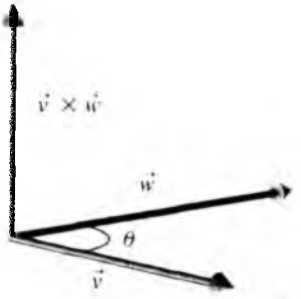


Figura 12.39 Área del parelelogramo $\|\vec{v} \times \vec{w}\|$.



Fugura 12.40 El producto cruz $\vec{v} \times \vec{w}$.

A diferencia del producto punto, el producto cruz sólo se define para vectores tridimensionales. La definición geométrica demuestra que el producto cruz es invariante bajo una rotación. Imagine los dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ como dos barras metálicas soldadas. Suelde una tercera barra cuya dirección y longitud corresponda a $\vec{v} \times \vec{w}$ (véase Fig. 12.40). Entonces, no importa cómo movamos este conjunto de barras, la tercera será, sin embargo, el producto cruz de las dos primeras.

La definición algebraica se recuerda con más facilidad si se la escribe como un determinante de 3×3 (véase apéndice C).

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (v_2w_3 - v_3w_2)\vec{i} + (v_3w_1 - v_1w_3)\vec{j} + (v_1w_2 - v_2w_1)\vec{k}.$$

Ejemplo 1 Encontrar $\vec{i} \times \vec{j}$ y $\vec{j} \times \vec{i}$

Solución Los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ tienen magnitud 1 y el ángulo entre ellos es $\pi/2$. Por la regla de la mano derecha, el vector $\vec{i} \times \vec{j}$ está en la dirección de $\vec{k}$, de modo que $\vec{n} = \vec{k}$ y se tiene

$$\vec{i} \times \vec{j} = \left(\|\vec{i}\| \, \|\vec{j}\| \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) \vec{k} = \vec{k}.$$

De igual manera, la regla de la mano derecha establece que la dirección de $\vec{j} \times \vec{i}$ es $-\vec{k}$, así que

$$\vec{j} \times \vec{i} = \left(\|\vec{i}\| \, \|\vec{j}\| \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) \vec{k} = \vec{k}.$$

Cálculos semejantes demuestran que $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ y $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

Ejemplo 2 Para cualquier vector $\vec{v}$, encontrar $\vec{v} \times \vec{v}$.

Solución Como $\vec{v}$ es paralelo a sí mismo, $\vec{v} \times \vec{v} = 0$.

Ejemplo 3 Encontrar el producto cruz de $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ y $\vec{w} = 3\vec{i} + \vec{k}$ y comprobar que el producto cruz es perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Solución Si se escribe $\vec{v} \times \vec{w}$ como determinante y se expande en tres determinantes de dos por dos, tenemos

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(1(1) - 0(-2)) - \vec{j}\,(2(1) - 3(-2)) + \vec{k}\,(2(0) - 3(1))$$

$$= \vec{i} - 8\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Para comprobar que $\vec{v} \times \vec{w}$ es perpendicular a $\vec{v}$, calculamos el producto punto:

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) \cdot (\vec{i} - 8\vec{j} - 3\vec{k}) = 2 - 8 + 6 = 0.$$

Análogamente,

$$\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (3\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k}) \cdot (\vec{i} - 8\vec{j} - 3\vec{k}) = 3 + 0 - 3 = 0.$$

Por lo tanto, $\vec{v} \times \vec{w}$ es perpendicular a $\vec{v}$ y a $\vec{w}$.

Propiedades del producto cruz

La regla de la mano derecha establece que $\vec{v} \times \vec{w}$ y $\vec{w} \times \vec{v}$ apuntan en direcciones opuestas. Las magnitudes de $\vec{v} \times \vec{w}$ y $\vec{w} \times \vec{v}$ son las mismas, así que $\vec{w} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{w})$ (véase Fig. 12.41).

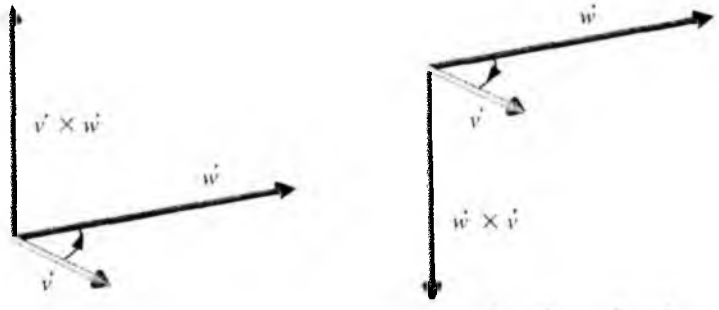


Figura 12.41 Diagrama que muestra que $\vec{v} \times \vec{w} = -(\vec{w} \times \vec{v})$.

Esto explica la primera de las siguientes propiedades. Las otras dos se derivan en los problemas 17, 21 y 25 al final de esta sección.

Propiedades del producto cruz

Para los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y el escalar λ

1. $\vec{w} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{w})$
2. $(\lambda\vec{v}) \times \vec{w} = \lambda\,(\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \times (\lambda\vec{w})$
3. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.

Equivalencia de las dos definiciones del producto cruz

Los problemas 22 y 25 de la página 96 utilizan argumentos geométricos para demostrar que el producto cruz se distribuye sobre la suma. A partir de este resultado, el problema 26 demuestra cómo es que la fórmula de la definición algebraica del producto cruz puede derivarse de la definición geométrica.

La ecuación de un plano que pasa por tres puntos

La ecuación de un plano está determinada por un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ del plano, y un vector normal, $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$:

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0.$$

Sin embargo, el plano también puede estar determinado por tres puntos en el mismo (siempre que no se encuentren en una misma recta). En ese caso podemos encontrar una ecuación del plano si determinamos primero dos vectores del plano, y luego encontramos un vector normal usando el producto cruz, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4 Encontrar una ecuación del plano que contenga los puntos $P = (1, 3, 0)$, $Q = (3, 4, -3)$ y $R = (3, 6, 2)$.

Solución Como los puntos P y Q están en el plano, el vector de desplazamiento entre ellos, $\vec{PQ}$, está en el plano, donde

$$\vec{PQ} = (3 - 1)\vec{i} + (4 - 3)\vec{j} + (-3 - 0)\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}.$$

El vector de desplazamiento $\vec{PR}$ también está en el plano, donde

$$\vec{PR} = (3 - 1)\vec{i} + (6 - 3)\vec{j} + (2 - 0)\vec{k} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Por lo tanto, un vector normal, $\vec{n}$, al plano está dado por

$$\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 10\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Como el punto (1, 3, 0) está en el plano, la ecuación del plano es

$$11\,(x - 1) - 10\,(y - 3) + 4\,(z - 0) = 0,$$

lo que se simplifica a

$$11x - 10y + 4z = -19$$

Compruebe que P, Q y R satisfacen la ecuación del plano.

Áreas y volúmenes usando el producto cruz y determinantes

Podemos usar el producto cruz para calcular el área del paralelogramo con lados $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Decimos que $\vec{v} \times \vec{w}$ es el *vector de área* del paralelogramo. Según la definición geométrica del producto cruz, $\vec{v} \times \vec{w}$ es normal al paralelogramo y tenemos el siguiente resultado:

El **área de un paralelogramo** con lados $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ y $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$ es

$$\text{área} = \|\vec{v} \times \vec{w}\|, \qquad \text{donde } \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Ejemplo 5 Encontrar el área del paralelogramo con lados $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ y $\vec{w} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Solución Calculamos el producto cruz:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (2+9)\vec{i} - (4+3)\vec{j} + (6-1)\vec{k} = 11\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}.$$

El área del paralelogramo con lados $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es la magnitud del vector $\vec{v} \times \vec{w}$:

$$\text{área} = \|\vec{v} \times \vec{w}\| = \sqrt{11^2 + (-7)^2 + 5^2} = \sqrt{195}.$$

Volumen de un paralelepípedo

Considere el paralelepípedo con lados formados por $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ (véase Fig. 12.42). Como la base está formada por los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$, se tiene

$$\text{área de la base del paralelepípedo} = \|\vec{b} \times \vec{c}\|.$$

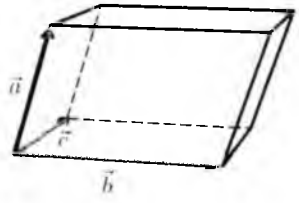


Figura 12.42 Volumen de un paralelepípedo.

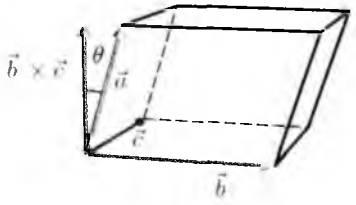


Figura 12.43 Se dice que los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ están positivamente orientados.

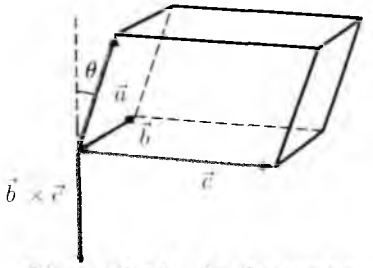


Figura 12.44 Se dice que los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ están negativamente orientados.

Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ se pueden colocar como en la figura 12.43 o como en la 12.44. En cualquier caso,

$$\text{altura del paralelepípedo} = \|\vec{a}\| \cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b} \times \vec{c}$. En la figura 12.43, el ángulo θ es menor de $\pi/2$, por lo que el producto $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$, llamado el *producto triple*, es positivo. Por lo tanto, en este caso

$$\text{volumen del paralelepípedo} = \text{base} \times \text{altura} = \|\vec{b} \times \vec{c}\| \cdot \|\vec{a}\| \cos\theta = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}.$$

En la figura 12.44, el ángulo $\pi - \theta$, entre $\vec{a}$ y $\vec{b} \times \vec{c}$ mide más de $\pi/2$, así que el producto $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$ es negativo. Por lo tanto, en este caso se tiene

$$\begin{aligned} \text{volumen} &= \text{base} \cdot \text{altura} = \|\vec{b} \times \vec{c}\| \cdot \|\vec{a}\| \cos\theta = -\|\vec{b} \times \vec{c}\| \cdot \|\vec{a}\| \cos(\pi - \theta) \\ &= -(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = |(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}| . \end{aligned}$$

Por lo tanto, en ambos casos el volumen está dado por $|(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}|$. Con determinantes, puede escribirse

El volumen de un paralelepípedo con lados $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ está dado por

$$\text{volumen} = |(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}| = \text{valor absoluto del determinante } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Problemas para la sección 12.4

1. Encuentre $\vec{k} \times \vec{j}$.
2. ¿Es igual $\vec{i} \times \vec{i}$ que $\vec{i} \cdot \vec{i}$? Explique su respuesta.

En los problemas del 3 al 6, encuentre $\vec{a} \times \vec{b}$.

3. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}$ y $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$.
4. $\vec{a} = -\vec{i}$ y $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$.
5. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
6. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$
7. Dado $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, encuentre $\vec{a} \times \vec{b}$ y compruebe que $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$.
8. Si $\vec{v} \times \vec{w} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ y $\vec{v} \cdot \vec{w} = 3$, encuentre $\tan\theta$ donde θ es el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
9. Suponga que $\vec{a}$ es un vector fijo de longitud 3 en la dirección positiva de las x, y el vector $\vec{b}$ de longitud 2 está libre para girar en el plano xy. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la magnitud de $\vec{a} \times \vec{b}$? ¿Qué dirección toma $\vec{a} \times \vec{b}$ a medida que gira $\vec{b}$?
10. Está usted en un simulador de combate aéreo y el monitor le indica que han disparado dos misiles a su avión, en las direcciones $3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$ y $\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$. ¿En qué dirección debe virar para tener la máxima posibilidad de esquivar ambos misiles?

Encuentre una ecuación para el plano que pase por los puntos de los problemas 11 y 12.

11. (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).
12. (3, 4, 2), (–2, 1, 0), (0, 2, 1).
13. Dados los puntos $P = (0, 1, 0)$, $Q = (-1, 1, 2)$ y $R = (2, 1, -1)$, encuentre
    a) El área del triángulo PQR.
    b) La ecuación para un plano que contenga P, Q y R.
14. Encuentre un vector paralelo a la intersección de los planos $2x - 3y + 5z = 2$ y $4x + y - 3z = 7$.
15. Encuentre la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a la recta de intersección de los planos del problema 14.
16. Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto (4, 5, 6) y es perpendicular a la recta de intersección de los planos del problema 14.

17. Utilice la definición algebraica para el producto cruz para comprobar que

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}).$$

18. En este problema se llega a la definición algebraica del producto cruz por un camino diferente. Sea $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ y $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$. Se busca un vector $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ que sea perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Utilice este requisito para formular dos ecuaciones para x, y y z. Elimine x y despeje y en términos de z. Luego elimine y y despeje x en términos de z. Como z puede ser cualquier valor (la dirección de $\vec{v}$ no se afecta), seleccione el valor para z que elimine el denominador de la ecuación obtenida. ¿Cómo se compara la expresión resultante para v con la fórmula derivada en la página 91?

19. Suponga que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores del plano xy, tales que $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ y $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ con $0 < a_2 < a_1$ y $0 < b_2 < b_1$.
    a) Trace $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y el vector $\vec{c} = -a_2\vec{i} + a_1\vec{j}$. Sombree el paralelogramo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
    b) ¿Cuál es la relación entre $\vec{a}$ y $\vec{c}$? [Sugerencia: Encuentre $\vec{c} \cdot \vec{a}$ y $\vec{c} \cdot \vec{c}$.]
    c) Encuentre $\vec{c} \cdot \vec{b}$.
    d) Explique por qué $\vec{c} \cdot \vec{b}$ da el área del paralelogramo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
    e) Verifique que en este caso $\vec{a} \times \vec{b} = (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$.

20. Si $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, demuestre que

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}.$$

Geométricamente, ¿qué implica esto en relación con $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$?

21. Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores diferentes de cero, utilice la definición geométrica del producto cruz para explicar por qué

$$(\lambda\vec{v}) \times \vec{w} = \lambda(\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \times (\lambda\vec{w}).$$

Considere los casos en que $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda < 0$ separadamente.

22. Utilice un paralelepípedo para demostrar que $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ para cualesquier vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

23. Demuestre que $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

24. Para los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, sea $\vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})$.
    a) Demuestre que $\vec{c}$ está en el plano que contiene a $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
    b) Demuestre que $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ y $\vec{b} \cdot \vec{c} = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$. [Sugerencia: Utilice los problemas 22 y 23.]
    c) Demuestre que

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}) = \|\vec{a}\|^2\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}$$

25. Utilice el resultado del problema 22 para demostrar que el producto cruz se distribuye sobre la suma. Primero utilice la distributividad para el producto punto para demostrar que para cualquier vector $\vec{d}$,

$$[(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}\,] \cdot \vec{d} = [(\vec{a} \times \vec{c}\,) + (\vec{b} \times \vec{c}\,)] \cdot \vec{d}.$$

A continuación, demuestre que para cualquier vector $\vec{d}$,

$$[((\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}) - (\vec{a} \times \vec{c}) - (\vec{b} \times \vec{c})] \cdot \vec{d} = 0.$$

Finalmente, explique por qué se puede concluir que

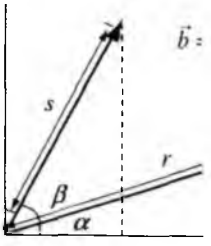
$$(\vec{a} + \vec{b}\,) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}).$$

26. Utilice el hecho de que $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$ $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$ y así sucesivamente, junto con las propiedades del producto cruz de la página 92 para derivar la definición algebraica para el producto cruz.

27. S
12
a)

b)

28. C
ur
ca
ig



1. Da
a)

2. La
a)

b)

3. Enc
y cu

27. Sean $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ y $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ dos vectores no paralelos en dos dimensiones, como en la figura 12.45.
    a) Utilice la identidad $\text{sen}(\beta - \alpha) = (\text{sen}\,\beta\cos\alpha - \cos\beta\,\text{sen}\,\alpha)$ para verificar la fórmula para el área del paralelogramo formado por a y b:

$$\text{Área del paralelogramo} = |a_1b_2 - a_2b_1|$$

    b) Demuestre que $a_1b_2 - a_2b_1$ es positivo cuando la rotación de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ es en sentido contrario a las manecillas del reloj, y negativo cuando es en el sentido de las manecillas del reloj.
28. Considere el tetraedro determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ de la figura 12.46. El *vector de área* de una cara es un vector perpendicular a la cara, apuntando hacia afuera, cuya magnitud es el área de la cara. Demuestre que la suma de los cuatro vectores de área que apuntan hacia afuera de las caras es igual al vector cero.

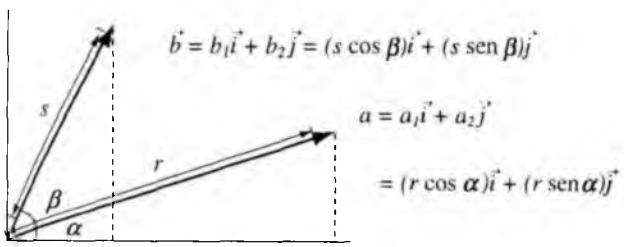


Figura 12.45

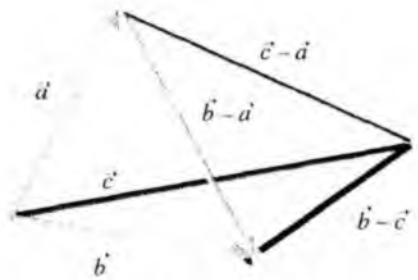


Figura 12.46

PROBLEMAS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO DOCE

1. Dados los vectores de desplazamiento $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura 12.47, dibuje los siguientes vectores:
    a) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{u}$ b) $\vec{v} + (\vec{v} + \vec{u})$ c) $(\vec{u} + \vec{u}) + \vec{u}$

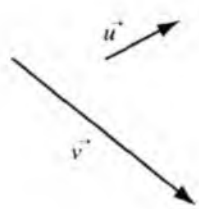


Figura 12.47

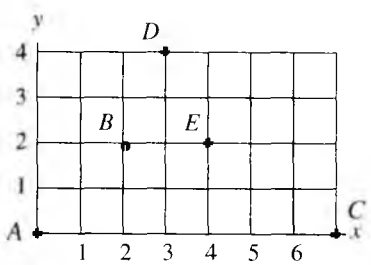


Figura 12.48

2. La figura 12.48 muestra los puntos A, B, C, D y E.
    a) Lea las coordenadas de los cinco puntos y descomponga en sus componentes los siguientes dos vectores: $\vec{u} = (2.5)\overrightarrow{AB} + (-0.8)\overrightarrow{CD}$, $v = (2.5)\overrightarrow{BA} - (-0.8)\overrightarrow{CD}$.
    b) ¿Cuál es la relación entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$? ¿Por qué se esperaba esto?
3. Encuentre las componentes de un vector $\vec{p}$ que tiene la misma dirección que $\overrightarrow{EA}$ en la figura 12.48 y cuya longitud es igual a dos unidades.

4. Para cada uno de los enunciados a continuación, conteste las preguntas siguientes: ¿Tiene sentido el enunciado? Si es así, ¿es cierto para todas las posibles opciones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$? Si no, ¿por qué no? Utilice oraciones completas para sus respuestas.
   a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ b) $\vec{a} + \|\vec{b}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\|$ c) $\|\vec{b} + \vec{a}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\|$
   d) $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.
5. En la figura 12.49 aparecen dos lados adyacentes de un hexágono regular como los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Marque los lados restantes en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

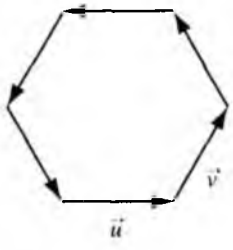


Figura 12.49

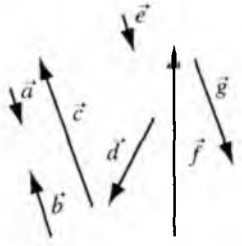


Figura 12.50

6. La figura 12.50 muestra siete vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ y $\vec{g}$.
   a) ¿Son iguales dos cualesquiera de estos vectores? Anote todos los pares iguales.
   b) ¿Se puede encontrar un escalar x de modo que $\vec{a} = x\vec{g}$? Si es así, encuentre x; si no, explique por qué no.
   c) La misma pregunta que en $\vec{b}$, pero para la ecuación $\vec{b} = x\vec{d}$.
   d) ¿Puede despejar los escalares u y v de la ecuación $\vec{f} = u\vec{c} + v\vec{d}$? Si es así, encuéntrelos; si no, explique por qué.
7. ¿Para qué valores de t son paralelos los siguientes pares de vectores?
   a) $2\vec{i} + (t^2 + \frac{2}{3}t + 1)\vec{j} + t\vec{k}$, $6\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}$
   b) $t\vec{i} + \vec{j} + (t - 1)\vec{k}$, $2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$
   c) $2t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}$, $6\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$.

Utilice la definición geométrica para calcular los productos cruz de los problemas 8 y 9.

8. $2\vec{i} \times (\vec{i} + \vec{j})$ 9. $(\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{i} - \vec{j})$

Calcule los productos cruz para los problemas 10 y 11, usando la definición algebraica.

10. $\left((\vec{i} + \vec{j}) \times \vec{i}\right) \times \vec{j}$ 11. $(\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{i} \times \vec{j})$

12. ¿Cierto o falso?: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ para toda $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Explique su respuesta.
13. Encuentre el área del triángulo con vértices $P = (-2, 2, 0)$, $Q = (1, 3, -1)$ y $R = -4, 2, 1)$ usando el producto cruz.
14. Encuentre la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo a $z = 4x - 3y + 8$.
15. Encuentre un vector normal al plano $4(x - 1) + 6(z + 3) = 12$.
16. Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos (0, 0, 2), (0, 3, 0), (5, 0, 0).
17. Considere el plano $5x - y + 7z = 21$.
   a) Encuentre un punto sobre el eje x en este plano.
   b) Encuentre otros dos puntos en el plano.

c) Encuentre un vector perpendicular al plano.
d) Encuentre un vector paralelo al plano.

18. Dados los puntos $P = (1, 2, 3)$, $Q = (3, 5, 7)$ y $R = (2, 5, 3)$, encuentre:
a) Un vector unitario perpendicular a un plano que contenga P, Q, R.
b) El ángulo entre PQ y PR.
c) El área del triángulo PQR.
d) La distancia de R a la recta que pasa por P y Q.

19. Encuentre todos los vectores $\vec{v}$ del plano tales que $\|\vec{v}\| = 1$ y $\|\vec{v} + \vec{i}\| = 1$.

20. Encuentre todos los vectores $\vec{w}$ en el espacio tales que $\|\vec{w}\| = 1$ y $\|\vec{w} + \vec{i}\| = 1$. Describa este conjunto geométricamente.

21. El conjunto de poblaciones de cada uno de los 50 estados de Estados Unidos, ¿es una cantidad vectorial o escalar?

22. El vector de precio de frijol, arroz y tofu es (0.30, 0.20, 0.50) en dólares por libra. Expréselo en dólares por onza.

23. Un objeto está atado a una cuerda inelástica, a un punto fijo, y gira 30 veces por minuto en un plano horizontal. Demuestre que la rapidez del objeto es constante pero la velocidad no lo es. ¿Qué indica esto acerca de la aceleración?

24. Un objeto se desplaza en sentido contrario a las manecillas del reloj a una rapidez constante alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 1$, donde x y y se miden en metros. Completa una revolución cada minuto.
a) ¿Cuál es su rapidez?
b) ¿Cuál es su vector de velocidad 30 segundos después de que pasa por el punto (1, 0)? ¿Cambia la respuesta si el objeto se desplaza en el sentido de las manecillas del reloj? Explique.

25. En el juego de tiro al blanco con láser, una persona dispara una pistola láser inofensiva y trata de acertar a un blanco puesto en la cintura de otros jugadores. Supóngase que el lector está de pie en el origen de un sistema tridimensional de coordenadas y que el plano xy es el piso. Supóngase que la altura de la cintura es 3 pies sobre el nivel del piso y que el nivel de la vista está a 5 pies sobre el piso. Tres de sus amigos son sus oponentes; uno está de pie de modo que su blanco está a 30 pies a lo largo del eje x, el otro está pecho tierra de modo que su blanco está en el punto $x = 20$, $y = 15$, y el tercero está emboscado de manera que su blanco está en un punto a 8 pies sobre el punto $x = 12$, $y = 30$.
a) Si el lector apunta con una pistola al nivel de la vista, encuentre el vector de su pistola a cada uno de los tres blancos.
b) Si dispara desde el nivel de la cintura, con su pistola a un pie a la derecha del centro de su cuerpo mirando a lo largo del eje x, encuentre el vector desde su pistola a cada uno de los tres blancos.

26. Un aeropuerto está en el punto (200, 10, 0) y un avión que se aproxima está en el punto (550, 60, 4). Suponga que el plano xy es horizontal, con el eje x apuntando hacia el este y el eje y apuntando hacia el norte. También suponga que el eje z está hacia arriba y que todas las distancias se miden en kilómetros. El avión vuela al oeste a una altitud constante y una rapidez de 500 km/h durante media hora. Luego desciende a 200 km/h, dirigiéndose en línea recta hacia el aeropuerto.
a) Encuentre el vector de velocidad del avión cuando vuela a altitud constante.
b) Encuentre las coordenadas del punto en que el avión empieza a descender.
c) Encuentre un vector que represente la velocidad del avión cuando está descendiendo.

27. Un barco está siendo remolcado por dos remolcadores; el mayor de éstos ejerce una fuerza 25% mayor que el menor y a un ángulo de 30 grados al norte del este. ¿En qué dirección debe jalar el remolcador menor para asegurarse que el barco se desplace al este?

28. Un hombre desea remar la distancia más corta posible de norte sur, para cruzar un río cuyas aguas corren a 4 km/h desde el este. Puede remar a 5 km/h.
    a) ¿En qué dirección debe remar?
    b) Si sopla un viento de 10 km/h del sudoeste, ¿en qué dirección debe remar para tratar de ir directamente a la otra orilla? ¿Qué pasa?
29. a) Un vector $\vec{v}$ de magnitud v hace un ángulo α con el eje positivo de las x, un ángulo β con el eje positivo de las y, y un ángulo γ con el eje positivo de las z. Demuestre que
    $$\vec{v} = v \cos \alpha\, i + v \cos \beta\, j + v \cos \gamma\, k.$$
    b) Cos α, cos β, y cos γ se llaman *cosenos directores*. Demuestre que
    $$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$
30. Encuentre el vector $\vec{v}$ con todas las siguientes propiedades:
    i) Magnitud 10.
    ii) ángulo de 45° con el eje x positivo
    iii) ángulo de 75° con el eje y positivo
    iv) Componente k positiva.
31. Mediante vectores, demuestre que las bisectrices perpendiculares de un triángulo se cortan en un punto.
32. Encuentre la distancia desde el punto $P = (2, -1, 3)$ al plano $2x + 4y - z = -1$.
33. Encuentre una ecuación del plano que pasa por los puntos (1, 1, 1), (1, 4, 5) y (–3, –2, 0).
34. Dos rectas en el espacio están sesgadas si no son paralelas y no se cortan. Determine la distancia mínima entre dos de estas rectas.

ır un río cuyas aguas

ara tratar de ir direc-

n ángulo β con el eje

ositivo

ulo se cortan en un

-3, –2, 0).

termine la distancia

CAPÍTULO TRECE

DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Para una función de una variable, $y = f(x)$, la derivada $dy/dx = f'(x)$ indica la rapidez de cambio de y con respecto a x. Para una función de dos variables, $z = f(x, y)$, no tiene sentido preguntarse por *la* rapidez de cambio porque x y y pueden variar de manera independiente, o ambas al mismo tiempo. Sí podemos, sin embargo, considerar la rapidez de cambio con respecto a cada una de las variables independientes. En este capítulo se estudian estas *derivadas parciales*, y varias maneras de usarlas para obtener una idea completa de cómo varía una función.

13.1 DERIVADA PARCIAL

La derivada de una función de una variable mide su rapidez de cambio. En esta sección vemos cómo es que una función de dos variables tiene dos rapideces de cambio: una según cambia x (con y constante) y otra según cambia y (con x constante).

Rapidez de cambio de la temperatura de una barra metálica: un problema de una variable

Imaginemos una barra metálica, calentada de manera irregular, orientada a lo largo del eje x, con su extremo izquierdo en el origen y x medida en metros (véase Fig. 13.1). Sea $u(x)$ la temperatura (en °C) de la barra en el punto x. La tabla 13 indica los valores de $u(x)$. Vemos que la temperatura aumenta a medida que avanzamos a lo largo de la barra, llegando a su máximo en $x = 4$, y luego empieza a disminuir.

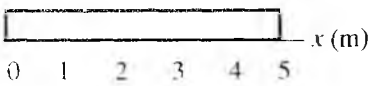


Figura 13.1 Barra metálica calentada de modo irregular.

TABLA 13.1 *Temperatura u (x) de la barra*

x (m)	0	1	2	3	4	5
$u(x)$ (°C)	125	128	135	160	175	160

Ejemplo 1 Calcular la derivada $u'(2)$ usando la tabla 13.1 y explicar lo que significa la respuesta en términos de temperatura.

Solución La derivada $u'(2)$ está definida como el límite del cociente de dos diferencias:

$$u'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{u(2+h) - u(2)}{h}.$$

Si se escoge $h = 1$ de modo que podamos usar la información de la tabla 13.1, tenemos

$$u'(2) = \lim \frac{u(2+1) - u(2)}{1} = \frac{160 - 135}{1} = 25.$$

Esto significa que la temperatura aumenta con una rapidez aproximada de 25°C por metro, conforme avanzamos de izquierda a derecha, pasando de $x = 2$.

Rapidez de cambio de la temperatura de una placa metálica

Imaginemos una placa metálica rectangular, delgada, calentada de manera irregular, que se encuentra en el plano xy con su esquina inferior izquierda en el origen y x y y medidas en metros. La temperatura (en °C) en el punto (x, y) es $T(x, y)$ véase la figura 13.2 y la tabla 13.2. ¿Cómo varía T cerca del punto (2, 1)? Consideremos la línea horizontal $y = 1$ que contiene el punto (2, 1). La temperatura a lo largo de esta línea es la sección transversal, $T(x, 1)$, de la función $T(x, y)$ con $y = 1$. Suponga que escribimos $u(x) = T(x, 1)$.

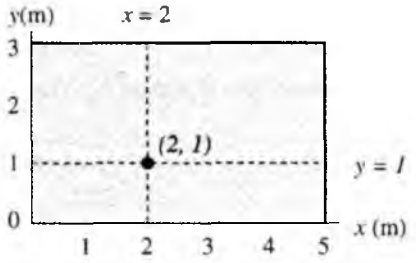


Figura 13.2 Placa metálica calentada de modo irregular.

TABLA 13.2 *Temperatura (°C) de una placa metálica*

y (m)							
	3	85	90	**110**	135	155	180
	2	100	110	**120**	145	190	170
	1	**125**	**128**	**135**	**160**	**175**	**160**
	0	120	135	**155**	160	160	150
		0	1	2	3	4	5
				x (m)			

¿Cuál es el significado de la derivada $u'(2)$? Es la rapidez de cambio de la temperatura T en la dirección x en el punto (2, 1), conservando y fija. Denotemos esta rapidez de cambio por $T_x(2, 1)$, así que

$$T_x(2, 1) = u'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{u(2+h) - u(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{T(2+h, 1) - T(2, 1)}{h}$$

$T_x(2, 1)$ recibe el nombre de *derivada parcial de T con respecto a x en el punto* (2, 1). Al tomar $h = 1$, podemos leer valores de T del renglón con $y = 1$ de la tabla 13.2, y resulta

$$T_x(2, 1) \approx \frac{T(3, 1) - T(2, 1)}{1} = \lim \frac{160 - 135}{1} = 25°\text{C/m}.$$

El hecho de que $T_x(2, 1)$ sea positiva significa que la temperatura de la placa aumenta a medida que avanzamos más allá del punto (2, 1) en la dirección de x creciente (es decir, horizontalmente de izquierda a derecha en la figura 13.2).

Ejemplo 2 Calcular la rapidez de cambio de T en la dirección y en el punto (2, 1).

Solución La temperatura a lo largo de la línea $x = 2$ es la sección transversal de T con $x = 2$, es decir, la función $v(y) = T(2, y)$. Si denotamos la rapidez de cambio de T en la dirección y en (2, 1) por $T_y(2, 1)$, entonces

$$T_y(2, 1) = v'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{v(1+h) - v(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{T(2, 1+h) - T(2, 1)}{h}$$

$T_y(2, 1)$ recibe el nombre de *derivada parcial de T con respecto a y en el punto* (2, 1). Al tomar $h = 1$, de modo que podamos usar la columna con $x = 2$ de la tabla 13.2, resulta

$$T_y(2, 1) \approx \frac{T(2, 1+1) - T(2, 1)}{1} = \lim \frac{120 - 135}{1} = -15°\text{C/m}.$$

El hecho de que $T_y(2, 1)$ sea negativa significa que la temperatura disminuye a medida que y aumenta.

Definición de la derivada parcial

Estudiemos la influencia de x y y separadamente sobre el valor de la función $f(x, y)$ manteniendo una de ellas fija y dejando que la otra varíe. Esto lleva a las siguientes definiciones.

Derivadas parciales de f con respecto a x y y

Para todos los puntos donde existe el límite, definimos las **derivadas parciales en el punto (a, b)** mediante

$$f_x(a, b) = \begin{matrix}\text{rapidez de cambio de } f \text{ con respecto a } x \\ \text{en el punto } (a, b)\end{matrix} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h},$$

$$f_y(a, b) = \begin{matrix}\text{rapidez de cambio de } f \text{ con respecto a } y \\ \text{en el punto } (a, b)\end{matrix} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}.$$

Si hacemos que a y b varíen, tenemos las **funciones de derivadas parciales** $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

Al igual que con las derivadas ordinarias, existe una notación opcional:

Notación opcional para derivadas parciales

Si $z = f(x, y)$, podemos escribir

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$f_x(a, b) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a, b)} \quad \text{y} \quad f_y(a, b) = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a, b)}.$$

Usamos el símbolo ∂ para distinguir derivadas parciales de derivadas ordinarias. Cuando las variables independientes tengan nombres diferentes de x y y, ajustamos la notación según sea necesario. Por ejemplo, las derivadas parciales de $f(u, v)$ se denotan por f_u y f_v.

Visualización de las derivadas parciales en una gráfica

La derivada ordinaria de una función de una variable es la pendiente de su gráfica. ¿Cómo visualizamos la derivada parcial $f_x(a, b)$? La gráfica de la función de una variable $f(x, b)$ es la curva donde el plano vertical $y = b$ corta la gráfica de $f(x, y)$ (véase Fig. 13.3). Por lo tanto, $f_x(a, b)$ es la pendiente de la línea tangente a esta curva en $x = a$.

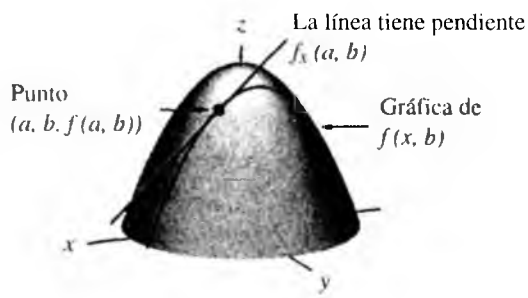


Figura 13.3 La curva $z = f(x, b)$ en la gráfica de f tiene pendiente $f_x(a, b)$ en $x = a$.

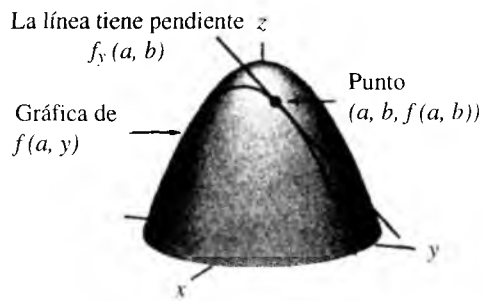


Figura 13.4 La curva $z = f(a, y)$ en la gráfica de f tiene pendiente $f_y(a, b)$ en $y = b$.

De igual manera, la gráfica de la función $f(a, y)$ es la curva donde el plano vertical $x = a$ corta la gráfica de f, y la derivada parcial $f_y(a, b)$ es la pendiente de esta curva en $y = b$ (véase Fig. 13.4).

Ejemplo 3 En cada punto señalado en la gráfica de la superficie $z = f(x, y)$ de la figura 13.5, decir si cada derivada parcial es positiva o negativa.

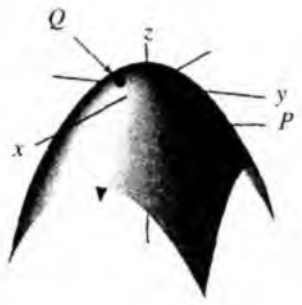


Figura 13.5 Indique los signos de f_x y f_y en P y Q.

Solución El eje positivo de las x apunta hacia afuera de la página. Imagine que echamos a andar en esta dirección desde el punto P; descenderemos abruptamente. Por esto, la derivada parcial con respecto a x es negativa en P, y su valor absoluto bastante grande. Lo mismo ocurre con la derivada parcial con respecto a y en el punto P, puesto que también hay un descenso abrupto en la dirección positiva de las y.

En el punto marcado como Q, moverse hacia la dirección positiva de las x resulta en un descenso gradual, pero si es hacia la dirección positiva de las y el resultado es un ascenso gradual. Por lo tanto, la derivada parcial f_x en Q es negativa pero pequeña (es decir, casi cero), y la derivada parcial f_y es positiva pero pequeña.

Cálculo aproximado de las derivadas parciales a partir de un diagrama de contorno

Es frecuente que la gráfica de una función $f(x, y)$ indique el signo de las derivadas parciales, pero el cálculo numérico de estas derivadas se realiza con más facilidad a partir de un diagrama de contorno que de una gráfica de superficie. Si nos desplazamos paralelamente hacia uno de los ejes en un diagrama de contorno, la derivada parcial es la rapidez de cambio del valor de la función sobre los contornos. Por ejemplo, si los valores sobre los contornos son crecientes conforme avanzamos en la dirección positiva, entonces la derivada parcial debe ser positiva.

Ejemplo 4 La figura 13.6 muestra el diagrama de contorno para la temperatura $H(x, t)$ (en °C) en una habitación como función de la distancia x (en metros) desde un calentador y el tiempo t (en minutos) después que el calentador fue encendido. ¿Cuáles son los signos de $H_x(10, 20)$ y $H_t(10, 20)$? Calcular estas derivadas parciales y explicar las respuestas en términos prácticos.

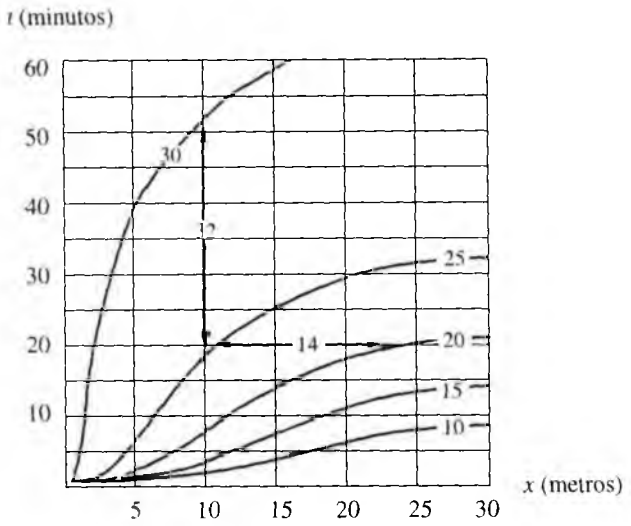


Figura 13.6 Temperatura en una habitación calentada: el radiador en $x = 0$ es encendido en $t = 0$.

Solución El punto (10, 20) está casi sobre el contorno $H = 25$. Conforme x aumenta, avanzamos hacia el contorno $H = 20$, de modo que H es decreciente y $H_x(10, 20)$ es negativa. Esto tiene sentido porque el contorno $H = 30$ está a la izquierda: a medida que nos alejamos del calentador, la temperatura desciende. Por otro lado, a medida que t aumenta avanzamos hacia el contorno $H = 30$, así que H es creciente; conforme t decrece, H disminuye. Por lo tanto, $H_t(10, 20) =$ es positiva. Esto indica que a medida que el tiempo transcurre, la habitación se calienta.

Para calcular las derivadas parciales, recurramos al cociente de dos diferencias. Al observar el diagrama de contorno, vemos que hay un punto sobre el contorno $H = 20$ aproximadamente 14 unidades a la derecha del punto (10, 20). En consecuencia, H disminuye en 5 cuando x aumenta en 14, de donde:

$$\text{Rapidez de cambio de } H \text{ con respecto a } x = H_x(10,20) \approx \frac{-5}{14} \approx -0.36^\circ\text{C / metro}.$$

Esto significa que después de 20 minutos, la temperatura desciende alrededor de 0.36° cerca del punto situado a 10 m del calentador, en cifras redondas, un tercio de grado por cada metro que nos alejemos del calentador.

Para calcular $H_t(10, 20)$, observamos que el contorno $H = 30$ está casi 32 unidades directamente encima del punto (10, 20). Por esto, H aumenta en 5 cuando t aumenta en 32. Por lo tanto,

$$\text{Rapidez de cambio de } H \text{ con respecto a } t = H_t(10,20) \approx \frac{5}{32} \approx -0.16^\circ\text{C / metros}.$$

Esto significa que después de 20 minutos la temperatura sube casi 0.16, o sea 1/6 de grado, por cada minuto en el punto situado a 10 metros del calentador.

Uso de unidades para interpretar derivadas parciales

Con frecuencia, el significado de una derivada parcial puede explicarse mediante el uso de unidades.

Ejemplo 5 Supóngase que el peso en libras de una persona, w, es función $f(c, n)$ del número c de calorías que consume a diario y el número n de minutos que se ejercita diariamente. Mediante las unidades para w, c y n, interpretar en términos comunes los enunciados:

$$\frac{\partial w}{\partial c}(2000, 15) = 0.02 \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial n}(2000, 15) = -0.025.$$

Solución Las unidades de $\partial w/\partial c$ son libras por caloría. El enunciado

$$\frac{\partial w}{\partial c}(2000, 15) = 0.02$$

significa que si actualmente consume diariamente 2000 calorías y hace ejercicio 15 minutos, pesará 0.02 libras más por cada caloría adicional que consuma a diario, o sea, casi dos libras por cada 100 calorías extra por día. Las unidades de $\partial w/\partial n$ son libras por minuto. El enunciado

$$\frac{\partial w}{\partial n}(2000, 15) = -0.025$$

significa que para el mismo consumo de calorías y el mismo número de minutos de ejercicio. la persona pesará 0.025 libras menos por cada minuto adicional de ejercicio diario, o sea, casi una libra menos por cada 40 minutos adicionales al día. Si cada día la persona ingiere 100 calorías adicionales y hace ejercicio alrededor de 80 minutos más, el peso debe permanecer casi constante.

Problemas para la sección 13.1

1. Mediante el cociente de diferencias, calcule $f_x(3, 2)$ y $f_y(3, 2)$ para la función dada por

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y + 1}.$$

[Recuerde: Un cociente de diferencias es una expresión de la forma $(fa + h, b) - f(a, b)) / h$.]

2. Utilice cocientes de diferencia con $\Delta x = 0.1$ y $\Delta y = 0.1$ para calcular $f_x(1, 3)$ y $f_y(1, 3)$ donde

$$f(x, y) = e^{-x} \operatorname{sen} y.$$

Luego obtenga mejores resultados usando $\Delta x = 0.01$ y $\Delta y = 0.01$.

3. El pago mensual de la hipoteca en dólares, P, por una casa es una función de tres variables

$$P = f(A, r, N),$$

donde A es el monto del préstamo en dólares, r la tasa de interés, y N el número de años antes que la hipoteca se pague.

a) $f(92\,000, 14, 30) = 1090.08$. ¿Qué nos indica esto, en términos financieros?

b) $\dfrac{\partial P}{\partial r}(92\,000, 14, 30) = 72.82$. ¿Cuál es el significado financiero del número 72.82?

c) ¿Se esperaría que $\partial P/\partial A$ sea positiva o negativa? ¿Por qué?

d) ¿Se esperaría que $\partial P/\partial N$ sea positiva o negativa? ¿Por qué?

4. Suponga que solicitamos $\$A$ a una tasa de interés de $r\%$ (por mes) y lo pagamos en t meses mediante pagos mensuales de $\$P$, como está determinado por la función $P = g(A, r, t)$. En términos financieros, ¿qué nos indican los siguientes enunciados?

a) $g(8000, 1, 24) = 376.59$

b) $\dfrac{\partial g}{\partial A}(8000, 1, 24) = 0.047$

c) $\dfrac{\partial g}{\partial r}(8000, 1, 24) = 44.83$

5. Supongamos que x es el precio promedio de un automóvil nuevo y que y es el precio promedio de un galón de gasolina. Entonces q_1, que es el número de autos nuevos vendidos en un año, depende de x y de y, así que $q_1 = f(x, y)$. De igual manera, si q_2 es la cantidad de gasolina vendida en un año, entonces $q_2 = g(x, y)$.
   a) ¿Cómo espera que sean los signos de $\partial q_1 / \partial x$ y $\partial q_2 / \partial y$? Explique.
   b) ¿Cómo espera que sean los signos de $\partial q_1 / \partial y$ y $\partial q_2 / \partial x$? Explique.
6. A un paciente se le inyecta un medicamento en una arteria. La función $c = f(x, t)$ representa la concentración del medicamento a una distancia x en la dirección de la circulación sanguínea, medida desde el punto de inyección y a un tiempo t desde la inyección. ¿Cuáles son las unidades de las siguientes derivadas parciales? ¿Cuáles son sus interpretaciones prácticas? ¿Cuáles deben ser los signos?
   a) $\partial c / \partial x$ b) $\partial c / \partial t$
7. Supongamos que P es la mensualidad de un automóvil en dólares y $P = f(P_0, t, r)$, donde $\$P_0$ es la cantidad prestada, t el número de meses para pagar el préstamo, y $r\%$ la tasa de interés. ¿Cuáles son las unidades, los significados financieros y los signos de $\partial P/\partial t$ y $\partial P/\partial r$?
8. En la figura 13.7 aparece la superficie $z = f(x, y)$. Los puntos A y B están en el plano xy.
   a) ¿Cuál es el signo de $f_x(A)$? b) ¿Cuál es el signo de $f_y(A)$?
   c) Suponga que P es un punto del plano xy que se desplaza a lo largo de una línea recta de A a B. ¿Cómo cambia el signo de $f_x(P)$? ¿Cómo cambia el signo de $f_y(P)$?

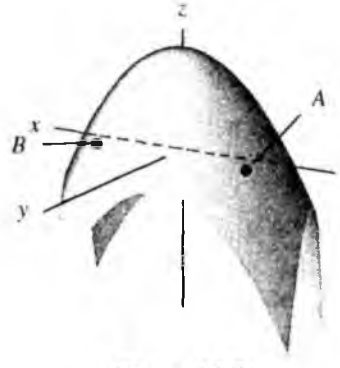


Figura 13.7

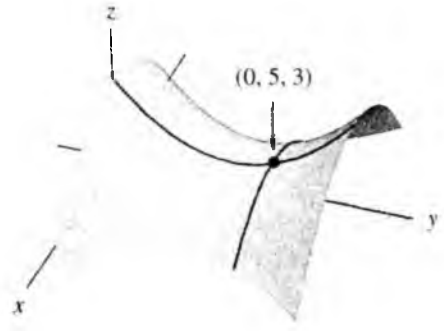


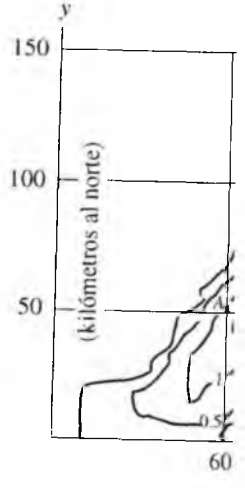
Figura 13.8

9. Considere la superficie $z = f(x, y)$ en forma de silla de montar que se ilustra en la figura 13.8.
   a) ¿Cuál es el signo de $f_x(0, 5)$? b) ¿Cuál es el signo de $f_y(0, 5)$?

Para los problemas 10, 11 y 12, consulte la tabla 11.3 de la página 8 donde se lee la temperatura ajustada para el factor viento-frío, C, en °F, como función $f(w, T)$ de la velocidad del viento, w, en mph, y la temperatura, T, en °F. La temperatura ajustada para el viento-frío indica cuánto frío se siente como resultado de la combinación de viento y temperatura.

10. Calcule $f_w(10, 25)$. ¿Qué significa su respuesta en términos prácticos?
11. Calcule $f_T(5, 20)$. ¿Qué significa su respuesta en términos prácticos?
12. En la tabla 11.3 puede verse que cuando la temperatura es de 20°F, la temperatura ajustada para viento-frío desciende en un promedio de casi 2.6°F con cada 1 mph de aumento en la velocidad del viento a partir de 5 mph y hasta 10 mph. ¿Con qué derivada parcial tiene que ver esto?
13. La figura 13.9 muestra un diagrama de contorno para el pago mensual P como función de la tasa de interés, $r\%$, y la cantidad L de un préstamo a 5 años. Calcule $\partial P/\partial r$ y $\partial P/\partial L$ en los siguientes puntos. En cada caso, dé las unidades y el significado práctico de su respuesta.
   a) $r = 8, L = 4000$ b) $r = 8, L = 6000$ c) $r = 13, L = 7000$

14. La f
en e
kiló



La neblin
necesaria
problema
metro cúb
(en gramo
muestra se

15. Utilic
parci
16. Haga
para
17. Repit
prácti

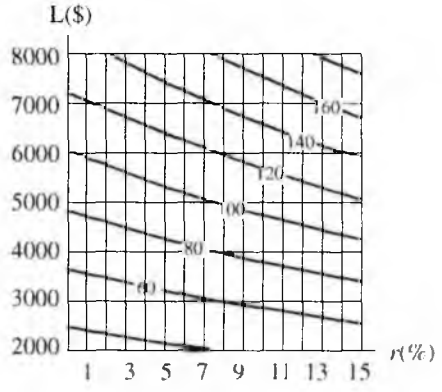


Figura 13.9

14. La figura 13.10 muestra un diagrama de contorno para el número n de zorras por kilómetro cuadrado en el suroeste de Inglaterra. Calcule $\partial n/\partial x$ y $\partial n/\partial y$ en los puntos marcados A, B y C, donde x son los kilómetros de este a oeste y y los kilómetros de norte a sur.

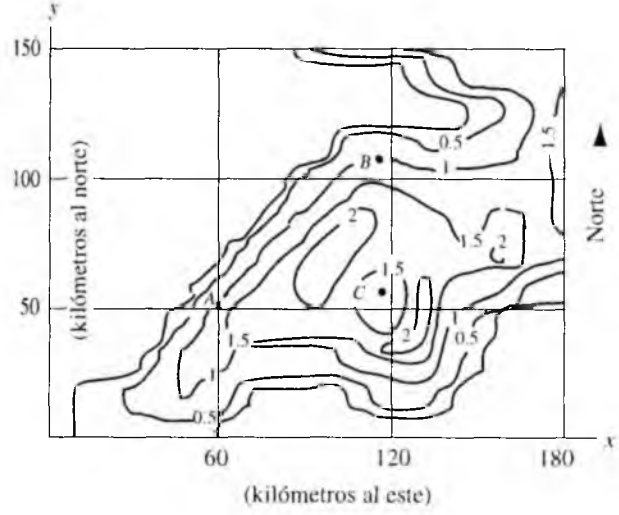


Figura 13.10

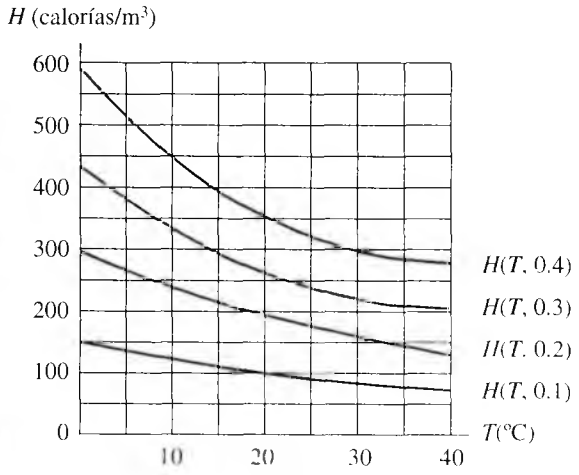


Figura 13.11

La neblina que cubre las pistas del aeropuerto puede despejarse si se calienta el aire. La cantidad de calor necesaria para realizar el trabajo depende de la temperatura del aire y de la humedad de la neblina. En los problemas 15, 16 y 17 interviene la figura 13.11, que muestra el calor $H(T, w)$ necesario (en calorías por metro cúbico de niebla) como función de la temperatura T (en grados Celsius) y el contenido de agua w (en gramos por metro cúbico de niebla). Observe que la figura 13.11 no es un diagrama de contorno, sino muestra secciones transversales de H con w fija en 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4.

15. Utilice la figura 13.11 para encontrar un valor aproximado de $H_T(10, 0.1)$. Interprete la derivada parcial en términos prácticos.
16. Haga una tabla de valores para $H(T, w)$ a partir de la figura 13.11, y utilícela para calcular $H_T(T, w)$ para $T = 10$, 20 y 30 y $w = 0.1$, 0.2 y 0.30.
17. Repita el problema 16 para $H_w(T, w)$ en $T = 10$, 20 y 30 y $w = 0.1$, 0.2 y 0.3. ¿Cuál es el significado práctico de estas derivadas parciales?

18. El gasto cardiaco, representado por c, es el volumen de sangre que circula por el corazón de una persona, por unidad de tiempo. La resistencia vascular sistemática (RVS), representada por s, es la resistencia a que la sangre circule por venas y arterias. Sea p la presión sanguínea de una persona. Entonces p es una función de c y s, así que $p = f(c, s)$.
    a) ¿Qué representa $\partial p/\partial c$?

    Supongamos ahora que $p = kcs$, donde k es una constante.
    b) Trace las curvas de nivel de p. ¿Qué representan? Marque sus ejes.
    c) Para una persona que tiene el corazón débil, es conveniente hacer bombear el corazón contra menos resistencia y conservar la misma presión sanguínea. A esa persona se le puede administrar Nitroglicerina para reducirle la RVS y Dopamina para aumentar el gasto cardiaco. Represente esto en una gráfica que muestre curvas de nivel. Ponga un punto A en la gráfica que represente el estado de la persona antes de administrarle los medicamentos y un punto B después de ello.
    d) Justo después de un ataque al corazón desciende el gasto cardiaco de un paciente y ocasiona que baje la presión sanguínea. Un error común que cometen médicos residentes es normalizar la presión sanguínea del paciente con medicinas para aumentar la resistencia vascular sistemática (RVS), en lugar de aumentar el gasto cardiaco. En una gráfica de las curvas de nivel de p, ponga un punto D que represente al paciente antes de un ataque cardiaco, un punto E que represente al paciente inmediatamente después del ataque cardiaco, y un tercer punto F que represente al paciente después que un médico residente le haya dado medicina para aumentar la RVS.

13.2 CÁLCULO ALGEBRAICO DE DERIVADAS PARCIALES

Como la derivada parcial $f_x(x, y)$ es la derivada ordinaria de la función $f(x, y)$ con y constante, y $f_y(x, y)$ es la derivada ordinaria de $f(x, y)$ con x constante, podemos usar todas las fórmulas de diferenciación del cálculo de una variable para encontrar derivadas parciales.

Ejemplo 1 Sea $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y+1}$. Encontrar $f_x(3, 2)$ algebraicamente.

Solución Utilizamos el hecho de que $f_x(3, 2)$ es igual a la derivada de $f(x, 2)$ en $x = 3$. Como

$$f(x, 2) = \frac{x^2}{2+1} = \frac{x^2}{3},$$

diferenciando con respecto a x, tenemos

$$f_x(x, 2) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{3}\right) = \frac{2x}{3}, \text{ y por lo tanto } f_x(3, 2) = 2.$$

Ejemplo 2 Calcular las derivadas parciales con respecto a x y con respecto a y para las siguientes funciones.
a) $f(x, y) = y^2e^{3x}$ b) $z = (3xy + 2x)^5$ c) $g(x, y) = e^{(x+3y)}\operatorname{sen}(xy)$

Solución a) Éste es el producto de una función de x (es decir, e^{3x}) y una función de y (es decir, y^2). Cuando diferenciamos con respecto a x, consideramos la función de y como constante y viceversa. Por lo tanto,

$$f_x(x, y) = y^2\frac{\partial}{\partial x}(e^{3x}) = 3y^2e^{3x},$$

$$f_y(x, y) = e^{3x} \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2ye^{3x}.$$

b) Aquí empleamos la regla de la cadena:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5(3xy + 2x)^4 \frac{\partial}{\partial x}(3xy + 2x) = 5(3xy + 2x)^4 (3y + 2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5(3xy + 2x)^4 \frac{\partial}{\partial y}(3xy + 2x) = 5(3xy + 2x)^4 3x = 15x(3xy + 2x)^4.$$

c) Como cada función del producto es una función de x y de y, necesitamos usar la regla del producto para cada derivada parcial:

$$g_x(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(e^{x+3y})\right) \operatorname{sen}(xy) + e^{x+3y} \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{sen}(xy)\right) = e^{x+3y} \operatorname{sen}(xy) + e^{x+3y}\, y \cos(xy),$$

$$g_y(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial y}(e^{x+3y})\right) \operatorname{sen}(xy) + e^{x+3y} \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{sen}(xy)\right) = 3e^{x+3y} \operatorname{sen}(xy) + e^{x+3y}\, x \cos(xy).$$

Para funciones de tres o más variables, encontramos derivadas parciales por el mismo método: diferenciar con respecto a una variable, considerando las otras variables como constantes. Para una función $f(x, y, z)$, la derivada parcial $f_x(x, b, c)$ indica la rapidez de cambio de f con respecto a x a lo largo de la línea $y = b, z = c$.

Ejemplo 3 Encontrar todas las derivadas parciales de $f(x, y, z) = \dfrac{x^2y^2}{z}$.

Solución Para encontrar $f_x(x, y, z)$, por ejemplo, consideramos y y z como fijas, dando

$$f_x(x, y, z) = \frac{2xy^3}{z}, \quad \text{y} \quad f_y(x, y, z) = \frac{3x^2y^2}{z}, \quad \text{y} \quad f_z(x, y, z) = -\frac{x^2y^3}{z^2}.$$

Interpretación de las derivadas parciales

Ejemplo 4 En la figura 13.12 se muestra una cuerda de guitarra vibrando, originalmente en reposo a lo largo del eje x. Sea x la distancia en metros desde el extremo izquierdo de la cuerda. A los t segundos el punto x se ha desplazado $y = f(x, t)$ metros verticalmente desde su posición de reposo, donde

$$y = f(x, t) = 0.003 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(2765t).$$

Evaluar $f_x(0.3, 1)$ y $f_t(0.3, 1)$ y explicar qué significa cada cual en términos prácticos.

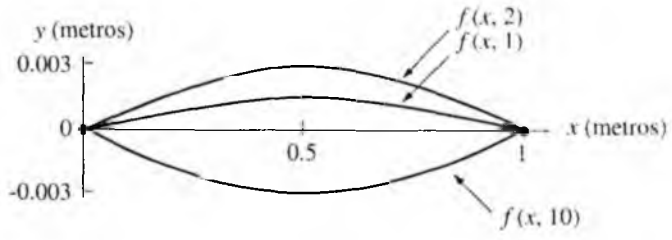


Figura 13.12 La posición de una cuerda de guitarra en vibración en varios tiempos diferentes: gráfica de $g(x, t)$ para $t = 1, 2, 10$.

Solución Al diferenciar $f(x, t) = 0.003 \text{ sen } (\pi x) \text{ sen } (2765t)$ con respecto a x, tenemos

$$f_x(x, t) = 0.003\pi \cos(\pi x) \text{ sen } (2765t).$$

En particular, sustituyendo $x = 0.3$ y $t = 1$

$$f_x(0.3, 1) = 0.003\pi \cos(\pi(0.3)) \text{ sen } (2765) \approx 0.002.$$

Para ver lo que $f_x(0.3, 1)$ significa, considere la función $f(x, 1)$. La gráfica de $f(x, 1)$ de la figura 13.13 es una instantánea de la cuerda en el instante $t = 1$. Entonces, la derivada $f_x(0.3, 1)$ es la pendiente de la cuerda en el punto $x = 0.3$ y en el momento cuando $t = 1$. De igual manera, al tomar la derivada de $f(x, t) = 0.003 \text{ sen } (\pi x) \text{ sen}(2765t)$ con respecto a t, tendremos

$$f_t(x, t) = (0.003)(2765) \text{ sen } (\pi x) \cos(2765t) = 8.3 \text{ sen } (\pi x) \cos(t).$$

Como $f(x, t)$ está en metros y t en segundos, la derivada $f_t(0.3, 1)$ está en m/s. Por lo tanto, sustituyendo $x = 0.3$ y $t = 1$,

$$f_t(0.3, 1) = 8.3 \text{ sen } (\pi(0.3)) \cos(2765(1)) \approx 6 \text{ m/seg}.$$

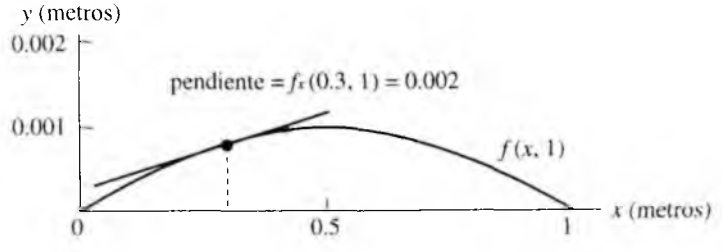


Figura 13.13 Gráfica de $f(x, 1)$: instantánea de la forma de la cuerda en $t = 1$ s.

Para ver qué significa $f_t(0.3, 1)$ considere la función $f(0.3, t)$. La gráfica de $f(0.3, t)$ es una gráfica de posición contra tiempo que rastrea el movimiento ascendente y descendente del punto sobre la cuerda donde $x = 0.3$ (véase Fig 13.14). La derivada $f_t(0.3, 1) = 6$ m/s es la velocidad de ese punto sobre la cuerda en el tiempo $t = 1$. El hecho de que $f_t(0.3, 1)$ sea positivo indica que el punto se desplaza hacia arriba cuando $t = 1$.

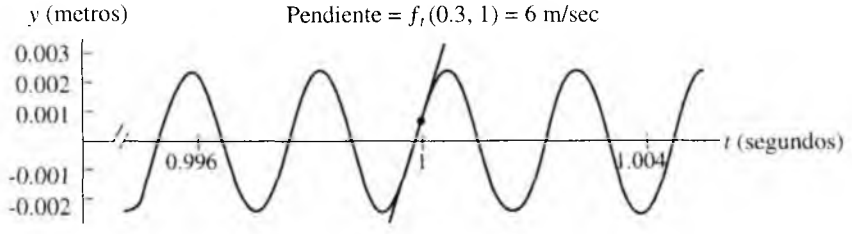


Figura 13.14 Gráfica de $f(0.3, t)$: gráfica de posición contra tiempo del punto $x = 0.3$ m desde el extremo de la cuerda de guitarra.

Problemas para la sección 13.2

1. Sea $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y+1}$ Encuentre $f_y(3, 2)$ algebraicamente.

2. Sea $f(u, v) = u(u^2 + v^2)^{3/2}$.
   a) Utilice un cociente de diferencia para estimar $f_u(1, 3)$ con $h = 0.001$.
   b) Ahora evalúe $f_u(1, 3)$ exactamente. ¿Fue razonable el cálculo del inciso a?

Encuentre las derivadas parciales indicadas para los problemas del 3 al 34. Suponga que las variables están restringidas a un dominio donde la función está definida.

3. z_x si $z = x^2y + 2x^5y$
4. z_x si $z = \operatorname{sen}(5x^3y - 3xy^2)$
5. g_x si $g(x, y) = \ln(ye^{xy})$
6. F_m si $F = mg$
7. $\dfrac{\partial}{\partial x}(a\sqrt{x})$
8. $\dfrac{\partial}{\partial x}(xe^{\sqrt{xy}})$
9. $\dfrac{\partial}{\partial y}(3x^5y^7 - 32x^4y^3 + 5xy)$
10. z_y si $z = \dfrac{3x^2y^7 - y^2}{15xy - 8}$
11. $\dfrac{\partial A}{\partial h}$ si $A = \frac{1}{2}(a + b)h$
12. $\dfrac{\partial}{\partial m}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right)$
13. $\dfrac{\partial}{\partial B}\left(\dfrac{1}{u_0}B^2\right)$
14. $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{2\pi r}{v}\right)$
15. F_v si $F = \dfrac{mv^2}{r}$
16. $\dfrac{\partial}{\partial v_0}(v_0 + at)$
17. $\dfrac{\partial F}{\partial m_2}$ si $F = \dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$
18. a_v si $a = \dfrac{v^2}{r}$
19. $\dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{2\pi r}{T}\right)$
20. $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(v_0t + \dfrac{1}{2}at^2\right)$
21. u_E si $u = \dfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \dfrac{1}{2\mu_0}B^2$
22. $\dfrac{\partial f_0}{\partial L}$ si $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$
23. $\dfrac{\partial}{\partial t}$ si $y = \operatorname{sen}(ct - 5x)$
24. $\dfrac{\partial}{\partial M}\left(\dfrac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM}}\right)$
25. z_x si $z = \dfrac{1}{2x^2ay} + \dfrac{3x^5abc}{y}$
26. $\dfrac{\partial \alpha}{\partial \beta}$ si $\alpha = \dfrac{e^{\beta - 3}}{2y\beta + 5}$
27. $\dfrac{\partial}{\partial \lambda}\left(\dfrac{x^2y\lambda - 3\lambda^5}{\sqrt{\lambda^2 - 3\lambda + 5}}\right)$
28. $\dfrac{\partial m}{\partial v}$ si $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$
29. $\dfrac{\partial}{\partial w}(\sqrt{2\pi xyw - 13x^7y^3v})$
30. $\dfrac{\partial}{\partial w}\left(\dfrac{x^2yw - xy^3w^7}{w - 1}\right)$
31. z_x y z_y para $z = x^7 + 2^y + x^y$
32. $z_x(2, 3)$ si $z = (\cos x) + y$
33. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1, 0.5)}$ si $z = e^{x+2y}\operatorname{sen} y$
34. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\pi/3, 1)}$ si $f(x, y) = x\ln(y\cos x)$

35. Considere la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.
   a) Calcule $f_x(2, 1)$ y $f_y(2, 1)$ usando el diagrama de contorno para f de la figura 13.15.
   b) Calcule $f_x(2, 1)$ y $f_y(2, 1)$ de una tabla de valores para f con $x = 1.9, 2, 2.1$ y $y = 0.9, 1, 1.1$.
   c) Compare sus resultados de los incisos a y b con los valores exactos de $f_x(2, 1)$ y $f_y(2, 1)$ encontrados algebraicamente.

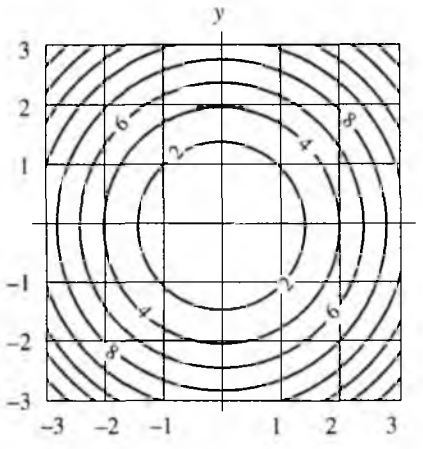


Figura 13.15

36. Demuestre que la función de Cobb-Douglas

$$Q = bK^{\alpha} L^{1-\alpha} \quad \text{donde} \quad 0 < \alpha < 1$$

satisface la ecuación

$$K\frac{\partial Q}{\partial K} + L\frac{\partial Q}{\partial L} = Q$$

37. El dinero en una cuenta bancaria gana intereses a una tasa continua r. La cantidad de dinero de la cuenta, $\$B$, depende de la cantidad depositada, $\$P$, y del tiempo, t, que ha estado en el banco según la fórmula

$$B = Pe^{rt}.$$

Encuentre $\partial B/\partial t$ y $\partial B/\partial P$ e interprete cada una en términos financieros.

38. Una barra de un metro de largo se calienta de manera irregular, con temperatura en °C a una distancia x metros de un extremo en el tiempo t dada por

$$H(x, t) = 100e^{-0.1t} \operatorname{sen}(\pi x) \qquad 0 \le x \le 1.$$

a) Trace una gráfica de H contra x para $t = 0$ y $t = 1$.
b) Calcule $H_x(0.2, t)$ y $H_x(0.8, t)$. ¿Cuál es la interpretación práctica (en términos de temperatura) de estas dos derivadas parciales? Explique por qué cada una tiene el signo que tiene.
c) Calcule $H_t(x, t)$. ¿Cuál es su signo? ¿Cuál es su interpretación en términos de temperatura?

39. Sea $h(x, t) = 5 + \cos(0.5x - t)$ la función que describe la ola del estadio de la página 4. El valor de $h(x, t)$ indica la altura de la cabeza del espectador del asiento x en el tiempo t segundos. Evalúe $h_x(2, 5)$ y $h_t(2, 5)$ e interprete cada una en términos de la ola.

40. ¿Hay un función f que tenga las siguientes derivadas parciales? Si es así, ¿cuál es? ¿Hay otras?

$$f_x(x, y) = 4x^3y^2 - 3y^4,$$
$$f_y(x, y) = 2x^4y - 12xy^3.$$

13.3 LINEALIDAD LOCAL Y EL DIFERENCIAL

En las secciones 13.1 y 13.2 estudiamos una función de dos variables dejando que cambie una variable a la vez. Ahora dejaremos que ambas variables varíen a la vez para obtener una aproximación lineal para funciones de dos variables.

Acercamiento para ver la linealidad local

Para una función de una variable, la linealidad local significa que a medida que uno se acerca a la gráfica, se parece a una línea recta (véase apéndice A). Conforme uno se acerca a la gráfica de una función de dos variables, ésta por lo general se asemeja a un plano, que es la gráfica de una función lineal de dos variables (véase Fig. 13.16).

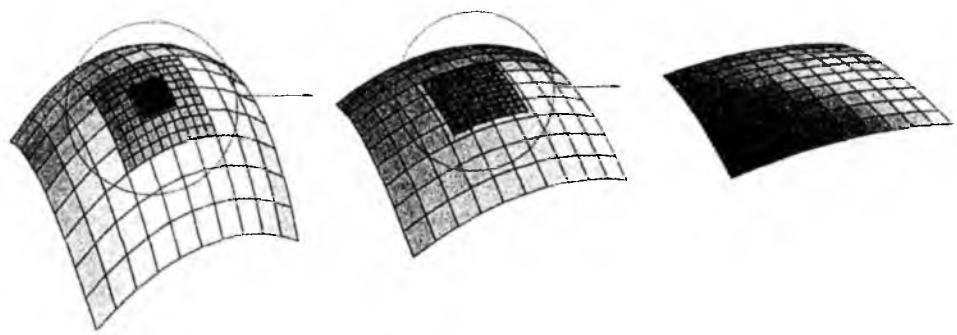


Figura 13.16 Acercamiento a la gráfica de una función de dos variables hasta que la gráfica parezca un plano.

De igual manera, la figura 13.17 muestra tres vistas sucesivas de los contornos cerca de un punto. A medida que hacemos el acercamiento, los contornos parecen líneas paralelas igualmente espaciadas, que son los contornos de una función lineal (a medida que uno se acerca, tenemos que agregar más contornos).

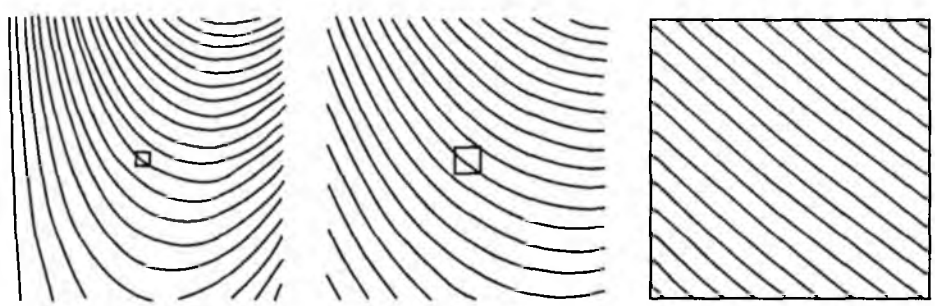


Figura 13.17 Acercamiento a un diagrama de contorno hasta que las líneas parezcan paralelas y uniformemente espaciadas.

Este efecto también puede verse numéricamente al acercarse más y más a tablas de valores. La tabla 13.3 muestra tres tablas de valores para $f(x, y) = x^2 + y^3$ cerca de $x = 2$, $y = 1$; cada una es una vista más cercana que la anterior. Observe cómo cada tabla se parece más a la tabla de una función lineal.

TABLA 13.3 *Acercamiento en los valores de $f(x, y) = x^2 + y^3$ cerca de (2, 1) hasta que la tabla parezca lineal*

x \ y	0	1	2
1	1	2	9
2	4	5	12
3	9	10	17

x \ y	0.9	1.0	1.1
1.9	4.34	4.61	4.94
2.0	4.73	5.00	5.33
2.1	5.14	5.41	5.74

x \ y	0.99	1.00	1.01
1.99	4.93	4.96	4.99
2.00	4.97	5.00	5.03
2.01	5.01	5.04	5.07

Acercamiento algebraico: diferenciabilidad

Si observamos un plano cuando nos acercamos a un punto (siempre que el plano no sea vertical) sabremos que $f(x, y)$ puede ser aproximada cerca de ese punto mediante una función lineal, $L(x, y)$:

$$f(x, y) \approx L(x, y)$$

La gráfica de la función $z = L(x, y)$ es el plano tangente en ese punto. Siempre que la aproximación sea suficientemente buena, se dice que $f(x, y)$ es *diferenciable* en ese punto. La sección 13.10 explica cómo saber si la aproximación es suficientemente buena. Las funciones que encontramos serán diferenciables en la mayoría de los puntos de su dominio.

El plano tangente

El plano que vemos al acercarnos a una superficie se llama *plano tangente* a la superficie en el punto. La figura 13.18 muestra la gráfica de una función con un plano tangente.

¿Cuál es la ecuación del plano tangente? En el punto (a, b), la pendiente en dirección x de la gráfica de f es la derivada parcial $f_x(a, b)$ y la pendiente en dirección y es $f_y(a, b)$. Por lo tanto, usando la ecuación para un plano de la página 40 del capítulo 11, tenemos el siguiente resultado:

Plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (a, b)

Suponiendo que f es diferenciable en (a, b), la ecuación del plano tangente es

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Aquí consideramos a a y b como fijas, de modo que $f(a, b)$, $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ son constantes. Por lo tanto, el lado derecho de la ecuación es una función lineal de x y y.

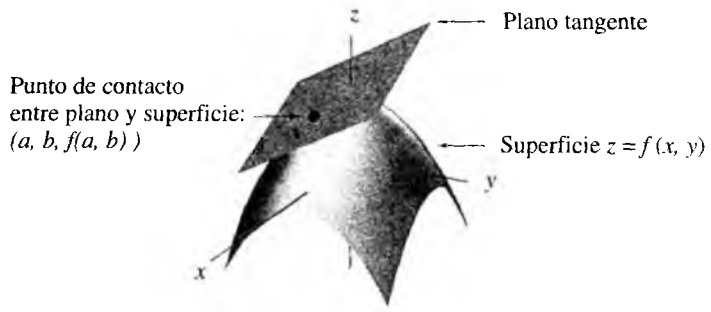


Figura 13.18 Plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (a, b).

Ejemplo 1 Encontrar la ecuación para el plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto (3, 4).

Solución Tenemos $f_x(x, y) = 2x$, así que $f_x(3, 4) = 6$ y $f_y(x, y) = 2y$, así que $f_y(3, 4) = 8$. También, $f(3, 4) = 3^2 + 4^2 = 25$. En consecuencia, la ecuación para el plano tangente en (3, 4) es

$$z = 25 + 6(x - 3) + 8(y - 4) = -25 + 6x + 8y.$$

Linealización local

Como el plano tangente está cerca de la superficie en la vecindad del punto en el que se tocan, los valores z del plano tangente son cercanos a valores de $f(x, y)$ para puntos cerca de (a, b). Por lo tanto, al sustituir z por $f(x, y)$ en la ecuación del plano tangente obtenemos la siguiente aproximación:

Aproximación del plano tangente a $f(x, y)$ para (x, y) cerca del punto (a, b)

Siempre que f sea diferenciable en (a, b), podemos aproximar $f(x, y)$:

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Estamos considerando a a y b como fijas, por lo cual la expresión del lado derecho es lineal en x y y. El lado derecho de esta aproximación se llama **linealización local** de f cerca de $x = a$, $y = b$.

La figura 13.19 muestra gráficamente la aproximación del plano tangente.

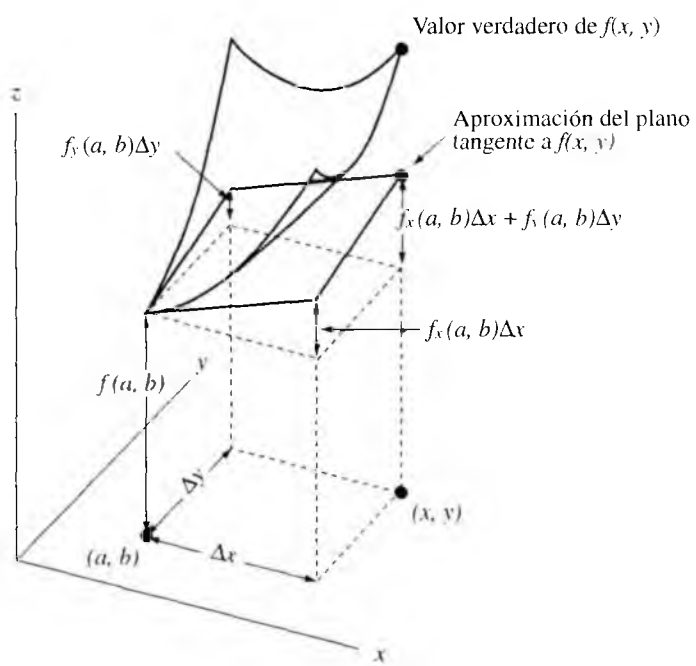


Figura 13.19 Linealización local: aproximación de $f(x, y)$ por el valor z en el plano tangente

Ejemplo 2 Encontrar la linealización local de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el punto $(3, 4)$. Calcular $f(2.9, 4.2)$ y $f(2, 2)$ usando la linealización y comparar sus respuestas a los valores verdaderos.

Solución Sea $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. En el ejemplo 1 de la página 116 encontramos que la ecuación del plano tangente en $(3, 4)$ era

$$z = 25 + 6(x - 3) + 8(y - 4).$$

Por lo tanto, para (x, y) cerca de (3, 4), tenemos la linealización local

$$f(x, y) \approx 25 + 6(x - 3) + 8(y - 4).$$

Al sustituir $x = 2.9$, $y = 4.2$ resulta

$$f(2.9, 4.2) \approx 25 + 6(-0.1) + 8(0.2) = 26.$$

Esto se compara favorablemente con el valor verdadero $f(2.9, 4.2) = (2.9)^2 + (4.2)^2 = 26.05$.

Sin embargo, la linealización local no da una buena aproximación en los puntos alejados de (3, 4). Por ejemplo, si $x = 2$, $y = 2$, la linealización local resulta en

$$f(2, 2) \approx 25 + 6(-1) + 8(-2) = 3.$$

mientras que el verdadero valor de la función es $f(2, 2) = 2^2 + 2^2 = 8$

Ejemplo 3 Diseñar calderas seguras depende de saber cómo se comporta el vapor bajo cambios de temperatura y presión. Tablas de vapor como la de la tabla 13.4 se publican y dan valores de la función $V = f(T, P)$, donde V es el volumen (en pies^3) de una libra de vapor a una temperatura T (en °F) y a presión P (en lb/pulg^2).

a) Dar una función lineal que calcule $V = f(T, P)$ para T cerca de 500°F y P cerca de 24 lb/pulg^2.

b) Estimar el volumen de una libra de vapor a una temperatura de 505°F y una presión de 24.3 lb/pulg^2.

TABLA 13.4 *Volumen (en pies cúbicos) de una libra de vapor a varias temperaturas y presiones*

Temperatura T (°F) \ Presión P (lb/pulg^2)	20	22	24	26
480	27.85	25.31	23.19	21.39
500	28.46	25.86	23.69	21.86
520	29.06	26.41	24.20	22.33
540	29.66	26.95	24.70	22.79

Solución a) Se desea conocer la linealización local alrededor del punto $T = 500$, $P = 24$, que es

$$f(T, P) \approx f(500, 24) + f_T(500, 24)(T - 500) + f_P(500, 24)(P - 24).$$

Leemos el valor $f(500, 24) = 23.69$ de la tabla.

A continuación calculamos $f_T(500, 24)$ mediante un cociente de diferencias. De la columna $P = 24$, calculamos el promedio de rapidez de cambio entre $T = 500$ y $T = 520$:

$$f_T(500, 24) \approx \frac{f(520, 24) - f(500, 24)}{520 - 500} = \frac{24.20 - 23.69}{20} = 0.0255$$

Observemos que $f_T(500, 24)$ es positiva, porque el vapor se expande cuando se calienta.

A continuación calculamos $f_P(500, 24)$ observando en el renglón de $T = 500$ y calculando la rapidez de cambio promedio entre $P = 24$ y $P = 26$:

$$f_P(500, 24) \approx \frac{f(500, 26) - f(500, 24)}{26 - 24} = \frac{21.86 - 23.69}{2} = -0.915$$

Observe que $f_P(500, 24)$ es negativo, porque al aumentar la presión del vapor decrece su volumen. Mediante estas aproximaciones para las derivadas parciales obtenemos la linealización local:

$$V = f(T, P) \approx 23.69 + 0.0255(T - 500) - 0.915(P - 24) \text{ pies}^3 \quad \begin{array}{l}\text{para } T \text{ cerca de } 500°\text{F} \\ \text{y } P \text{ cerca de } 24 \text{ lb/pulg}^2.\end{array}$$

b) Estamos interesados en calcular el volumen en $T = 505°$F y $P = 24.3$ lb/pulg^2. Como estos valores son cercanos a $T = 500°$F y $P = 24$ lb/pulg^2, usamos la relación lineal obtenida en el inciso a.

$$V \approx 23.69 + 0.0255(505 - 500) - 0.915(24.3 - 24) = 23.54 \text{ pies}^3.$$

Linealidad local con tres o más variables

Las aproximaciones lineales locales para funciones de tres o más variables siguen el mismo procedimiento que para funciones de dos variables. La linealización local de $f(x, y, z)$ en (a, b, c) está dada por

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c).$$

El diferencial

Con frecuencia nos interesa el cambio en el valor de la función conforme avanzamos desde el punto (a, b) a un punto cercano (x, y). Entonces usamos la notación

$$\Delta f = f(x, y) - f(a, b) \quad \text{y} \quad \Delta x = x - a \quad \text{y} \quad \Delta y = y - b$$

para reescribir la aproximación del plano tangente

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

en la forma

$$\Delta f \approx f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y.$$

Para a y b fijas, el lado derecho es una función lineal de Δx y Δy que se puede usar para calcular Δf. Esta función lineal recibe el nombre de *diferencial*. Por lo general, para definir el diferencial se introducen nuevas variables dx y dy para representar cambios en x y y.

El diferencial de una función $z = f(x, y)$

El **diferencial**, df (o dz), en un punto (a, b) es la función lineal de dx y dy dada por la fórmula

$$df = f_x(a, b)\,dx + f_y(a, b)\,dy.$$

El diferencial en un punto general se escribe como $df = f_x dx + f_y dy$.

Observe que el diferencial, df, es una función de cuatro variables, a, b, y dx, dy.

Ejemplo 4 Calcular los diferenciales de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = x^2 e^{5y}$ b) $z = x \operatorname{sen}(xy)$ c) $f(x, y) = x \cos(2x)$

Solución a) Como $f_x(x, y) = 2xe^{5y}$ y $f_y(x, y) = 5x^2e^{5y}$, tenemos

$$df = 2xe^{5y}\,dx + 5x^2e^{5y}\,dy.$$

b) Como $\partial z / \partial x = \text{sen}(xy) + xy\cos(xy)$ y $\partial z / \partial y = x^2\cos(xy)$, tenemos

$$dz = (\text{sen}(xy) + xy\cos(xy))\,dx + x^2\cos(xy)\,dy.$$

c) Como $f_x(x, y) = \cos(2x) - 2x\sin(2x)$ y $f_y(x, y) = 0$, tenemos

$$df = (\cos(2x) - 2x\,\text{sen}(2x))\,dx + 0\,dy = (\cos(2x) - 2x\,\text{sen}(2x))\,dx.$$

Ejemplo 5 La densidad ρ (en g/cm^3) de bióxido de carbono CO_2 depende de su temperatura T (en °C) y presión P (en atmósferas). El modelo de gas ideal para el CO_2 establece lo que se llama "ecuación de estado"

$$\rho = \frac{0.5363P}{T + 273.15}.$$

Calcular el diferencial $d\rho$. Explicar los signos de los coeficientes de dT y dP.

Solución El diferencial para $\rho = f(T, P)$ es

$$d\rho = f_T(T, P)\,dT + f_P(T, P) = \frac{-0.5363P}{(T + 273.15)^2}\,dT + \frac{0.5363}{T + 273.15}\,dP.$$

El coeficiente de dT es negativo porque al aumentar la temperatura se dilata el gas (si la presión se mantiene constante) y, por lo tanto, decrece su densidad. El coeficiente de dP es positivo porque al aumentar la presión se comprime el gas (si la temperatura se mantiene constante) y, por lo tanto, su densidad aumenta.

¿De dónde viene la notación para el diferencial?

Escribimos el diferencial como una función lineal de las nuevas variables, dx y dy. Uno puede preguntarse por qué se escogen estos nombres para nuevas variables. La razón es histórica: los inventores del cálculo consideraron dx y dy como cambios "infinitesimales" en x y y. La ecuación

$$df = f_x dx + f_y dy$$

fue considerada como una versión infinitesimal de la aproximación lineal local

$$\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y.$$

A pesar de los problemas a la hora de definir exactamente qué significa la palabra "infinitesimal", algunos matemáticos, científicos e ingenieros conciben el diferencial en términos de infinitesimales.

La figura 13.20 ilustra una manera de imaginar los diferenciales que combina la definición con este punto de vista informal. Muestra la gráfica de f junto con una vista de la gráfica alrededor del punto $(a, b, f(a, b))$ en un microscopio. Como f es localmente lineal en el punto, la vista amplificada parece un plano tangente. En el microscopio, usamos un sistema amplificado de coordenadas con su origen en el punto $(a, b, f(a, b))$ y con coordenadas dx, dy y dz a lo largo de los tres ejes. La gráfica del diferencial df es el plano tangente, que tiene ecuación $df = f_x(a, b)\,dx + f_y(a, b)\,dy$ en las coordenadas amplificadas.

Problemas par

Para l

1. z
3. z
4. S e

a
b
c

5. E
6. a

b

7. D e
8. E 2
9. E 2 a

b

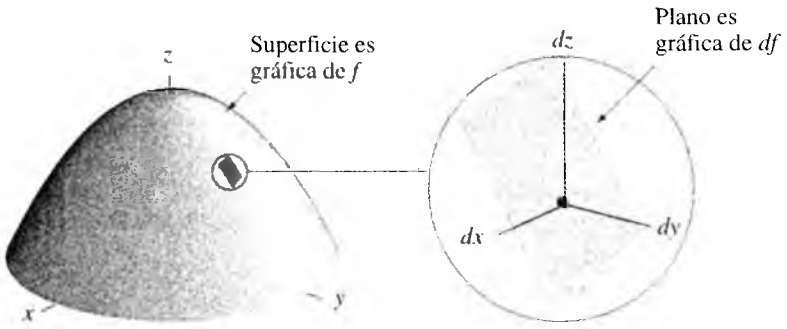


Figura 13.20 La gráfica de f, con una vista microscópica que muestra el plano tangente en el sistema coordenado amplificado

Problemas para la sección 13.3

Para las funciones de los problemas 1, 2 y 3, encuentre la ecuación del plano tangente en el punto dado.

1. $z = e^y + x + x^2 + 6$ en el punto $(1, 0, 9)$
2. $z = ye^{x/y}$ en el punto $(1, 1, e)$
3. $z = \frac{1}{2}(x^2 + 4y^2)$ en el punto $(2, 1, 4)$
4. Se pidió a un estudiante que encontrara la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^3 - y^2$ en el punto $(x, y) = (2, 3)$. Su respuesta fue

$$z = 3x^2(x - 2) - 2y(y - 3) - 1.$$

   a) A primera vista, ¿cómo sabemos que está equivocado?
   b) ¿Qué error cometió el estudiante?
   c) Conteste correctamente la pregunta.
5. Encuentre la linealización local de la función $f(x, y) = x^2y$ en el punto $(3, 1)$.
6. a) Verifique la linealidad local de $f(x, y) = e^{-x}\operatorname{sen} y$ cerca de $x = 1$, $y = 2$ mediante una tabla de valores de f para $x = 0.9, 1.0, 1.1$ y $y = 1.9, 2.0, 2.1$. Exprese valores de f con cuatro dígitos después del punto decimal. Luego haga una tabla de valores para $x = 0.99, 1.00, 1.01$ y $y = 1.99, 2.00, 2.01$, mostrando otra vez 4 dígitos después del punto decimal. ¿Parecen casi lineales ambas tablas? ¿Parece más lineal la segunda tabla que la primera?
   b) Dé la linealización local de $f(x, y) = e^{-x}\operatorname{sen} y$ en $(1, 2)$, primero usando sus tablas y luego usando el hecho que $f_x(x, y) = -e^{-x}\operatorname{sen} y$ y $f_y(x, y) = e^{-x}\cos y$.
7. Dé la linealización local para la función de pago mensual de un préstamo para la compra de un auto, en cada uno de los puntos investigados en el problema 13 de la página 108.
8. En el ejemplo 3 de la página 118 se presenta una aproximación lineal para $V = f(T, p)$ cerca de $(500, 24)$. Encuentre ahora una aproximación lineal cerca de $(480, 20)$.
9. En el ejemplo 3 de la página 118 se halló una aproximación lineal para $V = f(T, p)$ cerca de $(500, 24)$.
   a) Pruebe la precisión de este cálculo por comparación de su valor pronosticado con los cuatro valores vecinos de la tabla. ¿Qué se observa? ¿Qué valores pronosticados son precisos? ¿Cuáles no? Explique su respuesta.
   b) Sugiera una aproximación lineal para $f(T, p)$ cerca de $(500, 24)$ que no tenga la propiedad observada en el inciso a. [Sugerencia: aproxime las derivadas parciales de manera diferente.]

10. La figura 13.21 muestra un transistor cuyo estado en cualquier momento está determinado por las tres corrientes i_b, i_c e i_e y los dos voltajes v_b y v_c. Estas cinco cantidades se pueden determinar por mediciones de i_b y v_c solamente, porque hay funciones f y g (llamadas curvas características del transistor) tales que $i_c = f(i_b, v_c)$ y $v_b = g(i_b, v_c)$ y además $i_e = -i_b - i_c$. Las unidades son microamperes (mA) para i_b, volts (V) para v_c y miliamperes (mA) para i_c.

    Utilice la figura 13.22 para encontrar una aproximación lineal para f que sea válida cuando el transistor opera con i_b cerca de -300 mA y v_c cerca de -8 V.

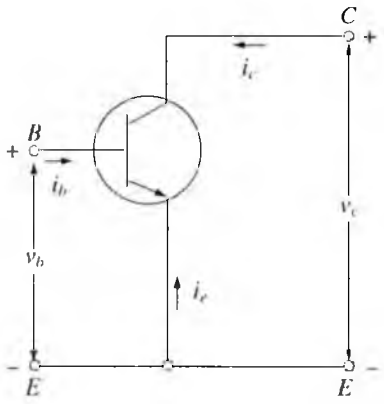


Figura 13.21

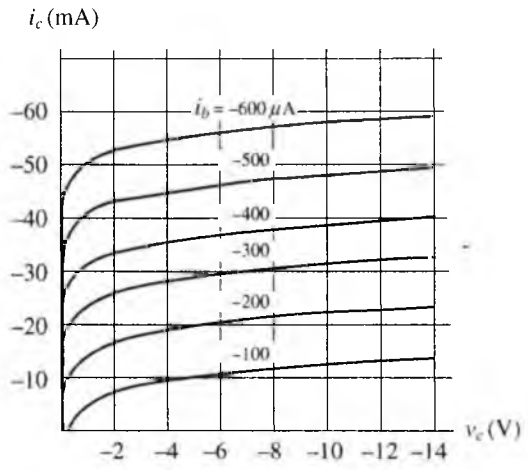


Figura 13.22 Gráficas de f como función de v_c con i_b fija.

Encuentre los diferenciales de las funciones de los problemas del 11 al 14.

11. $f(x, y) = \text{sen}\,(xy)$
12. $z = e^{-x}\cos y$
13. $g(u, v) = u^2 + uv$
14. $h(x, t) = e^{-3t}\,\text{sen}\,(x + 5t)$

Encuentre los diferenciales de las funciones de los problemas del 15 al 18 en el punto dado.

15. $f(x, y) = xe^{-y}$ en $(1, 0)$
16. $g(x, t) = x^2\,\text{sen}(2t)$ en $(2, \pi/4)$
17. $P(L, K) = 1.01L^{0.25}K^{0.75}$ en $(100, 1)$
18. $F(m, r) = Gm/r^2$ en $(100, 10)$

19. Encuentre el diferencial de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en el punto $(1, 2)$. Utilícelo para calcular $f(1.04, 1.98)$.
20. Una placa calentada de manera irregular tiene temperatura $T(x, y)$ en °C en el punto (x, y). Si $T(2, 1) = 135$, y $T_x(2, 1) = 16$, y $T_y(2, 1) = -15$, calcule la temperatura en el punto $(2.04, 0.97)$.
21. Una mol de amoniaco está contenida en un recipiente capaz de cambiar de volumen (un compartimiento sellado por un pistón, por ejemplo). La energía total U (en joules) del amoniaco es una función del volumen V (en m^3) del recipiente, y la temperatura T (en K) del gas. El diferencial dU está dado por

$$dU = 840dV + 27.32\,dT.$$

    a) ¿Cómo cambia la energía si el volumen se mantiene constante y la temperatura aumenta ligeramente?
    b) ¿Cómo cambia la energía si la temperatura se mantiene constante y el volumen aumenta ligeramente?
    c) Encuentre el cambio aproximado en energía si el gas se comprime en 100 cm^3 y se calienta en 2 K.

22. El coeficiente, β, de expansión térmica de un líquido relaciona el cambio en el volumen V (en m^3) de una cantidad fija de un líquido con un aumento en su temperatura T (en °C):

$$dV = \beta V\, dT.$$

a) Sea ρ la densidad (en kg/m^3) del agua como función de la temperatura. Escriba una expresión para encontrar $d\rho$ en términos de ρ y dT.

b) La gráfica de la figura 13.23 muestra la densidad del agua como función de la temperatura. Utilícela para calcular β cuando $T = 20°C$ y cuando $T = 80°C$.

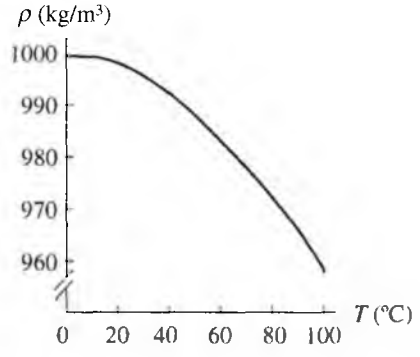


Figura 13.23

23. Un péndulo de periodo T y longitud l se utilizó para determinar g a partir de las fórmulas

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \quad \text{y} \quad l = s + \frac{k^2}{s}, \quad k < s.$$

Si las mediciones de k y s son precisas, con variación no mayor de 1%, encuentre el máximo porcentaje de error en l. Si la medición de T no varía en más de 0.5%, encuentre el máximo porcentaje de error en el valor calculado de g.

24. El periodo, T, de oscilación en segundos de un reloj de péndulo está dado por $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. La longitud del péndulo, l, depende de la temperatura, t, según la fórmula $l = l_0(1 + \alpha t)$ donde $l_0$es la longitud del péndulo a la temperatura t_0 y α es una constante que caracteriza al reloj. El reloj está puesto a tiempo a la temperatura t_0. ¿Cuántos segundos al día se atrasa o se adelanta el reloj cuando la temperatura es $t_0 + \Delta t$. Demuestre que este atraso o adelanto es independiente de l_0.

25. a) Escriba una fórmula para el número π usando sólo el perímetro L y el área A de un círculo.

b) Suponga que L y A se determinan experimentalmente. Demuestre que si los errores relativos, o de porcentaje, de los valores medidos de L y A son λ yμ, respectivamente, entonces el error resultante, o de porcentaje, en π es $2\lambda - \mu$.

13.4 GRADIENTES Y DERIVADAS DIRECCIONALES EN EL PLANO

La rapidez de cambio en una dirección arbitraria: la derivada direccional

Las derivadas parciales de una función f señalan la rapidez de cambio de f en las direcciones paralelas a los ejes coordenados. En esta sección veremos cómo calcular la rapidez de cambio de f en una dirección arbitraria.

Ejemplo 1 La figura 13.24 muestra la temperatura, en °C, en el punto (x, y). Calcular la rapidez de cambio de la temperatura promedio a medida que se pasa del punto A al punto B.

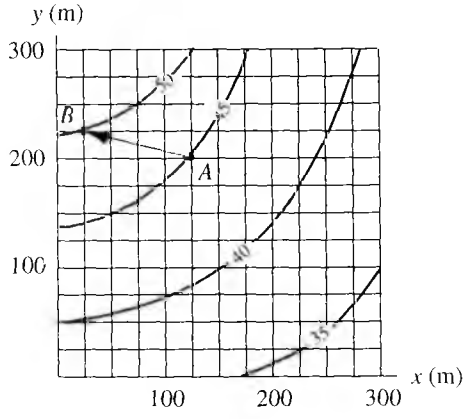


Figura 13.24 Cálculo de la rapidez de cambio en un mapa de temperatura.

Solución En el punto A estamos sobre el contorno $H = 45°$. En B estamos sobre el contorno $H = 50°$. El vector de desplazamiento de A a B tiene componente x de aproximadamente $-100\vec{i}$ y componente y de casi $25\vec{j}$, por lo que su longitud es $\sqrt{(-100)^2 + 25^2} \approx 103$. En consecuencia, la temperatura aumenta 5°C al avanzar 103 metros y el promedio de rapidez de cambio de la temperatura en esa dirección es alrededor de $5/103 \approx 0.05$°C/m.

Suponga que se necesita calcular la rapidez de cambio de una función $f(x, y)$ en el punto $P = (a, b)$ en la dirección del vector unitario $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$. Para $h > 0$, considere el punto $Q = (a + hu_1, b + hu_2)$ cuyo desplazamiento desde P es $h\vec{u}$ (véase Fig. 13.25). Como $\|\vec{u}\| = 1$, la distancia de P a Q es h. Por lo tanto,

$$\text{Rapidez de cambio promedio en } f \text{ de } P \text{ a } Q = \frac{\text{Cambio en } f}{\text{Distancia de } P \text{ a } Q} = \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h}.$$

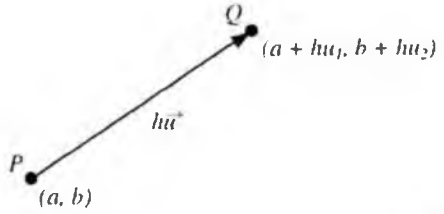


Figura 13.25 Desplazamiento de $h\vec{u}$ desde el punto (a, b).

Al tomar el límite a medida que $h \to 0$ se obtiene la rapidez de cambio instantánea y la siguiente definición:

Derivada direccional de f en (a, b) en la dirección de un vector unitario $\vec{u}$.

Si $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ es un vector unitario, definimos la derivada direccional, $f_{\vec{u}}$, por

$$f_{\vec{u}}(a, b) = \begin{array}{c}\text{Rapidez de cambio}\\ \text{de } f \text{ en dirección}\\ \text{de } \vec{u} \text{ en } (a, b)\end{array} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h},$$

siempre que exista el límite.

Observe que si $\vec{u} = \vec{i}$, de manera que $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, entonces la derivada direccional es f_x, porque

$$f_{\vec{i}}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = f_x(a, b).$$

De igual manera, si $\vec{u} = \vec{j}$ entonces la derivada direccional $f_{\vec{j}} = f_y$.

¿Qué pasa si no se tiene un vector unitario?

Definimos $f_{\vec{u}}$ para $\vec{u}$ un vector unitario. Si $\vec{v}$ no es un vector unitario, $\vec{v} \neq \vec{0}$, construimos un vector unitario $\vec{u} = \vec{v} / \|\vec{v}\|$ en la misma dirección que $\vec{v}$ y definimos la rapidez de cambio de f en la dirección de $\vec{v}$ como $f_{\vec{u}}$.

Ejemplo 2 Para cada una de las funciones f, g y h de la figura 13.26, decir si la derivada direccional en el punto indicado es positiva, negativa o cero, en la dirección del vector $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$, y en la dirección del vector $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

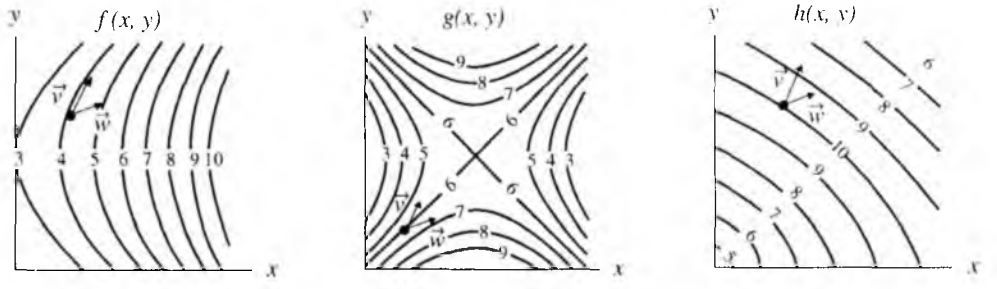


Figura 13.26 Diagramas de contorno de tres funciones con vectores de dirección $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}$ marcados en cada uno.

Solución En el diagrama de contorno para f, el vector $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ parece ser tangente al contorno. Por lo tanto, en esta dirección, el valor de la función no está cambiando y por esto la derivada direccional en la dirección de $\vec{v}$ es cero. El vector $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}$ apunta desde el contorno marcado 4 hacia el contorno marcado 5. En consecuencia, los valores de la función son crecientes y la derivada direccional en la dirección de $\vec{w}$ positiva.

En el diagrama de contorno para g, el vector $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ apunta desde el contorno marcado 6 hacia el contorno marcado 5, así que la función es decreciente en esa dirección. Por lo tanto, la rapidez de cambio es negativa. Por otro lado, el vector $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}$ apunta desde el contorno marcado 6 hacia el contorno marcado 7, y en consecuencia la derivada direccional en la dirección de $\vec{w}$ es positiva.

Por último, sobre el diagrama de contorno para h, ambos vectores apuntan desde el contorno $h = 10$ hacia el contorno $h = 9$, así que ambas derivadas direccionales son negativas.

Ejemplo 3 Calcular la derivada direccional de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $(1, 0)$ en la dirección del vector $\vec{i} + \vec{j}$.

Solución Primero debemos encontrar el vector unitario en la misma dirección que el vector $\vec{i} + \vec{j}$. Como este vector tiene magnitud $\sqrt{2}$, el vector unitario es

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}.$$

Por lo tanto,

$$f_{\vec{u}}(1, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h/\sqrt{2}, h\sqrt{2}) - f(1, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h\sqrt{2})^2 + (h/\sqrt{2})^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2}h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (\sqrt{2} + h) = \sqrt{2}.$$

Cálculo de derivadas direccionales a partir de derivadas parciales

Si f es diferenciable, ahora veremos cómo usar linealidad local para encontrar una fórmula para la derivada direccional que no implica un límite. Si $\vec{u}$ es un vector unitario, la definición de $f_{\vec{u}}$ dice

$$f_{\vec{u}}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h},$$

donde $\Delta f = f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)$ es el cambio en f. Se escribe Δx para el cambio en x, así que $\Delta x = (a + hu_1) - a = hu_1$; análogamente, $\Delta y = hu_2$. Por linealidad local se tiene

$$\Delta f \approx f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y = f_x(a, b)hu_1 + f_y(a, b)hu_2.$$

Por lo tanto, al dividir entre h resulta

$$\frac{\Delta f}{h} \approx \frac{f_x(a, b)hu_1 + f_y(a, b)hu_2}{h} = f_x(a, b)u_1 + f_y(a, b)u_2.$$

Esta aproximación se hace exacta a medida que $h \to 0$, así que tenemos la siguiente fórmula:

$$\boxed{f_{\vec{u}}(a, b) = f_x(a, b)u_1 + f_y(a, b)u_2.}$$

Ejemplo 4 Utilizar la fórmula anterior para calcular la derivada direccional del ejemplo 3. Comprobar que se obtiene la misma respuesta que antes.

Solución Calculamos $f_{\vec{u}}(1, 0)$, donde $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$.

Las derivadas parciales son $f_x(x, y) = 2x$ y $f_y(x, y) = 2y$. Por lo tanto, como antes,

$$f_{\vec{u}}(1, 0) = f_x(1, 0)u_1 + f_y(1, 0)u_2 = (2)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}.$$

El vector gradiente

Observe que la expresión para $f_{\vec{u}}$ se puede escribir como un producto punto de $\vec{u}$ y un nuevo vector:

$$f_{\vec{u}}(a, b) = f_x(a, b)u_1 + f_y(a, b)u_2 = (f_x(a, b)\vec{i} + f_y(a, b)\vec{j}) \cdot (u_1\vec{i} + u_2\vec{j}).$$

El nuevo vector, $f_x(a, b)\vec{i} + f_y(a, b)\vec{j}$, es importante. Por lo tanto, hacemos la siguiente definición:

El vector gradiente de una función diferenciable en el punto (a, b) es

$$\text{grad } f(a, b) = f_x(a, b)\vec{i} + f_y(a, b)\vec{j}$$

La fórmula para la derivada direccional se puede escribir en términos del gradiente, así:

La derivada direccional y el gradiente

Si f es diferenciable en (a, b), entonces

$$f_{\vec{u}}(a, b) = f_x(a, b)u_1 + f_y(a, b)u_2 = \text{grad } f(a, b) \cdot \vec{u},$$

donde $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ es un vector unitario.

Ejemplo 5 Encontrar el vector gradiente de $f(x, y) = x + e^y$ en el punto (1, 1).

Solución Por la definición, tenemos

$$\text{grad } f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} = \vec{i} + e^y\vec{j},$$

así que en el punto (1, 1)

$$\text{grad } f(1, 1) = \vec{i} + e\vec{j}.$$

Notación alternativa para el gradiente

Puede considerarse $\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$ como el resultado de aplicar el operador vectorial (se pronuncia "del")

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$$

a la función f. Por lo tanto, obtenemos la notación opcional

$$\text{grad } f = \nabla f.$$

¿Qué indica el gradiente?

El hecho que $f_{\vec{u}} = \text{grad}\, f \cdot \vec{u}$ hace posible entender lo que representa el vector gradiente. Supongamos que θ es el ángulo entre los vectores grad f y $\vec{u}$. En el punto (a, b), tenemos

$$f_{\vec{u}} = \text{grad}\, f \cdot \vec{u} = \|\text{grad}\, f\| \underbrace{\|\vec{u}\|}_{1} \cos\theta = \|\text{grad}\, f\| \cos\theta.$$

Imagine que grad f está fijo y que $\vec{u}$ puede girar (véase Fig. 13.27). El máximo valor de $f_{\vec{u}}$ ocurre cuando $\cos\theta = 1$, de modo que $\theta = 0$ y $\vec{u}$ apunta en la dirección del gradiente de f. Entonces

$$\text{Máximo } f_{\vec{u}} = \|\text{grad}\, f\| \cos 0 = \|\text{grad}\, f\|.$$

El valor mínimo de $f_{\vec{u}}$ ocurre cuando $\cos\theta = -1$, así que $\theta = \pi$ y $\vec{u}$ apunta en la dirección opuesta a grad f. Entonces

$$\text{Mínimo } f_{\vec{u}} = \|\text{grad}\, f\| \cos\pi = -\|\text{grad}\, f\|.$$

Cuando $\theta = \pi/2$ o $3\pi/2$, entonces $\cos\theta = 0$, y la derivada direccional es cero.

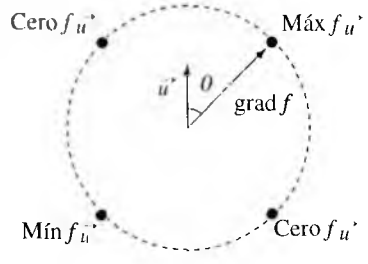


Figura 13.27 Valores de la derivada direccional a diferentes ángulos del gradiente.

Propiedades del vector gradiente

Hemos visto que el vector gradiente apunta en la dirección de la máxima rapidez de cambio en un punto y la magnitud del vector gradiente es la de la rapidez de cambio.

La figura 13.28 muestra que el vector gradiente en cualquier punto es perpendicular al contorno que pasa por ese punto. Si suponemos que f es diferenciable en el punto (a, b), la linealidad local nos indica que los contornos de f cerca de (a, b) aparecen rectos, paralelos e igualmente espaciados. La máxima rapidez de cambio se obtiene al avanzar en dirección al siguiente contorno recorriendo la distancia más corta posible, que es la dirección perpendicular al contorno. Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

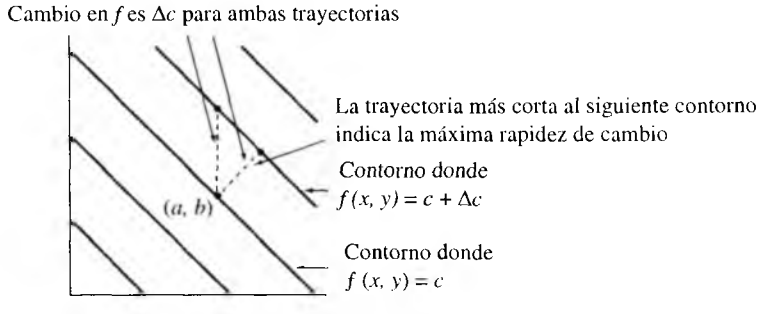

Cambio en f es Δc para ambas trayectorias
La trayectoria más corta al siguiente contorno indica la máxima rapidez de cambio
Contorno donde $f(x, y) = c + \Delta c$
(a, b)
Contorno donde $f(x, y) = c$

Figura 13.28 Vista en acercamiento de los contornos alrededor de (a, b), mostrando que el gradiente es perpendicular a los contornos.

Propiedades geométricas del vector gradiente

Si f es una función diferenciable en el punto (a, b) y grad $f(a, b) \neq \vec{0}$, entonces:

- La dirección de grad $f(a, b)$ es
  - Perpendicular al contorno de f que pasa por (a, b)
  - En la dirección de f creciente
- La magnitud del vector gradiente, $\|\text{grad } f\|$, es
  - La máxima rapidez de cambio de f en este punto
  - Grande cuando los contornos están juntos y pequeña cuando están más separados.

Ejemplos de derivadas direccionales y vectores gradiente

Ejemplo 6 Explicar por qué los vectores gradiente en los puntos A y C de la figura 13.29 tienen la dirección y las magnitudes relativas que tienen.

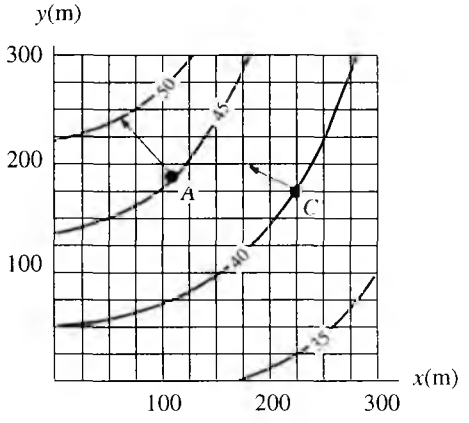


Figura 13.29 Un mapa de temperatura que muestra direcciones y magnitudes relativas de dos vectores gradiente.

Solución El vector gradiente apunta en la dirección de máximo aumento de la función. Esto indica que en la figura 13.29, el gradiente apunta directamente hacia temperaturas más altas. La magnitud del vector gradiente mide la rapidez de cambio. El vector gradiente en A es más largo que el vector gradiente en C porque los contornos están más juntos cerca de A, por lo cual la rapidez de cambio es mayor.

El ejemplo 2 de la página 125 muestra cómo el diagrama de contorno indica el signo de la derivada direccional. En el siguiente ejemplo calculamos la derivada direccional en tres direcciones, dos cercanas a la del vector gradiente y una apartada.

Ejemplo 7 Utilizar el gradiente para encontrar la derivada direccional de $f(x, y) = x + e^y$ en el punto $(1, 1)$ en la dirección de los vectores $\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{i} + 3\vec{j}$.

Solución En el ejemplo 5 encontramos

$$\text{grad } f\,(1, 1) = \vec{i} + e\vec{j}$$

Un vector unitario en la dirección de $\vec{i} - \vec{j}$ es $\vec{s} = (\vec{i} - \vec{j}) / \sqrt{2}$, así que

$$f_{\vec{s}}(1, 1) = \text{grad } f\,(1, 1) \cdot \vec{s} = (\vec{i} + e\vec{j}) \cdot \left(\frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1 - e}{\sqrt{2}} \approx -1.215.$$

Un vector unitario en la dirección de $\vec{i} + 2\vec{j}$ es $\vec{v} = (\vec{i} + 2\vec{j}) / \sqrt{5}$, así que

$$f_{\vec{v}}(1, 1) = \text{grad } f\,(1, 1) \cdot \vec{v} = (\vec{i} + e\vec{j}) \cdot \left(\frac{\vec{i} - 2\vec{j}}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1 - 2e}{\sqrt{5}} \approx 2.879.$$

Un vector unitario en la dirección de $\vec{i} + 3\vec{j}$ es $\vec{w} = (\vec{i} + 3\vec{j}) / \sqrt{10}$, así que

$$f_{\vec{w}}(1, 1) = \text{grad } f\,(1, 1) \cdot \vec{w} = (\vec{i} + e\vec{j}) \cdot \left(\frac{\vec{i} + 3\vec{j}}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1 + 3e}{\sqrt{10}} \approx 2.895.$$

Ahora comparemos los resultados con el valor de $\|\text{grad } f\| = \sqrt{1 + e^2} \approx 2.895$. Uno de ellos no es cercano a este valor; los otros dos, $f_{\vec{v}} = 2.895$ y $f_{\vec{w}} = 2.895$ sí, pero son ligeramente menores que $\|\text{grad } f\|$. Como $\|\text{grad } f\|$ es la máxima rapidez de cambio de f en el punto, esperaríamos, para cualquier vector unitario $\vec{u}$:

$$f_{\vec{u}}(1, 1) \leq \|\text{grad } f\|.$$

cumpliéndose la igualdad cuando $\vec{u}$ está en la dirección grad f. Como $e \approx 2.718$, los vectores $\vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{i} + 3\vec{j}$ apuntan ambos aproximada, pero no exactamente, en la dirección del vector grad $f\,(1, 1) = \vec{i} + e\vec{j}$. Por lo tanto, los valores de $f_{\vec{v}}$ y $f_{\vec{w}}$ son ambos cercanos al valor de $\|\text{grad } f\|$. La dirección del vector $\vec{i} - \vec{j}$ no es cercana a la de grad f y el valor de $f_{\vec{s}}$ no es parecido al valor de $\|\text{grad } f\|$.

Problemas para la sección 13.4

1. Suponga que $f\,(x, y) = x + \ln y$. Por cociente de diferencias, como en el ejemplo 1 de la página 124, calcule
   a) La rapidez de cambio de f a medida que salimos del punto (1, 4) hacia el punto (3, 5).
   b) La rapidez de cambio de f a medida que llegamos al punto (3, 5)
2. Mediante el límite de un cociente de diferencias, calcule la rapidez de cambio de $f\,(x, y) = 2x^2 + y^2$ en el punto (2, 1) conforme avanzamos en la dirección del vector $\vec{u} = (\vec{i} + \vec{j}) / \sqrt{2}$.

Para los problemas del 3 al 8 utilice la figura 13.30 que muestra curvas de nivel de $f\,(x, y)$, para calcular las derivadas direccionales.

3. $f_{\vec{i}}(3, 1)$
4. $f_{\vec{j}}(3, 1)$
5. $f_{\vec{u}}(3, 1)$ donde $\vec{u} = (\vec{i} - \vec{j}) / \sqrt{2}$
6. $f_{\vec{u}}(3, 1)$ donde $\vec{u} = (-\vec{i} + \vec{j}) / \sqrt{2}$
7. ¿Para qué parte de la región rectangular mostrada en la figura 13.30 es positiva $f_{\vec{i}}$?
8. ¿Para qué parte de la región rectangular mostrada en la figura 13.30 es negativa $f_{\vec{j}}$?

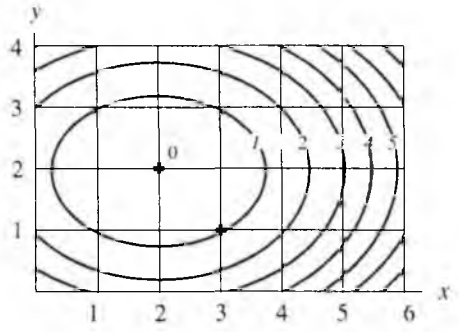


Figura 13.30

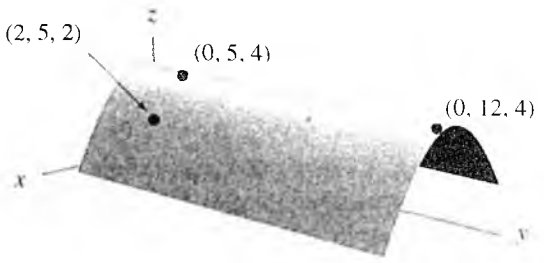


Figura 13.31

9. En la figura 13.31 se muestra la superficie $z = g(x, y)$. ¿Cuál es el signo de cada una de las siguientes derivadas direccionales?
   a) $g_{\vec{u}}(2, 5)$ donde $\vec{u} = (\vec{i} - \vec{j})/\sqrt{2}$.
   b) $g_{\vec{u}}(2, 5)$ donde $\vec{u} = (\vec{i} + \vec{j})/\sqrt{2}$.
10. Si $f(x, y) = x^2 + \ln y$, encuentre (a) grad f (b) grad f en $(4, 1)$.

En los problemas del 11 al 22 encuentre el gradiente de la función z dada. Suponga que las variables están restringidas a un dominio en el que la función está definida.

11. $z = \operatorname{sen}(x/y)$
12. $z = xe^y$
13. $z = (x + y)e^y$
14. $z = \tan^{-1}(x/y)$
15. $z = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$
16. $z = xe^y/(x + y)$
17. $f(m, n) = m^2 + n^2$
18. $f(x, y) = \frac{3}{2}x^5 - \frac{4}{7}y^6$
19. $f(s, t) = \dfrac{1}{\sqrt{s}}(t^2 - 2t + 4)$
20. $f(\alpha, \beta) = \dfrac{2\alpha + 3\beta}{2\alpha - 3\beta}$
21. $f(\alpha, \beta) = \sqrt{5\alpha^2 + \beta^2}$
22. $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy) + \cos(xy)$

En los problemas del 23 al 26 calcule el gradiente en el punto especificado.

23. $f(m, n) = 5m^2 + 3n^4$, en $(5, 2)$
24. $f(x, y) = x^2y + 7xy^3$, en $(1, 2)$
25. $f(x, y) = \sqrt{\tan x + y}$, en $(0, 1)$
26. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2) + \cos y$, en $\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, 0\right)$

27. Sea $f(x, y) = (x + y)/(1 + x^2)$. Encuentre la derivada direccional en $P = (1, -2)$ en la dirección de los vectores
   a) $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$,
   b) $\vec{v} = -\vec{i} + 4\vec{j}$.
   c) ¿Cuál es la dirección del máximo aumento en P?
28. Se pidió a un estudiante que encontrara la derivada direccional de $f(x, y) = x^2e^y$ en el punto $(1, 0)$ en la dirección de $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$. Su respuesta fue

$$f_{\vec{u}}(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot u = \frac{8}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}.$$

   a) A primera vista, ¿Cómo se sabe que esto es erróneo?
   b) ¿Cuál es la respuesta correcta?

29. Encuentre la derivada direccional de $f(x, y) = e^x \tan(y) + 2x^2y$ en el punto $(0, \pi/4)$ en las siguientes direcciones (a) $\vec{i} - \vec{j}$ y (b) $\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$.

30. Encuentre la derivada direccional de $z = x^2y$ en el punto (1, 2) en la dirección que forme un ángulo de $5\pi/4$ con el eje x. ¿En qué dirección es máxima la derivada direccional?

31. Encuentre la rapidez de cambio de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el punto (1, 2) en la dirección del vector $\vec{u} = 0.6\vec{i} + 0.8\vec{j}$.

32. La derivada direccional de $z = f(x, y)$ en el punto (2, 1) en dirección al punto (1, 3) es $-2/\sqrt{5}$, y la derivada direccional en dirección al punto (5, 5) es 1. Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en el punto (2, 1).

33. Considere la función $f(x, y)$. Si comenzamos en el punto (4, 5) y avanzamos hacia el punto (5, 6), la derivada direccional es 2. Al comenzar en el punto (4, 5) y avanzar hacia el punto (6, 6) resulta una derivada direccional de 3. Encuentre ∇f en el punto (4, 5).

34. La temperatura en cualquier punto del plano está dada por la función

$$T(x, y) = \frac{100}{x^2 + y^2 + 1}$$

a) ¿Qué forma tienen las curvas de nivel de T?
b) ¿Cuál lugar del plano es el más caliente? ¿Cuál es la temperatura en ese punto?
c) Encuentre la dirección del máximo aumento en temperatura en el punto (3, 2). ¿Cuál es la magnitud de ese máximo aumento?
d) Encuentre la dirección del máximo decremento en temperatura en el punto (3, 2).
e) Encuentre una dirección en el punto (3, 2) en la que la temperatura no aumente ni disminuya.

35. Una función diferenciable $f(x, y)$ tiene la propiedad de que $f_x(4, 1) = 2$ y $f_y(4, 1) = -1$. Encuentre la ecuación de la línea tangente a la curva de nivel de f que pasa por el punto (4, 1).

36. La figura 13.32 representa las curvas de nivel $f(x, y) = c$; los valores de f en cada curva están marcados. En cada una de las siguientes partes, indique si la cantidad dada es positiva, negativa o cero. Explique su respuesta.

a) El valor de $\nabla f \cdot \vec{i}$ en P.
b) El valor de $\nabla f \cdot \vec{j}$ en P.
c) $\partial f/\partial x$ en Q.
d) $\partial f/\partial y$ en Q.

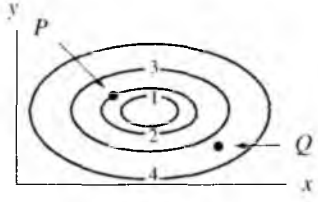


Figura 13.32

37. En la figura 13.32, ¿cuál es mayor $\|\nabla f\|$ en P o $\|\nabla f\|$ en Q? Explique cómo llega a esta conclusión.

38. El diagrama de la figura 13.33 muestra las curvas de nivel de una función $z = f(x, y)$. En los puntos (1, 1) y (1, 4) del diagrama, dibuje un vector que represente grad f. Explique cómo encontró la dirección y longitud aproximadas de cada vector.

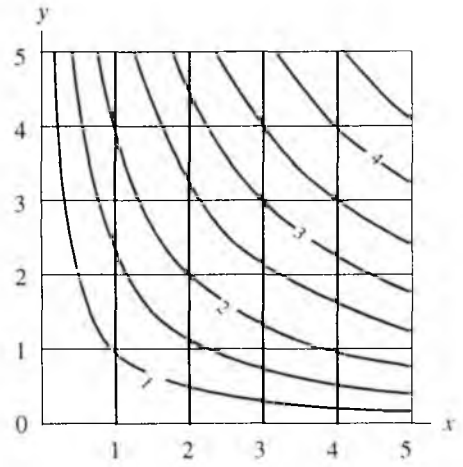


Figura 13.33 Contornos de f.

39. La figura 13.35 es una gráfica de la derivada direccional, $f_{\vec{u}}$, en el punto (a, b) contra θ, el ángulo que se muestra en la figura 13.34.
    a) ¿Qué puntos sobre la gráfica de la figura 13.35 corresponden a la máxima rapidez de aumento de f ? ¿Y a la máxima rapidez de disminución?
    b) Marque los puntos del círculo de la figura 14.34 correspondientes a los puntos P, Q, R, S.
    c) ¿Cuál es la amplitud de la función graficada en la figura 13.35? ¿Cuál es su fórmula?

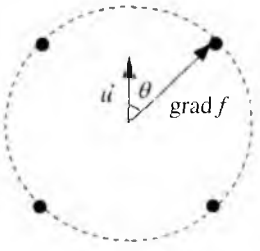


Figura 13.34

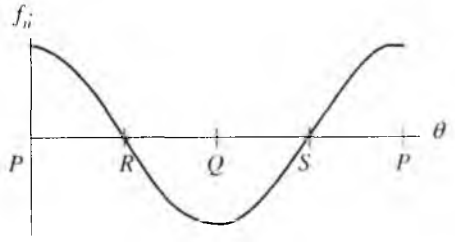


Figura 13.35

40. En este problema se presenta otra manera de explicar la fórmula $f_{\vec{u}}(a, b) = \text{grad } f(a, b) \cdot \vec{u}$. Imagine hacer un acercamiento en una función $f(x, y)$ en un punto (a, b). Por linealidad local, los contornos alrededor de (a, b) se parecen a los contornos de una función lineal. Véase la figura 13.36. Suponga que se necesita encontrar la derivada direccional $f_{\vec{u}}(a, b)$ en la dirección de un vector unitario $\vec{u}$. Si pasamos de P a Q, una pequeña distancia h en la dirección de $\vec{u}$, entonces la derivada direccional se calcula por el cociente de diferencia

$$\frac{\text{Cambio de } f \text{ entre } P \text{ y } Q}{h}$$

    a) Utilice el gradiente para demostrar que

$$\text{Cambio de } f \approx \|\text{grad } f\| (h \cos \theta)$$

b) Utilice el inciso a para justificar la fórmula de $f_{\vec{u}}(a, b) = \text{grad } f(a, b) \cdot \vec{u}$.

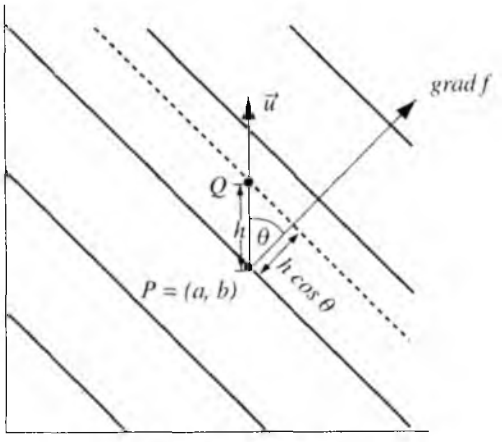


Figura 13.36

13.5 GRADIENTES Y DERIVADAS DIRECCIONALES EN EL ESPACIO

Derivadas direccionales de funciones de tres variables

Calculamos las derivadas direccionales de una función de tres variables de la misma manera que para una función de dos variables. Si la función f es diferenciable en el punto (a, b, c) y si $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ es un vector unitario, entonces la rapidez de cambio de $f(x, y, z)$ en la dirección de $\vec{u}$ en el punto (a, b, c) es

$$f_{\vec{u}}(a, b, c) = f_x(a, b, c)u_1 + f_y(a, b, c)u_2 + f_z(a, b, c)u_3.$$

Esto se puede justificar si usamos linealidad local igual que para funciones de dos variables.

Ejemplo 1 Encontrar la derivada direccional de $f(x, y, z) = xy + z$ en el punto $(-1, 0, 1)$ en la dirección del vector $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{k}$.

Solución La magnitud de $\vec{v}$ es $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$, así que un vector unitario en la misma dirección que $\vec{v}$ es

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + 0\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}.$$

Las derivadas parciales de f son

$$f_x(x, y, z) = y \quad \text{y} \quad f_y(x, y, z) = x \quad \text{y} \quad f_z(x, y, z) = 1.$$

Por lo tanto,

$$f_{\vec{u}}(-1, 0, 1) = f_x(-1, 0, 1)u_1 + f_y(-1, 0, 1)u_2 + f_z(-1, 0, 1)u_3$$
$$= (0)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + (-1)(0) + (1)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

El vector gradiente de una función de tres variables

El gradiente de una función de tres variables se define en la misma forma que para dos variables:

$$\text{grad } f(a, b, c) = f_x(a, b, c)\vec{i} + f_y(a, b, c)\vec{j} + f_z(a, b, c)\vec{k}.$$

Geométricamente, el gradiente es el vector que apunta en la dirección de máximo aumento de f, cuya magnitud es la rapidez de aumento en esa dirección.

Así como el vector gradiente de una función de dos variables es perpendicular a las curvas de nivel, el gradiente de una función de tres variables es perpendicular a las superficies de nivel. La razón es la misma: la función tiene el mismo valor en toda la superficie de nivel, así que para cambiar el valor tan rápidamente como sea posible uno necesita alejarse cuanto antes de la superficie de nivel, es decir, en la dirección perpendicular a ésta.

Ejemplo 2 Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ y $g(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2$. ¿Qué puede decirse acerca de la dirección de los siguientes vectores?

a) grad $f(0, 1, 1)$ b) grad $f(1, 0, 1)$ c) grad $g(0, 1, 1)$ d) grad $g(1, 0, 1)$.

Solución El cilindro $x^2 + y^2 = 1$ de la figura 13.37 es una superficie de nivel de f y contiene los puntos $(0, 1, 1)$ y $(1, 0, 1)$. Como el valor de f no cambia en absoluto en la dirección z, todos los vectores gradiente son horizontales. Son perpendiculares al cilindro y apuntan hacia afuera porque el valor de f aumenta conforme se sale del origen.

De igual manera, los puntos $(0, 1, 1)$ y $(1, 0, 1)$ también están en la misma superficie de nivel de g, es decir $g(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 = -2$, que es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Parte de esta superficie de nivel se muestra en la figura 13.38. Esta vez los vectores gradiente apuntan hacia dentro, porque los signos negativos indican que la función aumenta (de valores negativos grandes a valores negativos pequeños) conforme uno avanza hacia dentro.

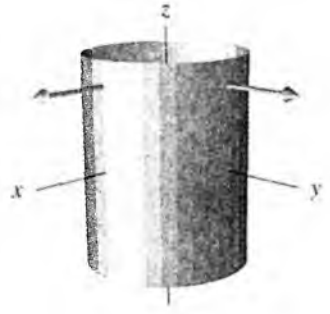


Figura 13.37 La superficie de nivel $f(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$ con dos vectores gradiente.

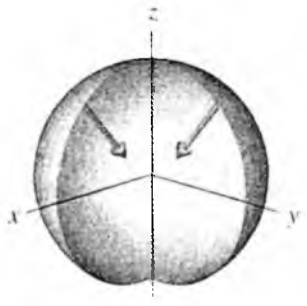


Figura 13.38 La superficie de nivel $g(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 = -2$ con dos vectores gradiente.

Ejemplo 3 Considere las funciones $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$ y $g(x, y) = 4 - x^2$. Calcule un vector perpendicular a cada una de las siguientes:

a) La curva de nivel de f en el punto $(1, 1)$ b) La superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 1, 1)$
c) La curva de nivel de g en el punto $(1, 1)$ d) La superficie $z = g(x, y)$ en el punto $(1, 1, 3)$

Solución a) El vector que buscamos un vector en el plano. Como grad $f = -2x\vec{i} - 4y\vec{j}$, tenemos

$$\text{grad } f(1, 1) = -2\vec{i} - 4\vec{j}.$$

Cualquier múltiplo diferente de cero de este vector es perpendicular a la curva de nivel en el punto $(1, 1)$.

b) En este caso buscamos un vector en el espacio de tres dimensiones. Para encontrarlo reescribimos $z = 4 - x^2 - 2y^2$ como la superficie de nivel de la función F, donde

$$F(x, y, z) = 4 - x^2 - 2y^2 - z = 0.$$

Entonces

$$\text{grad } F = -2x\vec{i} - 4y\vec{j} - \vec{k},$$

así que

$$\text{grad } F(1, 1, 1) = -2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k},$$

y grad F (1, 1, 1) es perpendicular a la superficie $z = 4 - x^2 - 2y^2$ en el punto (1, 1, 1). Observe que $2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$ no es la única respuesta posible: cualquier múltiplo de este vector vale como respuesta.

c) Buscamos un vector de dos dimensiones. Como grad $g = 2x\vec{i} + 0\vec{j}$, tenemos

$$\text{grad } g(1, 1) = -2\vec{i}.$$

Cualquier múltiplo de este vector también es perpendicular a la curva de nivel.

d) Buscamos un vector de tres dimensiones. Reescribimos $z = 4 - x^2$ como la superficie de nivel de la función G, donde

$$G(x, y, z) = 4 - x^2 - z = 0.$$

Entonces

$$\text{grad } G = -2x\vec{i} - \vec{k}$$

Así que

$$\text{grad } G(1, 1, 3) = -2\vec{i} - \vec{k},$$

y cualquier múltiplo de grad G (1, 1, 3) es perpendicular a la superficie $z = 4 - x^2$ en este punto.

Ejemplo 4 a) Un excursionista en la superficie $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$ en el punto (1, – 1, 1) comienza a subir a lo largo de la trayectoria de ascenso más pronunciado. ¿Cuál es la relación entre el vector gradiente de f (1, –1) y un vector tangente a la trayectoria en el punto (1, –1, 1) y que apunta cerro arriba?

b) Considéresc la superficie $g(x, y) = 4 - x^2$. ¿Cuál es la relación entre grad g (–1, –1) y un vector tangente a la trayectoria de ascenso más pronunciado en (–1, –1, 3)?

c) En el punto (1, –1, 1) en la superficie $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, calcule un vector perpendicular a la superficie y un vector, $\vec{T}$, tangente a la curva de ascenso más pronunciado.

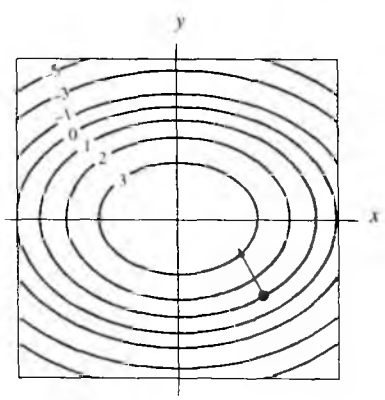


Figura 13.39 Diagrama de contorno para $z = f(x, y)$ $4 - x^2 - 2y^2$ mostrando dirección de gradiente de f (1, –1).



Figura 13.40 Gráfica de $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$ mostrando trayectoria de ascenso más pronunciado desde el punto (1, –1, 1).



Figura 1
para z =
direcció

Solución a) El ex
vecto
f aur
tange
13.40
b) El pu
en qu
pronu
c) La su
norma

Tomar
que, p

Buscar

De mo

Ejemplo 5 Encontrar la

Solución Escribimos l

Tenemos

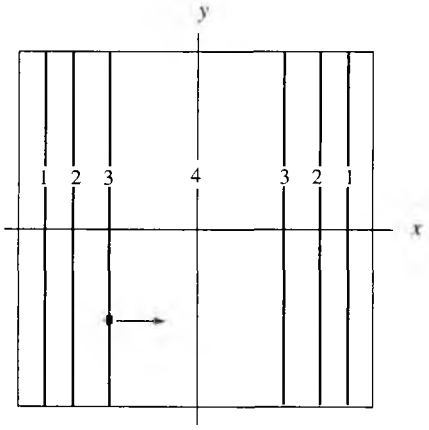


Figura 13.41 Diagrama de contorno para $z = g\,(x, y) = 4 - x^2$ mostrando dirección de gradiente de $g\,(-1, -1)$.

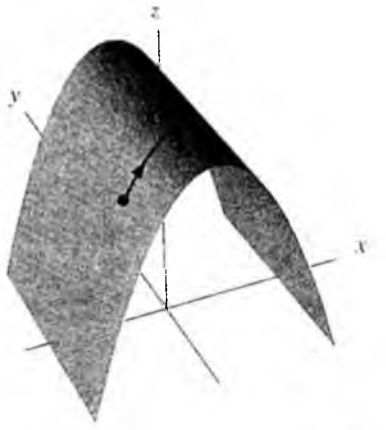


Figura 13.42 Gráfica de $g\,(x, y) = 4 - x^2$ mostrando trayectoria de ascenso más pronunciado desde el punto $(-1, -1, 3)$.

Solución

a) El excursionista en el punto $(1, -1, 1)$ está directamente sobre el punto $(1, -1)$ en el plano xy. El vector grad $f\,(1, -1)$ está en dos dimensiones, apuntando como una brújula en la dirección en que f aumenta más rápidamente. Por lo tanto, grad $f\,(1, -1)$ está directamente debajo de un vector tangente a la trayectoria del excursionista en $(1, -1, 1)$ y apunta cerro arriba (véase Figs. 13.39 y 13.40).

b) El punto $(-1, -1, 3)$ está encima del punto $(-1, -1)$. El vector grad $g\,(-1, -1)$ apunta en la dirección en que g aumenta en forma más rápida y está directamente debajo de la trayectoria de ascenso más pronunciado (véase Figs. 13.41 y 13.42).

c) La superficie está representada por $F\,(x, y, z) = 4 - x^2 - 2y^2 = 0$. Como grad $F = 2x\vec{i} - 4y\vec{j} - \vec{k}$ la normal, $\vec{N}$, a la superficie está dada por

$$\vec{N} = \text{grad } F(1, -1, 1) = -2(1)\vec{i} - 4(-1)\vec{j} - \vec{k} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}\,.$$

Tomamos las componentes $\vec{i}$ y $\vec{j}$ de $\vec{T}$ como el vector grad $f\,(1, -1) = -2\vec{i} + 4\vec{j}$. Por lo tanto, tenemos que, para alguna $a > 0$,

$$\vec{T} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + a\vec{k}$$

Buscamos $\vec{N} \cdot \vec{T}$, por lo que

$$\vec{N} \cdot \vec{T} = (-2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}) \cdot (-2\vec{i} + 4\vec{j} + a\vec{k}) = 4 + 16 - a = 0.$$

De modo que $a = 20$ y por lo tanto

$$\vec{T} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 20\vec{k}\,.$$

Ejemplo 5 Encontrar la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ en el punto $(1, 2, 3)$.

Solución Escribimos la esfera como una superficie de nivel, así:

$$f\,(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 14.$$

Tenemos

$$\text{grad } f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}\,,$$

así que el vector

$$\text{grad } f\ (1, 2, 3) = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$$

es perpendicular a la esfera en el punto (1, 2, 3). Como el vector grad f (1, 2, 3) es normal al plano tangente, la ecuación del plano es

$$2x + 4y + 6z = 2(1) + 4(2) + 6(3) = 28 \quad \text{o sea} \quad x + 2y + 3z = 14.$$

Ojo: unidades y la interpretación geométrica del gradiente

Cuando interpretamos en forma geométrica el gradiente de una función (página 129), tácitamente supusimos que las escalas a lo largo de los ejes x y y eran las mismas. Si no lo son, el vector gradiente puede no parecer perpendicular a los contornos. Considere la función $f\ (x, y) = x^2 + y$ con vector gradiente dado por grad $f = 2x\vec{i} + \vec{j}$. La figura 13.43 muestra el vector gradiente en (1, 1) usando las mismas escalas en las direcciones x y y. Como es de esperarse, el vector gradiente es perpendicular a la línea de contorno. La figura 13.44 muestra contornos de la misma función con escalas diferentes en los dos ejes. Observe que el vector gradiente ya no parece perpendicular a las líneas de contorno. Por lo tanto, vemos que la interpretación geométrica del vector gradiente exige que se use la misma escala en los dos ejes.

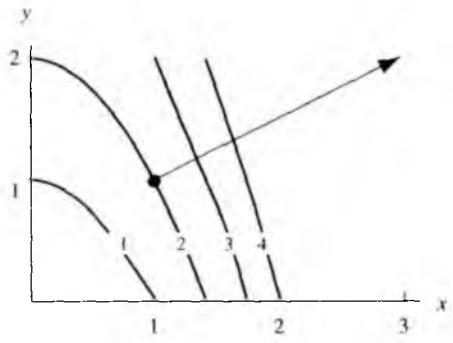


Figura 13.43 El vector gradiente con escalas x y y iguales.

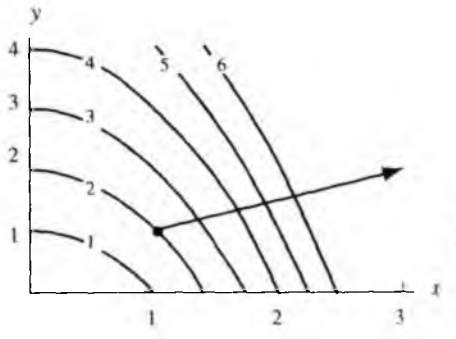


Figura 13.44 El vector gradiente con escalas x y y desiguales.

Otro problema surge cuando x y y se miden en diferentes unidades. Consideremos, por ejemplo, la información que relaciona la producción de maíz con la lluvia R, y la temperatura T de la página 26. Encontramos dos veces los datos, una vez usando pulgadas y grados Celsius y otra cuando usamos pulgadas y grados Fahrenheit. Se usan las mismas escalas a lo largo de cada eje como si las unidades no importaran. La figura 13.45 (pulgadas y °C) muestra el gradiente en el punto (15, 25). Como 25°C = 77°F, en la figura 13.46 (pulgadas y °F), indicamos el gradiente en el punto (15, 77). Observe que aun cuando los dos puntos representan el mismo clima, los dos diagramas de contorno y los dos vectores gradiente son diferentes.

Los gradientes sólo tienen sentido geométricamente cuando x y y se miden en las mismas unidades. Cuando x y y son ambas distancias, o cuando son ambas costos, por ejemplo, la medida del cambio $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ también es una distancia o un costo, de modo que podemos comparar la rapidez de cambio en todas direcciones. Sin embargo, si x y y están en unidades diferentes no es posible asignar unidades a $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. En este caso, la rapidez de cambio sólo tiene significado en las direcciones paralelas a los ejes.

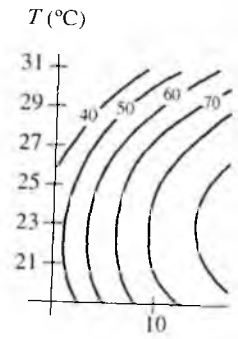


Figura 13.45 Pr

Problemas para l

1. Si f de 2
2. Encu direc
   a)
3. Encu
4. Encu
5. Encu (1, –
6. Sea
   a)
   b)
7. Cons
   a)
   b)
8. a)
   b)
   c)
9. Supo
   a)
   b)
   c) E

10. Supongamos que $F(x, y, z) = x^2 + y^4 + x^2z^2$ da la concentración de sal en un fluido en el punto (x, y, z), y que estamos en el punto $(-1, 1, 1)$.
    a) ¿En qué dirección debe avanzar si quiere que la concentración aumente lo más rápido?
    b) Supongamos que comienza a avanzar en la dirección encontrada en el inciso a), a una velocidad de 4 unidades/seg. ¿Con cuánta rapidez cambia la concentración? Explique.

11. Considere que S es la superficie representada por la ecuación $F = 0$, donde

$$F(x, y, z) = x^2 - \left(\frac{y}{z^2}\right).$$

    a) Encuentre todos los puntos sobre S donde un vector normal sea paralelo al plano xy.
    b) Encuentre el plano tangente a S en los puntos $(0, 0, 1)$ y $(1, 1, 1)$.
    c) Encuentre los vectores unitarios $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ que apuntan en la dirección de máximo aumento de F en los puntos $(0, 0, 1)$ y $(1, 1, 1)$, respectivamente.

12. ¿En qué punto sobre la superficie $z = 1 + x^2 + y^2$ es su plano tangente paralelo a los siguientes planos? a) $z = 5$ b) $z = 5 + 6x - 10y$.

13. Una función diferenciable $f(x, y)$ tiene la propiedad de que $f(4, 1) = 3$ y $f_x(4, 1) = 2$ y $f_y(4, 1) = -1$. Encuentre la ecuación del plano tangente en el punto sobre la superficie $z = f(x, y)$ donde $x = 4$, $y = 1$.

14. Una función diferenciable $f(x, y)$ tiene la propiedad de que $f(1, 3) = 7$ y $\text{grad } f(1, 3) = 2\vec{i} - 5\vec{j}$.
    a) Encuentre la ecuación de la tangente a la curva de nivel de f que pasa por el punto $(1, 3)$.
    b) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 3, 7)$.

15. Se dice que dos superficies son tangenciales en el punto P si tienen el mismo plano tangente en P. Demuestre que las superficies $z = \sqrt{2x^2 + y^2 - 25}$ y $z = \frac{1}{5}(x^2 + y^2)$ son tangenciales en el punto $(4, 3, 5)$.

16. Se dice que dos superficies son ortogonales entre sí en un punto P si las normales a sus planos tangentes son perpendiculares en P. Demuestre que las superficies $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1)$ y $z = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)$ son ortogonales en todos los puntos de intersección.

17. Sean f y g funciones en tres dimensiones. Suponga que f es diferenciable y que

$$\text{grad } f(x, y, z) = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\, g(x, y, z).$$

    Explique por qué f debe ser constante en cualquier esfera con centro en el origen.

18. Sea $\vec{r}$ el vector posición del punto (x, y, z). Si $\vec{\mu} = \mu_1\vec{i} + \mu_2\vec{j} + \mu_3\vec{k}$ es un vector constante, demuestre que

$$\text{grad}(\vec{\mu} \cdot \vec{r}) = \vec{\mu}.$$

19. Sea $\vec{r}$ el vector posición del punto (x, y, z). Demuestre que, si a es una constante,

$$\text{grad}(\|\vec{r}\|^a) = a\|\vec{r}\|^{a-2}\vec{r}, \qquad \vec{r} \neq 0.$$

20. Suponga que la Tierra tiene masa M y está ubicada en el origen, mientras que la Luna tiene masa m. La ley de gravitación de Newton expresa que si la Luna está ubicada en el punto (x, y, z), entonces la fuerza de atracción ejercida por la Tierra sobre la Luna está dada por el vector

$$\vec{F} = -GMm\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3},$$

donde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Demuestre que $\vec{F} = \text{grad } \varphi$, donde φ es la función dada por

$$\varphi(x, y, z) = \frac{GMm}{\|\vec{r}\|}.$$

13.6 LA REGLA DE LA CADENA

Composición de funciones de varias variables y rapidez de cambio

La regla de la cadena permite diferenciar *funciones compuestas*. Si tenemos una función de dos variables $z = f(x, y)$ y sustituimos $x = g(t)$, $y = h(t)$ en $z = f(x, y)$, entonces tenemos una función compuesta en la que z es una función de t:

$$z = f(g(t), h(t)).$$

Si, por otro lado, sustituimos $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$, entonces tenemos una función compuesta diferente donde z es una función de u y v:

$$z = f(g(u, v), h(u, v)).$$

El siguiente ejemplo demuestra cómo calcular la rapidez de cambio de una función compuesta.

Ejemplo 1 La producción de maíz, C, depende de la cantidad anual de lluvia, R, y del promedio de temperatura, T, por lo que $C = f(R, T)$. El calentamiento del planeta pronostica que la cantidad de lluvia y la temperatura dependen del tiempo. Supóngase que, según un modelo en particular del calentamiento del planeta, la cantidad de lluvia desciende en 0.2 cm por año y la temperatura aumenta en el mismo tiempo 0.1°C. Utilizar el hecho de que a los niveles actuales de producción, $f_R = 3.3$ y $f_T = -5$ para calcular la actual rapidez de cambio, dC/dt.

Solución Por linealidad local sabemos que los cambios ΔR y ΔT generan un cambio, ΔC, en C dado aproximadamente por

$$\Delta C \approx f_R \Delta R + f_T \Delta T = 3.3\Delta R - 5\Delta T.$$

Deseamos saber la forma en que ΔC depende del incremento de tiempo, Δt. El modelo de calentamiento del planeta indica que

$$\frac{dR}{dt} = -0.2 \quad \text{y} \quad \frac{dT}{dt} = 0.1.$$

Por lo tanto, un incremento de tiempo, Δt, genera cambios de ΔR y ΔT dados por

$$\Delta R \approx -0.2\Delta t \quad \text{y} \quad \Delta T \approx 0.1\Delta t.$$

Al sustituir por ΔR y ΔT en la expresión para ΔC resulta

$$\Delta C \approx 3.3\,(-0.2\Delta t) - 5(0.1\Delta t) = -1.16\Delta t.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} \approx -1.16 \text{ y, por lo tanto, } \frac{dC}{dt} \approx -1.16$$

En consecuencia, un cambio en Δt ocasiona cambios en ΔR y ΔT, que a su vez ocasionan cambios en ΔC. La relación entre ΔC y Δt, que da el valor de dC/dt, es un ejemplo de la regla de la cadena. El argumento del ejemplo 1 puede usarse para generar enunciados más generales de la regla de la cadena.

La regla de la cadena para $z = f(x, y), x = g(t), y = h(t)$

Como $z = f(g(t), h(t))$ es una función de t, podemos considerar la derivada dz/dt. La regla de la cadena muestra cómo dz/dt está relacionada con las derivadas de f, g y h. Debido a que dz/dt representa la rapidez de cambio de z con t, lo que nos interesa es cómo un ligero cambio, Δt, en t se propaga a z.

Sustituimos las linealizaciones locales

$$\Delta x \approx \frac{dx}{dt}\Delta t \quad \text{y} \quad \Delta y \approx \frac{dy}{dt}\Delta t$$

en la linealización local

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y,$$

y resulta

$$\begin{aligned}\Delta z &\approx \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\Delta t. \\ &= \left(\frac{\partial z}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{dy}\frac{dy}{dt}\right)\Delta t.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \approx \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Si tomamos el límite conforme $\Delta t \to 0$, obtenemos el siguiente resultado.

> Si f, g, y h son diferenciables y si $z = f(x, y)$ y $x = g(t)$, y $y = h(t)$, entonces
>
> $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Visualización de la regla de la cadena mediante un diagrama de árbol

El diagrama de árbol de la figura 13.47 es una forma de recordar la regla de la cadena. Muestra la cadena de dependencia: z depende de x y y, que a su vez dependen de t. Cada línea del diagrama está marcada con una derivada que relaciona las variables en sus extremos.

El diagrama rastrea la forma en que un cambio en t se propaga por la cadena de funciones compuestas. Hay dos trayectorias de t a z, una por x y otra por y. Para cada trayectoria, multiplicamos las derivadas a lo largo de la trayectoria. Entonces, para calcular dz/dt, sumamos las contribuciones de las dos trayectorias.

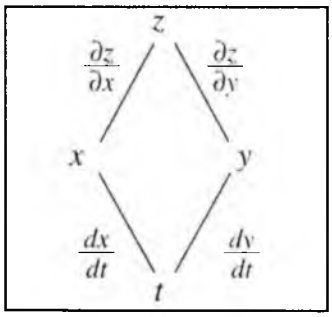


Figura 13.47 Diagrama de árbol para $z = f(x, y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$.

Ejemplo 2 Supóngase que $z = f(x, y) = x \operatorname{sen} y$, donde $x = t^2$ $y = 2t + 1$. Sea $z = g(t)$. Calcular $g'(t)$ por dos métodos diferentes.

Solución Como $z = g(t) = f(t^2, 2t + 1) = t^2 \operatorname{sen}(2t + 1)$, es posible calcular $g'(t)$ directamente por métodos de una variable:

$$g'(t) = t^2 \frac{d}{dt}(\operatorname{sen}(2t + 1)) + \left(\frac{d}{dt}(t^2)\right) \operatorname{sen}(2t + 1) = 2t^2 \cos(2t + 1) + 2t \operatorname{sen}(2t + 1).$$

La regla de la cadena es una ruta alternativa para la misma respuesta. Tenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (\operatorname{sen} y)(2t) + (x \cos y)(2) = 2t \operatorname{sen}(2t + 1) + 2t^2 \cos(2t + 1).$$

La regla de la cadena en general

Para encontrar la rapidez de cambio de una variable con respecto a otra en una cadena de funciones diferenciables compuestas:

- Dibuje un diagrama de árbol que exprese la relación entre las variables, y marque cada eslabón del diagrama con la derivada que relacione las variables de sus extremos.
- Para cada trayectoria entre las dos variables, multiplique las derivadas de cada paso a lo largo de la trayectoria.
- Sume las contribuciones de cada trayectoria.

Un diagrama de árbol rastrea todas las formas en que un cambio en una variable puede ocasionar un cambio en otra; el diagrama genera todos los términos que se obtendrían de las sustituciones adecuadas en las linealizaciones locales.

Ejemplo 3 Supóngase que $z = f(x, y)$, con $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$. Encontrar fórmulas para $\partial z / \partial u$ y $\partial z / \partial v$.

Solución La figura 13.48 muestra el diagrama de árbol para estas variables. Al sumar las contribuciones para las dos trayectorias de z a u obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

De igual manera, si se observan las trayectorias de z a v resulta

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Ejemplo 2 Supóngase que $z = f(x, y) = x \operatorname{sen} y$, donde $x = t^2$ $y = 2t + 1$. Sea $z = g(t)$. Calcular $g'(t)$ por dos métodos diferentes.

Solución Como $z = g(t) = f(t^2, 2t + 1) = t^2 \operatorname{sen}(2t + 1)$, es posible calcular $g'(t)$ directamente por métodos de una variable:

$$g'(t) = t^2 \frac{d}{dt}(\operatorname{sen}(2t + 1)) + \left(\frac{d}{dt}(t^2)\right) \operatorname{sen}(2t + 1) = 2t^2 \cos(2t + 1) + 2t \operatorname{sen}(2t + 1).$$

La regla de la cadena es una ruta alternativa para la misma respuesta. Tenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (\operatorname{sen} y)(2t) + (x \cos y)(2) = 2t \operatorname{sen}(2t + 1) + 2t^2 \cos(2t + 1).$$

La regla de la cadena en general

Para encontrar la rapidez de cambio de una variable con respecto a otra en una cadena de funciones diferenciables compuestas:

- Dibuje un diagrama de árbol que exprese la relación entre las variables, y marque cada eslabón del diagrama con la derivada que relacione las variables de sus extremos.
- Para cada trayectoria entre las dos variables, multiplique las derivadas de cada paso a lo largo de la trayectoria.
- Sume las contribuciones de cada trayectoria.

Un diagrama de árbol rastrea todas las formas en que un cambio en una variable puede ocasionar un cambio en otra; el diagrama genera todos los términos que se obtendrían de las sustituciones adecuadas en las linealizaciones locales.

Ejemplo 3 Supóngase que $z = f(x, y)$, con $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$. Encontrar fórmulas para $\partial z / \partial u$ y $\partial z / \partial v$.

Solución La figura 13.48 muestra el diagrama de árbol para estas variables. Al sumar las contribuciones para las dos trayectorias de z a u obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

De igual manera, si se observan las trayectorias de z a v resulta

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

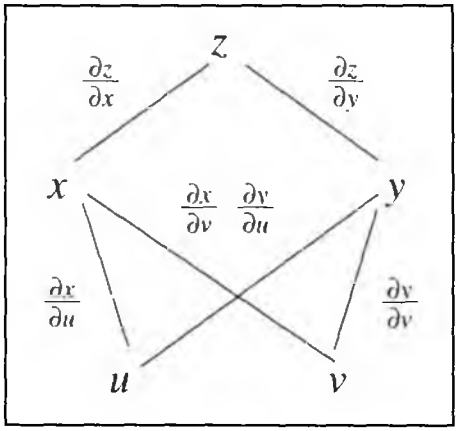


Figura 13.48 Diagrama de árbol para $z = f(x, y)$, $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$.

Ejemplo 4 Sea $w = x^2e^y$, $x = 4u$, y $y = 3u^2 - 2v$. Calcular $\partial w / \partial u$ y $\partial w / \partial v$ mediante la regla de la cadena.

Solución Si usamos el resultado del ejemplo anterior tendremos

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2xe^y(4) + x^2e^y(6u) = (8x + 6x^2u)e^y$$

$$= (32u + 96u^3)e^{3u^2-2v}.$$

Del mismo modo,

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 2xe^y(0) + x^2e^y(-2) = -2x^2e^y$$

$$= -32u^2e^{3u^2-2v}.$$

Ejemplo 5 Una cantidad z se puede expresar tanto como función de x y de y, de modo que $z = f(x, y)$, o como función de u y v, de manera que $z = g(u, v)$. Los dos sistemas coordenados están relacionados por

$$x = u + v, \quad y = u - v.$$

a) Utilizar la regla de la cadena para expresar $\partial z/\partial u$ y $\partial z/\partial v$ en términos de $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.
b) De las ecuaciones del inciso a, despejar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.
c) Demostrar que las expresiones obtenidas en el inciso b son las mismas que resultan al expresar u y v en términos de x y y y usar la regla de la cadena.

Solución a) Tenemos $\partial x / \partial u = 1$ y $\partial x / \partial v = 1$, y también $\partial y/\partial u = 1$ y $\partial y/\partial v = -1$. Así,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}(1) + \frac{\partial z}{\partial y}(1) = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}(1) + \frac{\partial z}{\partial y}(-1) = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}.$$

b) Al sumar las ecuaciones para $\partial z / \partial u$ y $\partial z / \partial v$ resulta

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 2\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \text{así que} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

De igual manera, al restar las ecuaciones para $\partial z / \partial u$ y $\partial z / \partial v$ resulta

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

c) Como alternativa podemos despejar u y v de las ecuaciones

$$x = u + v, \qquad y = u - v,$$

lo que resulta

$$u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \qquad v = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y.$$

Ahora podemos considerar a z como función de u y v, y a u y v como funciones de x y y, y aplicar la regla de la cadena otra vez. Esto nos da

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial v}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Éstas son las mismas expresiones obtenidas en el inciso b.

Un ejemplo de fisicoquímica

Quizá un químico que investiga las propiedades de un gas como el bióxido de carbono quiera conocer la forma en que la energía interna U de una cantidad dada del gas depende de su temperatura, T, presión, P, y volumen, V, pero las tres cantidades, T, P y V no son independientes. Por ejemplo, de acuerdo con la ley de un gas ideal, satisfacen la ecuación

$$PV = kT$$

donde k es una constante que depende sólo de la cantidad del gas. La energía interna puede entonces considerse como función de dos cualesquiera de las tres cantidades T, P y V:

$$U = U_1(T, P) = U_2(T, V) = U_3(P, V).$$

El químico escribe, por ejemplo, $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P$ para indicar la derivada parcial de U con respecto a T *manteniendo P constante*, lo cual indica que, para este cálculo, U es considerada como función de T y P.

Por lo tanto, interpretamos $\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_P$ como

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P = \frac{\partial U_1(T, P)}{\partial T}.$$

Si U es considerada como función de T y V, el químico escribe $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ para la derivada parcial de U con respecto a T manteniendo V constante: así, $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \frac{\partial U_2(T, V)}{\partial T}$.

Cada una de las funciones U_1, U_2, U_3 da lugar a una de las siguientes fórmulas para la diferencial dU:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T dP \qquad \text{corresponde a } U_1$$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \qquad \text{corresponde a } U_2,$$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_V dP + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_P dV \qquad \text{corresponde a } U_3.$$

Las seis derivadas parciales que aparecen en las fórmulas para dU tienen significado físico, pero no son igualmente fáciles de medir de manera experimental. Una relación entre las derivadas parciales, que por lo general se deriva de la regla de la cadena, puede hacer posible evaluar una de las parciales en términos de otras que se miden con más facilidad.

Ejemplo 6 Expresar $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ en términos de $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ y $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ y $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$.

Solución Como estamos interesados en las derivadas $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ y $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$, consideramos U como función de T y V y usamos la fórmula

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV, \text{ que corresponde a } U_2.$$

Deseamos encontrar una fórmula para $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$, lo que significa considerar U como función de T y P. Por lo tanto, deseamos sustituir por dV. Como V es una función de T y P, tenemos

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP.$$

Al sustituir por dV en la fórmula para dU correspondiente a U_2 resulta

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \left(\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP\right).$$

Al reunir los términos que contienen dT y los términos que contienen dP resulta

$$dU = \left(\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right) dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP.$$

Pero también tenemos la fórmula

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T dP, \text{ que corresponde a } U_1.$$

Ahora tenemos dos fórmulas para dU en términos de dT y dP. Los coeficientes de dT deben ser idénticos, de modo que llegamos a la siguiente conclusión:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

El ejemplo 6 expresa $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P$ en términos de otras tres derivadas parciales. Dos de ellas, que son $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$, la capacidad calorífica a volumen constante, y $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ el coeficiente de expansión, pueden medirse con facilidad de manera experimental. La tercera, la presión interna, $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$, no puede medirse directamente, pero puede relacionarse con $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ que es mensurable. Por lo tanto, $\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)_P$, se puede determinar de manera indirecta usando esta identidad.

Problemas para la sección 13.6

Para los problemas del 1 al 6, encuentre *dz/dt* aplicando la regla de la cadena. Suponga que las variables están restringidas a dominios en los cuales las funciones están definidas.

1. $z = xy^2$, $x = e^{-t}$, $y = \operatorname{sen} t$
2. $z = x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x$, $x = t^2$, $y = \ln t$
3. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = 1/t$, $y = \sqrt{t}$
4. $z = \operatorname{sen}(x/y)$, $x = 2t$, $y = 1 - t^2$
5. $z = xe^y$, $x = 2t$, $y = 1 - t^2$
6. $z = (x + y)e^y$, $x = 2t$, $y = 1 - t^2$

Para los problemas del 7 al 14, encuentre $\partial z / \partial u$ y $\partial z / \partial v$. Suponga que las variables están restringidas a dominios en los que las funciones están definidas.

7. $z = xe^{-y} + ye^{-x}$, $x = u \operatorname{sen} v$, $y = v \cos u$
8. $z = \cos(x^2 + y^2)$, $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$
9. $z = xe^y$, $x = \ln u$, $y = v$
10. $z = (x + y)e^y$, $x = \ln u$, $y = v$
11. $z = xe^y$, $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$
12. $z = (x + y)e^y$, $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$
13. $z = \operatorname{sen}(x / y)$, $x = \ln u$, $y = v$
14. $z = \tan^{-1}(x / y)$, $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$

15. Suponga que $w = f(x, y, z)$ y que x, y, z son funciones de u y v. Utilice un diagrama de árbol para escribir la fórmula de la regla de la cadena para $\partial w / \partial u$ y $\partial w / \partial v$.
16. Suponga $w = f(x, y, z)$ y que x, y, z son todas funciones de t. Utilice un diagrama de árbol para escribir la regla de la cadena para *dw/dt*.
17. La producción de maíz, C, es una función de la cantidad de lluvia, R, y de la temperatura, T. Las figuras 13.49 y 13.50 representan los pronósticos para la variación de las lluvias y la temperatura con el tiempo, debida al calentamiento del planeta. Suponga que sabemos que $\Delta C \approx 3.3\Delta R - 5\Delta T$. Utilice este dato para calcular el cambio en la producción de maíz entre el año 2020 y el 2021. En consecuencia, calcule *dC/dt* cuando $t = 2020$.

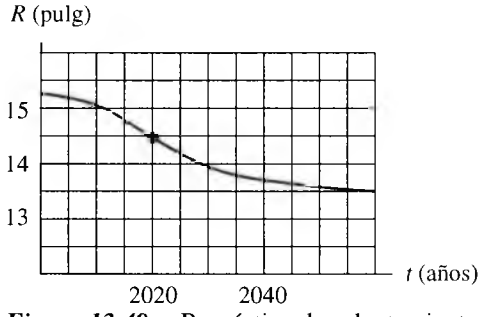


Figura 13.49 Pronóstico de calentamiento del planeta: lluvia como función del tiempo.

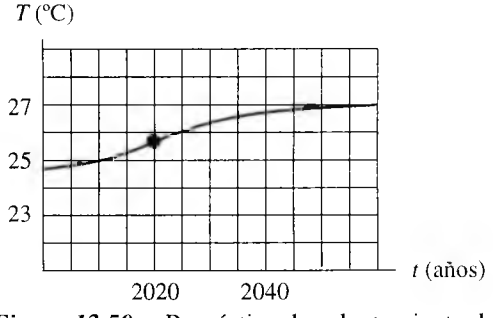


Figura 13.50 Pronóstico de calentamiento del planeta: temperatura como función del tiempo.

18. El voltaje, V, (en volts) en las terminales de un circuito está dado por la ley de Ohm: $V = IR$, donde I es la corriente (en amperes) que circula por el circuito y R es la resistencia (en ohms). Si ponemos en paralelo dos circuitos, con resistencia R_1 y R_2, su resistencia combinada , R, está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Supongamos que la corriente es de 2 amps y que aumenta a razón de 10^{-2} amp/s, y que R_1 es de 3 ohms y aumenta 0.5 ohms/s, en tanto que R_2 es de 5 ohms y disminuye 0.1 ohms/s. Calcule la rapidez a la que cambia el voltaje.

19. Una función $f(x, y)$ es *homogénea de grado p* si $f(tx, ty) = t^p f(x, y)$ para toda t. Demuestre que cualquier función homogénea y diferenciable, de grado p, satisface el teorema de Euler:

$$x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = p f(x, y).$$

[Sugerencia: defina $g(t) = f(tx, ty)$ y calcule $g'(1)$.]

Los problemas 20, 21 y 22 son continuaciones del ejemplo de fisicoquímica de la página 145.

20. Escriba $\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_V$ como derivada parcial de una de las funciones U_1, U_2 o U_3.

21. Exprese $\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T$ en términos de $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ y $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$

22. Utilice el resultado del problema 21 para demostrar que

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_P = \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P} + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T.$$

Para los problemas 23 y 24, suponga que la cantidad z puede expresarse como función de coordenadas cartesianas (x, y) o como una función de coordenadas polares, (r, θ), de modo que $z = f(x, y) = g(r, \theta)$. [Recuerde que $x = r\cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$.]

23. a) Utilice la regla de la cadena para encontrar $\partial z / \partial r$ y $\partial z / \partial \theta$ en términos de $\partial z / \partial x$ y $\partial z / \partial y$.

b) De las ecuaciones que acaba de escribir, despeje $\partial z / \partial x$ y $\partial z / \partial y$ en términos de $\partial z / \partial r$ y $\partial z / \partial \theta$.

c) Demuestre que las expresiones obtenidas en el inciso b) son las mismas que se obtendrían mediante la regla de la cadena para encontrar $\partial z / \partial x$ y $\partial z / \partial y$ en términos de $\partial z / \partial r$ y $\partial z / \partial \theta$.

24. Demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$$

25. Sea $F(x, y, z)$ una función y defina una función $z = f(x, y)$ implícitamente, haciendo $F(x, y, f(x, y)) = 0$. Utilice la regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z}.$$

13.7 DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN

Como las derivadas parciales de una función son a su vez funciones, podemos diferenciarlas y obtener *derivadas parciales de segundo orden*. Una función $z = f(x, y)$ tiene dos derivadas parciales de primer orden, f_x y f_y, y cuatro derivadas parciales de segundo orden.

Las derivadas parciales de segundo orden de $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx} = (f_x)_x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx} = (f_y)_x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy} = (f_x)_y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy} = (f_y)_y.$$

Se acostumbra omitir el paréntesis y escribir f_{xy} en lugar de $(f_x)_y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ en lugar de $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$.

Ejemplo 1 Calcular las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = xy^2 + 3x^2e^y$.

Solución De $f_x(x, y) = y^2 + 6xe^y$ obtenemos

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 + 6xe^y) = 6e^y \quad \text{y} \quad f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + 6xe^y) = 2y + 6xe^y.$$

De $f_y(x, y) = 2xy + 3x^2e^y$ obtenemos

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + 3x^2e^y) = 2y + 6xe^y \quad \text{y} \quad f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + 3x^2e^y) = 2x + 3x^2e^y.$$

Observe que $f_{xy} = f_{yx}$ en este ejemplo.

Ejemplo 2 Utilizar los valores de la función $f(x, y)$ de la tabla 13.5 para calcular $f_{xy}(1, 2)$ y $f_{yx}(1, 2)$.

TABLA 13.5 *Valores de $f(x, y)$*

$y \backslash x$	0.9	1.0	1.1
1.8	4.72	5.83	7.06
2.0	6.48	8.00	9.60
2.2	8.62	10.65	12.88

Solución Como $f_{xy} = (f_x)_y$, primero calculamos f_x

$$f_x(1, 2) \approx \frac{f(1.1, 2) - f(1, 2)}{0.1} = \frac{9.60 - 8.00}{0.1} = 16.0,$$

$$f_x(1, 2.2) \approx \frac{f(1.1, 2.2) - f(1, 2.2)}{0.1} = \frac{12.88 - 10.65}{0.1} = 22.3.$$

Por lo tanto,

$$f_{xy}(1, 2) \approx \frac{f_x(1, 2.2) - f_x(1, 2)}{0.2} = \frac{22.3 - 16.0}{0.2} = 31.5.$$

De igual manera,

$$f_{yx}(1, 2) \approx \frac{f_y(1.1, 2) - f_y(1, 2)}{0.1} \approx \frac{1}{0.1}\left(\frac{f(1.1, 2.2) - f(1.1, 2)}{0.2} - \frac{f(1, 2.2) - f(1, 2)}{0.2}\right)$$
$$= \frac{1}{0.1}\left(\frac{12.88 - 9.60}{0.2} - \frac{10.65 - 8.00}{0.2}\right) = 31.5.$$

Observe que en este ejemplo también, $f_{xy} = f_{yx}$

¿Qué indican las derivadas de segundo orden?

Ejemplo 3 Regresemos a la cuerda de guitarra del ejemplo 13.2 de la página 111. La cuerda mide 1 metro de largo y, en el tiempo t segundos, el punto a x metros de un extremo se desplaza $f(x, t)$ metros de su posición de reposo, donde

$$f_x(x, t) = 0.003 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(2765t).$$

Calcular las cuatro derivadas parciales de segundo orden de f en el punto $(x, t) = (0.3, 1)$ y describir el significado de sus signos en términos prácticos.

Solución Primero calculamos $f_x(x, t) = 0.003\pi \cos(\pi x) \operatorname{sen}(2765t)$, de donde resulta

$$f_{xx}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}(f_x(x, t)) = -0.003\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(2765t), \quad \text{así que} \quad f_{xx}(0.3, 1) \approx -0.01;$$

y

$$f_{xt}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}(f_x(x, t)) = (0.003)(2765)\pi \cos(\pi x) \cos(2765t), \quad \text{así que} \quad f_{xx}(0.3, 1) \approx 14.$$

En la página 111 se vio que $f_x(x, t)$ indica la pendiente de la cuerda en cualquier punto y tiempo. Por lo tanto, $f_{xx}(x, t)$ mide la concavidad de la cuerda. El hecho de que $f_{xx}(0.3, 1) < 0$ significa que la cuerda es cóncava hacia abajo en el punto $x = 0.3$ cuando $t = 1$ (véase Fig. 13.51).

Por otra parte, $f_{xt}(x, t)$ es la rapidez de cambio de la pendiente de la cuerda con respecto al tiempo. Por lo tanto, $f_{xt}(0.3, 1) > 0$ significa que en el tiempo $t = 1$ la pendiente en el punto $x = 0.3$ es creciente (véase Fig. 13.52).

La pendiente en B es menor que en A

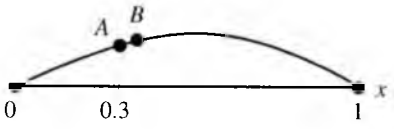


Figura 13.51 Interpretación de $f_{xx}(0.3, 1) < 0$: concavidad de la cuerda en $t = 1$.

La pendiente en B es mayor que en A

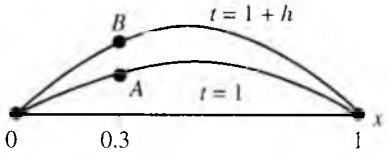


Figura 13.52 Interpretación de $f_{xt}(0.3, 1) > 0$: la pendiente de un punto en la cuerda en dos tiempos diferentes.

Ahora calculamos $f_t(x, t) = (0.003)(2765) \operatorname{sen}(\pi x) \cos(2765t)$, de donde se obtiene

$$f_{tx}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}(f_t(x, t)) = (0.003)(2765)\pi \cos(\pi x) \cos(2765t), \quad \text{así que} \quad f_{tx}(0.3, 1) \approx 14$$

y

$$f_{tt}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\,(f_t(x, t)) = (0.003)\,(2765)^2 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(2765t), \qquad \text{así que} \qquad f_{tt}(0.3, 1) \approx -7200$$

En la página 111 se vio que $f_t(x, t)$ indica la velocidad de la cuerda en cualquier punto y tiempo. Por lo tanto, $f_{tx}(x, t)$ y $f_{tt}(x, t)$ serán ambas la rapidez de cambio de la velocidad. Que $f_{tx}(0.3, 1) > 0$ significa que en el tiempo $t = 1$ las velocidades de los puntos justo a la derecha de $x = 0.3$ son mayores que la velocidad en $x = 0.3$ (véase Fig. 13.53). Que $f_{tt}(0.3, 1) < 0$ significa que la velocidad del punto $x = 0.3$ es decreciente en el tiempo $t = 1$. Por lo tanto, $f_{tt}(0.3, 1) = -7200$ m/s^2 es la aceleración de este punto (véase Fig. 13.54).

La velocidad de B es mayor que la de A

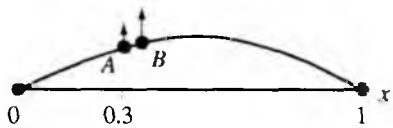


Figura 13.53 Interpretación de $f_{tx}(0.3, 1) > 0$: velocidad de diferentes puntos de la cuerda en $t = 1$.

La velocidad en B es menor que en A

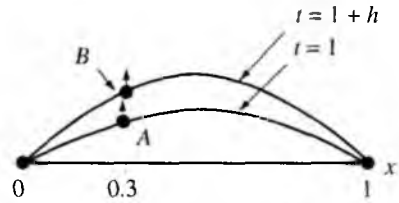


Figura 13.54 Interpretación de $f_{tt}(0.3, 1) < 0$: Aceleración negativa. La velocidad de un punto en la cuerda en dos tiempos diferentes.

Las derivadas parciales mezcladas son iguales

No es casualidad que los cálculos para $f_{xy}(1, 2)$ y $f_{yx}(1, 2)$ sean iguales en el ejemplo 2, porque los mismos valores de la función se utilizaron para calcular cada uno. El hecho de que $f_{xy} = f_{yx}$ en los ejemplos 1 y 2 corrobora el siguiente resultado general.

> Si f_{xy} y f_{yx} son continuas en (a, b), entonces
>
> $$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)\,.$$

La mayoría de las funciones que encontraremos no sólo tienen continuas a f_{xy} y f_{yx}, sino que todas sus derivadas parciales de orden más alto (como por ejemplo f_{xxy} o f_{xyyy}) existirán y serán continuas. Tales funciones reciben el nombre de *uniformes*.

Problemas para la sección 13.7

En los problemas del 1 al 8, calcule las cuatro derivadas parciales de segundo orden y demuestre que $f_{xy} = f_{yx}$. Suponga que las variables están restringidas a un dominio en el que la función está definida.

1. $f(x, y) = (x + y)^2$
2. $f(x, y) = (x + y)^3$
3. $f(x, y) = xe^y$
4. $f(x, y) = (x + y)e^y$
5. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$
6. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
7. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x / y)$
8. $f(x, y) = \tan^{-1}(x + y)$

9. Si $z = f(x) + yg(x)$, ¿qué puede decirse de z_{yy}? Explique su respuesta.

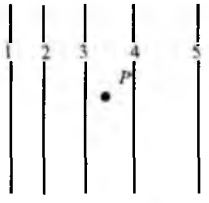
10. Si $z_{xy} = 4y$, ¿qué puede decirse del valor de a) z_{yx}? b) z_{yyx}? c) z_{xyy}?

En los problemas del 11 al 19, utilice las curvas de nivel de la función $z = f(x, y)$ para decidir el signo (positivo, negativo, o cero) de cada una de las siguientes derivadas parciales en el punto P. Suponga que los ejes x y y están en las posiciones usuales.

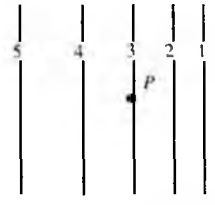
11.



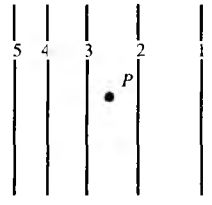
12.



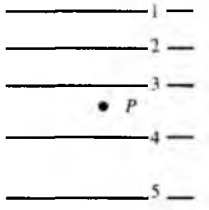
13.



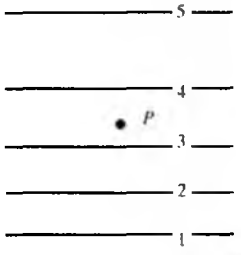
14.



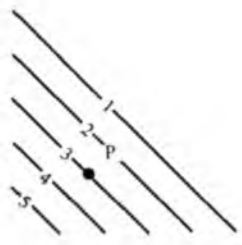
15.



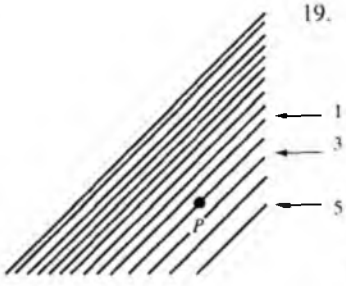
16.



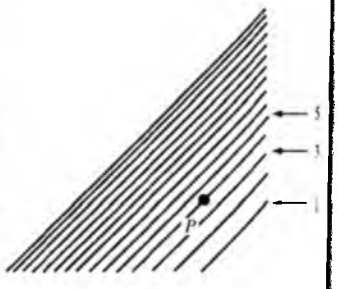
17.



18.



19.



20. Explique por qué espera que $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ usando los siguientes pasos.
   a) Escriba la definición de $f_x(a, b)$.
   b) Escriba una definición de $f_{xy}(a, b)$ como $(f_x)_y$.
   c) Sustituya la expresión para f_x en la definición de f_{xy}.
   d) Escriba una expresión para f_{yx} similar a la de f_{xy} obtenida en el inciso c.
   e) Compare sus respuestas a los incisos c y d. ¿Qué debe suponer para llegar a la conclusión de que f_{xy} y f_{yx} son iguales?

13.8 ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Flujo térmico

Imaginemos una habitación calentada por un radiador situado a lo largo de una pared. ¿Qué ocurre después de abrir una ventana de la pared opuesta en un día frío? La temperatura de la habitación empieza a descender con rapidez cerca de la ventana, con más lentitud cerca del radiador y finalmente se estabiliza. La temperatura $T = u(x, t)$ en cualquier punto de la habitación es una función de la distancia x en metros desde la pared calentada y el tiempo t en minutos desde que la ventana se abre. La figura 13.55 muestra cómo se vería la temperatura, T, como función de x para varios valores de t.

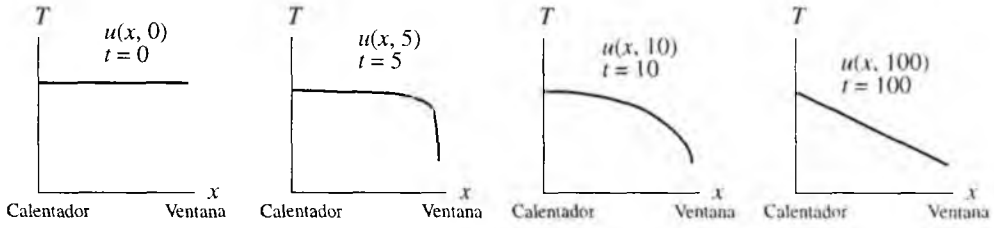


Figura 13.55 Cómo la temperatura de una habitación depende de la distancia desde el radiador en cuatro tiempos diferentes después de abrir la ventana.

Ley de enfriamiento de Newton

El flujo térmico entre dos puntos está gobernado por la ley de Newton del enfriamiento, según la cual la rapidez de flujo térmico por un punto x en el tiempo t es proporcional a la derivada parcial $u_x(x, t)$. Esto tiene sentido, porque $u_x(x, t)$ mide la rapidez de cambio de u con respecto a x en un tiempo fijo t; en otras palabras, indica que cuanto mayor sea el gradiente de temperatura, mayor será la rapidez de flujo de calor. La temperatura en una región de la habitación aumenta si el calor que entra en él es mayor que el calor que sale del mismo.

Ejemplo 1 La figura 13.56 muestra la temperatura $T = u(x, t)$ en un tiempo fijo t. Utilizar la ley de Newton del enfriamiento para determinar si la temperatura aumenta o disminuye:

a) En el punto p. b) En el punto q.

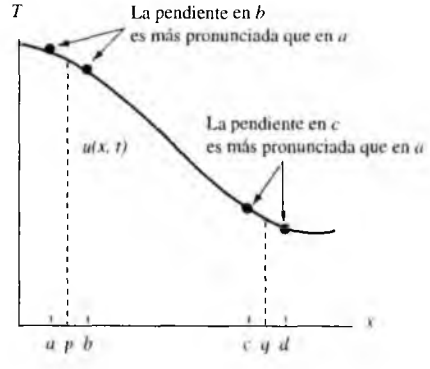


Figura 13.56 La temperatura T como función de x a un tiempo fijo t.

Solución

a) Debemos decidir si la pequeña región $a < x < b$ que contiene p gana o pierde calor (véase Fig. 13.56). Como el calor circula de regiones más calientes a otras más frías, el flujo térmico es de izquierda a derecha en la gráfica. En otras palabras, el calor fluye hacia abajo en una gráfica de temperatura. La ley de Newton del enfriamiento expresa que cuanto más pronunciada sea la pendiente, $u_x(x, t)$, mayor será la rapidez de flujo de calor. El calor entra en la región $a < x < b$ en el punto a y sale en b. La salida es mayor que la entrada porque la tangente en b es más pronunciada que la de a. Por lo tanto, la región $a < x < b$ pierde calor y su temperatura es decreciente. En consecuencia, $u_t(p, t) < 0$.

b) El calor entra en la pequeña región $c < x < d$ en el punto c y sale en d, porque las pendientes $u_x(c, t)$ y $u_x(d, t)$ son negativas. Pero la línea tangente en c es más pronunciada que en d, así que, por la ley de Newton del enfriamiento, la entrada es mayor que la salida. Por lo tanto, la región $c < x < d$ gana energía y por ello su temperatura es creciente. En consecuencia, $u_t(q, t) > 0$.

La ecuación del calor

El ejemplo 1 demuestra que, para t fija, el signo de u_t está determinado por la concavidad de la gráfica de $u(x, t)$. En $x = p$ encontramos que $u_t(p, t) < 0$ y la gráfica de u es cóncava hacia abajo, así que $u_{xx}(p, t) < 0$. En el punto q, tenemos $u_t(q, t) > 0$ y $u_{xx}(q, t) > 0$. De hecho, las dos derivadas u_t y u_{xx} siempre tienen el mismo signo. En muchos casos las dos derivadas u_t y u_{xx} resultan ser proporcionales, así que la función $u(x, t)$ satisface la siguiente ecuación:

La ecuación unidimensional del calor (o de difusión)

$u_t(x, t) = Au_{xx}(x, t)$, donde A es una constante positiva.

La ecuación del calor es un ejemplo de *una ecuación diferencial parcial* (EDP), es decir, una ecuación donde intervienen una o más derivadas parciales de una función desconocida.

Ejemplo 2 De las siguientes dos funciones, ¿cuál satisface la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$?

a) $u(x, t) = e^{-4t} \operatorname{sen}(2x)$ b) $u(x, t) = \operatorname{sen}(x + t)$

Solución a) El cálculo de las derivadas parciales de la función u resulta en

$$u_t = -4e^{-4t} \operatorname{sen}(2x), \quad u_x = 2e^{-4t} \cos(2x), \quad u_{xx} = -4e^{-4t} \operatorname{sen}(2x),$$

y por eso $u_t = u_{xx}$. Por lo tanto, $u(x, t) = e^{-4t} \operatorname{sen}(2x)$ es una solución.

b) Tenemos

$$u_t = \cos(x + t), \quad u_x = \cos(x + t), \quad u_{xx} = -\operatorname{sen}(x + t),$$

y por eso $u_t \neq u_{xx}$. Por lo tanto, $u(x, t) = \operatorname{sen}(x + t)$ no es solución.

Ejemplo 3 Una barra metálica de 10 cm está aislada de modo que el calor puede circular a lo largo de la barra pero no puede irradiarse al aire excepto en los extremos. La temperatura T (°C) a x cm de un extremo y en un tiempo t segundos es una función $T = u(x, t)$ que satisface la ecuación del calor $u_t(x, t) = 0.1u_{xx}(x, t)$. La temperatura inicial en varios puntos está dada en la tabla 13.6.

TABLA 13.6 *Temperatura de la barra metálica en el tiempo $t = 0$.*

x (cm)	0	2	4	6	8	10
$u(x, 0)$ (°C)	50	52	56	62	70	80

a) Cuando $t = 0$, ¿es creciente o decreciente la temperatura en el punto $x = 6$?

b) Calcular la temperatura $T = u(6, 1)$ en el punto $x = 6$ en el tiempo $t = 1$.

Solución a) La gráfica de $u(x, 0)$ de la figura 13.57 sugiere que $u(x, 0)$ es cóncava hacia arriba, así que $u_{xx}(6, 0) > 0$. Como $u_t(6, 0) = 0.1u_{xx}(6, 0)$ tenemos $u_t(6, 0) > 0$ también. Como $u_t(6, 0)$ indica la rapidez de cambio de temperatura en $x = 6$ con respecto al tiempo, el hecho de que sea positiva indica que la temperatura en $x = 6$ es creciente. Podríamos haber adivinado esto por el hecho de que la temperatura de 62°C en $x = 6$ está abajo del promedio $(56 + 70)/2 = 63$°C de las temperaturas de los puntos colindantes.

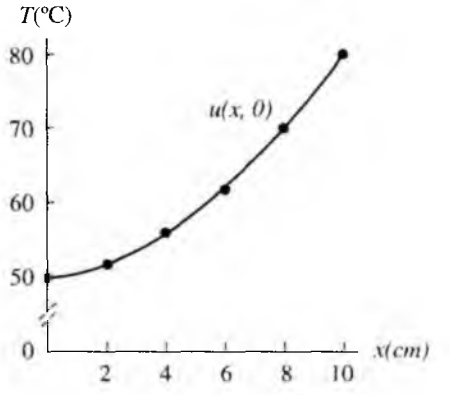


Figura 13.57 La temperatura, $T = u\,(x, 0)$, en el tiempo $t = 0$.

b) Para pronosticar la temperatura en $t = 1$ a partir de la temperatura en $t = 0$ primero calculamos la rapidez de cambio de la temperatura con respecto al tiempo, $u_t\,(6, 0)$. Como $u_t\,(6, 0) = 0.1u_{xx}\,(6, 0)$, calculamos $u_{xx}\,(6, 0)$. Como $u_{xx}\,(6, 0)$ es la rapidez de cambio de $u_x\,(x, 0)$, primero calculamos u_x en los dos puntos cerca de $x = 6$:

$$u_x\,(5, 0) \approx \frac{u(6, 0) - u(4, 0)}{6 - 4} = \frac{62 - 56}{2} = 3 \quad \text{y} \quad u_x\,(7, 0) \approx \frac{u(8, 0) - u\,(6, 0)}{8 - 6} = 4.$$

Por lo tanto,

$$u_{xx}\,(6, 0) \approx \frac{u_x\,(7, 0) - u_x\,(5, 0)}{7 - 5} \approx \frac{4 - 3}{2} = 0.5.$$

En consecuencia,

$$u_t\,(6, 0) \approx 0.1u_{xx}(6, 0) \approx (0.1)\,(0.5) = 0.05°\text{C/s}$$

Debido a que la temperatura inicial es de 62°C y se encontró que la temperatura aumenta en 0.05°C/seg, la temperatura en $t = 1$ es aproximadamente de 62.05 °C.

¡Ojo!

Obtener aproximaciones numéricas precisas de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) es, por lo general, muy difícil. El ejemplo 3 demuestra que se puede obtener información cuantitativa de una EDP, pero no es una manera práctica de obtener aproximaciones precisas de soluciones.

Condiciones en la frontera

La ecuación del calor $u_t = Au_{xx}$ tiene muchas soluciones. Así como se necesitaron condiciones iniciales para obtener una solución única a una ecuación diferencial ordinaria, se necesita de más información para escoger una sola solución a una ecuación diferencial parcial (EDP). En el caso de la habitación calentada, por ejemplo, necesitaríamos conocer la temperatura de la habitación cuando se abrió la ventana, la temperatura exterior en todo tiempo, y la temperatura cerca del radiador (que indica lo que éste hace). Esta información se conoce como *condiciones en la frontera*. Los problemas 10, 14, 15 y 18 de las páginas 159 y 160 muestran cómo usar condiciones en la frontera.

Una onda viajera

Considere una botella que sube y baja conforme pasa una ola. Su movimiento depende de la forma y la velocidad horizontal de la ola; investigaremos una EDP que describa este movimiento.

Ejemplo 4 Supóngase que la altura y del mar (y por tanto de la botella que flota) por encima de lo normal, en el tiempo t segundos y a distancia de x metros desde un punto de referencia, está dada por la función $y = u(x, t)$, cuya gráfica para $t = 0$ se muestra en la figura 13.58. Supóngase que la ola se desplaza en la dirección de x creciente.

a) Determinar si $u_x(x, 0)$ y $u_t(x, 0)$ son positivas o negativas en los siguientes puntos:
i) $x = p$ ii) $x = q$ iii) $x = r$

b) Si la onda avanzara con más rapidez, ¿sería u_t (r, 0) mayor o menor?

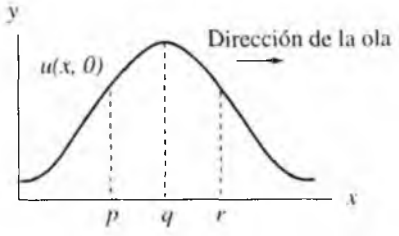


Figura 13.58 Altura de la ola en $t = 0$; ola moviéndose a la derecha.

Solución

a) i) La derivada parcial $u_x(p, 0)$ indica la pendiente de la línea tangente a la gráfica de $u(x, 0)$ en $x = p$. De la figura 13.58 es evidente que la pendiente es positiva, así que $u_x(p, 0) > 0$. Por otra parte, $u_t(p, 0)$ es igual a la velocidad vertical de la botella en el punto $x = p$ en el tiempo $t = 0$. Como la cresta de la ola ha pasado, la botella cae y la velocidad es negativa. Por lo tanto, $u_t(p, 0) < 0$.

ii) Tenemos $u_x(q, 0) = 0$, porque la tangente a la ola en $x = q$ y $t = 0$ es horizontal y tiene pendiente cero. Una botella en $x = q$ y $t = 0$ está exactamente en la cresta de la ola, detenida de momento con velocidad cero. Por lo tanto, $u_t(q, 0) = 0$.

iii) En $t = 0$ el punto r está en el lado posterior de la ola, así que $u_x(r, 0) < 0$. Una botella en $x = r$ subiría en $t = 0$, así que $u_t(r, 0) > 0$.

b) Si la ola avanzara más rápido, entonces una botella que flota subiría y bajaría con más rapidez, así que la velocidad positiva $u_t(r, 0)$ sería mayor que para la ola original, más lenta.

La ecuación de la onda viajera

Observe que en el ejemplo 4 las derivadas $u_x(x, 0)$ y $u_t(x, 0)$ son de signo contrario o ambas son cero, para toda x. Esto sugiere que las dos funciones derivadas u_x y u_t pueden estar relacionadas.

Para investigar más a fondo, supongamos que una onda avanza a la derecha con velocidad c y que sus posiciones en dos tiempos cercanos t y $t + \Delta t$ se muestran en la figura 13.59. Si Δt es suficientemente pequeña, una buena aproximación a $u_x(p, t)$, que es la pendiente de la gráfica en B, la constituye la pen-

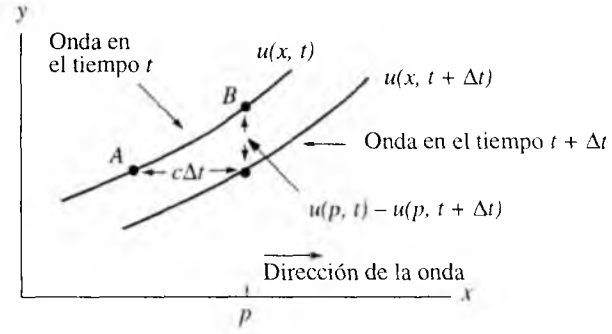


Figura 13.59 Una onda viajera que se desplaza a la derecha a una velocidad c: la onda en dos instantes cercanos.

diente de la línea secante entre los puntos A y B. Observe que durante el intervalo Δt la onda avanza horizontalmente una distancia de $c\Delta t$ (porque distancia = velocidad · tiempo). En consecuencia, tenemos

$$u_x(p, t) = \text{pendiente de la tangente en } B \approx \text{pendiente de la secante entre } A \text{ y } B$$

$$= \frac{u(p, t) - u(p, t + \Delta t)}{c\Delta t}$$

$$= -\frac{1}{c}\,\frac{u(p, t + \Delta t) - u(p, t)}{\Delta t}$$

$$= -\frac{1}{c}\,u_t(p, t)$$

Por lo tanto, $u(x, t)$ satisface la siguiente EDP:

La ecuación de la onda viajera para una ola que avanza en la dirección positiva de las x con velocidad c

$$u_t(x, t) = -cu_x(x, t), \qquad \text{donde } c \text{ es una constante positiva.}$$

Fórmula para resolver de la ecuación de la onda viajera

Supongamos que una onda viajera avanza en la dirección positiva de las x con velocidad c y que la onda tiene la forma $y = f(x)$ en el tiempo $t = 0$, lo que significa que $u(x, 0) = f(x)$. En el tiempo t la onda ha avanzado una distancia ct a la derecha, así que en el tiempo t la onda tiene la forma $y = f(x - ct)$. En otras palabras:

Una onda de forma $f(x)$ que viaja a una velocidad c en la dirección positiva de las x está representada por

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

Ejemplo 5 a) Escribir una fórmula para la función $u(x, t)$ que describe una onda cuya forma en el tiempo $t = 0$ es y = sen x y que avanza en la dirección positiva de las x con velocidad 0.5.

b) Demostrar que la función $u(x, t)$ encontrada en el inciso a satisface la ecuación de la onda viajera.

c) Dibujar las gráficas de $u(x, t)$ contra x para $t = 0, 1, 2$.

Solución a) Como la forma de la onda permanece igual a medida que avanza, sabemos que

$$u(x, t) = \text{sen}(x - ct) = \text{sen}(x - 0.5t).$$

b) Como $u_t(x, t) = -0.5\cos(x - 0.5t)$ y $u_x(x, t) = \cos(x - 0.5t)$, la función $u(x, t)$ satisface la ecuación de la onda viajera con $c = 0.5$:

$$u_t(x, t) = -0.5u_x(u, t).$$

c) Las gráficas están en la figura 13.60. Observe que el movimiento de la onda hacia adelante es claramente visible.

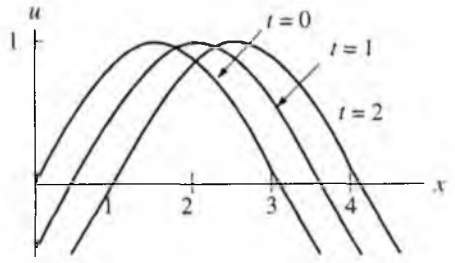


Figura 13.60 Gráfica de $u(x, t) = \text{sen}(x - 0.5t)$ en tres instantes.

Una cuerda en tensión

¿Cómo describimos el movimiento de una cuerda que vibra sometida a una tensión, como ocurre al pulsar una cuerda de guitarra? Sea $y = u(x, t)$ el desplazamiento desde el equilibrio en el tiempo t, del punto sobre la cuerda a x unidades desde un extremo. Entonces se puede demostrar que u satisface la siguiente ecuación:

Ecuación de onda en una dimensión:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad \text{donde } c \text{ es una constante positiva.}$$

Veamos lo que dice esta ecuación. La función $u(x, t)$ describe el movimiento de una masa (la cuerda) bajo la influencia de una fuerza (tensión). Por lo tanto, aplica la segunda ley de Newton del movimiento, de modo que esperamos una ecuación del tipo $F = ma$, donde F es la fuerza, m la masa y a la aceleración. El término $u_{tt}(x, t)$ de la ecuación de onda es la aceleración en el punto x en el tiempo t. El término $u_{xx}(x, t)$ está estrechamente relacionado con la fuerza, porque mide la concavidad de la cuerda. A medida que sea mayor la concavidad, más grande será la fuerza que tiende a restablecer el equilibrio, al igual que cuando se dispara una flecha con un arco.

Problemas para la sección 13.8

1. Suponga que $u(x, t)$ es como en el ejemplo 3.
   a) Utilice la tabla 13.6 para hacer cálculos de $u(4, 1)$ y $u(8, 1)$.
   b) Utilice sus respuestas al inciso a y la aproximación $u(6, 1)$ obtenida en el ejemplo 3 para hacer un cálculo de $u(6, 2)$.

2. Trace la gráfica de $u\,(x,\,t) = 1 - (x - 2t)^2$ para $t = 0,\ 1,\ 2$. Explique cómo es que la gráfica representa una onda viajera. ¿Cuál es la velocidad y la dirección en la que se desplaza la onda?
3. Haremos un modelo de la propagación de una epidemia en una región. Supongamos que $I\,(x,\,y,\,t)$ representa la densidad de personas enfermas por unidad de área en el punto $(x,\,y)$ del plano en el tiempo t. Supongamos que I satisface la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}\right),$$

donde D es una constante. Supongamos que se sabe que para alguna epidemia en particular

$$I = e^{ax + by + ct}.$$

¿Qué se puede decir acerca de la relación entre a, b y c?

4. ¿Para qué valores de las constantes a y b la función $u = (x + y)e^{ax + by}$ satisfará la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0?$$

Demuestre que las funciones de los problemas 5, 6 y 7 satisfacen la ecuación $F_{xx} + F_{yy} = 0$ conocida como la ecuación de Laplace.

5. $F\,(x,\,y) = e^{-x}\,\text{sen}\,y$
6. $F\,(x,\,y) = \arctan\,(y / x)$
7. $F\,(x,\,y) = e^{x}\,\text{sen}\,y + e^{y}\,\text{sen}\,x$
8. La función $f\,(x,\,t) = 0.003\,\text{sen}(\pi x)\,\text{sen}(2765t)$ describe una cuerda de guitarra en vibración. Demuestre que es una solución de la ecuación de onda, $f_{tt} = c^2 f_{xx}$, para alguna c. ¿Cuál es ese valor de c?
9. Suponga que f es cualquier función diferenciable de una variable. Defina V, una función de dos variables, por

$$V\,(x,\,t) = f\,(x + ct).$$

Demuestre que V satisface la ecuación

$$\frac{\partial V}{\partial t} = c\frac{\partial V}{\partial x}.$$

10. Considere la ecuación de onda que describe una cuerda en vibración

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

donde a es una constante y y es el desplazamiento de la cuerda en cualquier punto x y en cualquier tiempo t. Escriba las condiciones en la frontera para una cuerda en vibración de longitud L para la que

a) Los extremos en $x = 0$ y $x = L$ son fijos.
b) La forma inicial está dada por $f\,(x)$.
c) La distribución de velocidad inicial está dada por $g\,(x)$.

11. La figura 13.61 es la gráfica de la temperatura contra la posición en un instante en una barra metálica, donde la temperatura $T = u\,(x,\,t)$ satisface la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$. Determine para cuál x es creciente la temperatura, para cuál es decreciente y utilice esta información para trazar esta gráfica de temperatura en un tiempo ligeramente posterior.

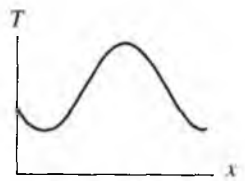


Figura 13.61

12. En cualquier punto (x, y, z) en el exterior de una masa esférica simétrica m ubicada en el punto (x_0, y_0, z_0), el potencial gravitacional, V, está definido por $V = -Gm/r$, donde r es la distancia desde (x, y, z) a (x_0, y_0, z_0) y G es una constante. Demuestre que, para todos los puntos fuera de la masa, V satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

13. Si $u(x, t) = e^{at}\,\text{sen}(bx)$ satisface la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$, encuentre la relación entre a y b.

14. Si suponemos que la solución de la ecuación de onda es de la forma

$$y = F(x + 2t) + G(x - 2t),$$

encuentre una solución que satisfaga las condiciones en la frontera

$$y(0, t) = y(5, t) = 0, \quad y(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = 5 \text{ sen } (\pi x), \quad 0 < x < 5, \qquad t > 0.$$

15. a) Estudiamos la conducción del calor en una barra metálica de 1 metro, $0 \le x \le 1$, cuyos lados están aislados y sus extremos se mantienen a 0°C en todo tiempo al sumergirlos en baños de hielo. Las condiciones en los extremos de la barra representan una condición en la frontera sobre las posibles funciones $u(x, t)$ que podrían describir la temperatura de la barra. Exprese la condición en la frontera como un par de ecuaciones.

    b) Determine todos los valores posibles de a y b tales que $u(x, t) = e^{at}\,\text{sen}(bx)$ satisface la EDP, $u_t = u_{xx}$, y las condiciones en la frontera del inciso a.

16. a) Verifique que la función

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-x^2/(4t)}$$

satisface la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ para $t > 0$ y toda x.

    b) Trace las gráficas de $u(x, t)$ contra x para $t = 0.01, 0.1, 1, 10$. Estas gráficas representan la temperatura en una barra aislada infinitamente larga que en $t = 0$ es 0°C en todas partes excepto el origen $x = 0$, y que está infinitamente caliente en $t = 0$ en el origen.

17. La temperatura, T, de una placa metálica puede describirse mediante una función $T = u(x, y, t)$ de tres variables, las dos variables de dimensión, x y y, y la variable de tiempo, t. La ecuación del calor en dos dimensiones es la EDP

$$u_t = A(u_{xx} + u_{yy}), \quad \text{donde } A \text{ es una constante positiva.}$$

Encuentre condiciones para a, b y c tales que $u(x, y, t) = e^{-at}\,\text{sen}(bx)\,\text{sen}(cy)$ satisfaga esta EDP.

18. a) Verifique que $u(x, t) = \text{sen}(ax)\,\text{sen}(at)$ satisfaga la ecuación de onda $u_{tt} = u_{xx}$. Esta solución representa una vibración con periodo $2\pi/a$, puesto que $u(x, t + 2\pi/a) = u(x, t)$.

    b) Supongamos que deseamos estudiar las vibraciones de una cuerda de 1 metro con extremos fijos (como la de una guitarra), de modo que $u(0, t) = 0$ y $u(1, t) = 0$ para toda t, y tales que $u_{tt} = u_{xx}$. La condición en los extremos es una condición en la frontera. Encuentre toda $a > 0$ tal que $u(x, t) = \text{sen}(ax)\,\text{sen}(at)$ satisfaga la EDP y la condición en la frontera. (Los músicos saben, por lo menos desde la época de Pitágoras, que sólo se puede hacer vibrar cuerdas sometidas a tensión en determinadas frecuencias especiales.)

19. Se puede generar una onda viajera en una cuerda bajo tensión al pulsarla en un extremo. Esto sugiere que debe haber soluciones de ondas viajeras para la ecuación de onda.
    a) Demuestre que si f es una función arbitraria, entonces $u(x, t) = f(x - ct)$ es una solución de la ecuación de onda $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.
    b) Demuestre que si g es una función arbitraria, entonces $u(x, t) = g(x + ct)$ es una solución de la ecuación de onda $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.
    c) Demuestre que si f y g son funciones arbitrarias, entonces $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ es una solución de la ecuación de onda. (En efecto, todas las soluciones de la ecuación de onda pueden escribirse en esta forma, como la suma de una onda viajera en avance y una onda viajera en retroceso.)
20. La vibración de un objeto de dos dimensiones bajo tensión, como por ejemplo el parche de un tambor, está descrita por una función $u(x, y, t)$ de dos variables en el espacio x y y y una variable en el tiempo t. Con frecuencia, dicha función satisface la ecuación de onda de 2 dimensiones $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$. Encuentre condiciones para las constantes a, b y k tales que $u(x, y, t) = \text{sen}(ax)\,\text{sen}(by)\,\text{sen}(kt)$ satisfaga esta ecuación.

13.9 NOTAS ACERCA DE APROXIMACIONES DE TAYLOR

Así como para una función de una variable puede construirse una aproximación mejor mediante una función cuadrática que mediante una función lineal, ocurre lo mismo para una función de varias variables. En la sección 13.3 se vio la manera de aproximar $f(x, y)$ por una función lineal (su linealización local); en esta sección veremos cómo mejorar esta aproximación de $f(x, y)$ mediante una función cuadrática.

Aproximaciones lineales y cuadráticas cerca de (0, 0)

Para una función de una variable, la propiedad de ser localmente lineal indica que la mejor aproximación *lineal* es el polinomio de Taylor de grado 1

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \text{ para } x \text{ cerca de } a.$$

Una mejor aproximación de $f(x)$ está dada por el polinomio de Taylor de grado 2:

$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 \text{ para } x \text{ cerca de } a.$$

Para una función de dos variables, la linealización local para (x, y) cerca de (a, b) es

$$f(x, y) \approx L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

En el caso $(a, b) = (0, 0)$, tenemos

Polinomio de Taylor de grado 1 para aproximar $f(x, y)$ para (x, y) cerca de (0, 0)
Si f tiene derivadas parciales continuas de primer orden, entonces

$$f(x, y) \approx L(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y.$$

Se obtiene una mejor aproximación a f si se usa un polinomio cuadrático. Escogemos un polinomio cuadrático $Q(x, y)$, con las mismas derivadas parciales que la función original f. Se puede comprobar que el siguiente polinomio tiene esta propiedad.

Polinomio de Taylor de grado 2 para calcular $f(x, y)$ si (x, y) está cerca de $(0, 0)$
Si f tiene derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces

$$f(x, y) \approx Q(x, y)$$
$$= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{f_{xx}(0, 0)}{2}x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{f_{yy}(0, 0)}{2}y^2.$$

Ejemplo 1 Sea $f(x, y) = \cos(2x + y) + 3\,\text{sen}(x + y)$

a) Hallar los polinomios lineal y cuadrático de Taylor, L y Q, que aproximan f cerca de $(0, 0)$

b) Explicar por qué las gráficas de contorno de L y Q para $-1 \le x \le -1, -1, \le y \le 1$ tienen ese aspecto.

Solución a) Tenemos $f(0, 0) = 1$. Las derivadas que se necesitan son así:

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= -2\,\text{sen}(2x + y) + 3\cos(x + y) && \text{por tanto} && f_x(0, 0) = 3,\\
f_y(x, y) &= -\text{sen}(2x + y) + 3\cos(x + y) && \text{por tanto} && f_y(0, 0) = 3,\\
f_{xx}(x, y) &= -4\cos(2x + y) + 3\,\text{sen}(x + y) && \text{por tanto} && f_{xx}(0, 0) = -4,\\
f_{xy}(x, y) &= -2\cos(2x + y) + 3\,\text{sen}(x + y) && \text{por tanto} && f_{xy}(0, 0) = -2,\\
f_{yy}(x, y) &= -\cos(2x + y) + 3\,\text{sen}(x + y) && \text{por tanto} && f_{yy}(0, 0) = -1,
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la aproximación lineal, $L(x, y)$, a $f(x, y)$ en $(0, 0)$ está dada por

$$f(x, y) \approx L(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y = 1 + 3x + 3y,$$

y la aproximación cuadrática, $Q(x, y)$, a $f(x, y)$ cerca de $(0, 0)$ está dada por

$$\begin{aligned}
f(x,y) &\approx Q(x,y)\\
&= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{f_{xx}(0, 0)}{2}x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{f_{yy}(0, 0)}{2}y^2\\
&= 1 + 3x + 3y - 2x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2.
\end{aligned}$$

Observe que los términos lineales en $Q(x, y)$ son los mismos que los términos lineales en $L(x, y)$. Los términos cuadráticos en $Q(x, y)$ pueden considerarse como "términos de corrección" a la aproximación lineal.

b) Las gráficas de contorno de $f(x, y)$, $L(x, y)$ y $Q(x, y)$ están en las figuras 13.62 a la 13.64.

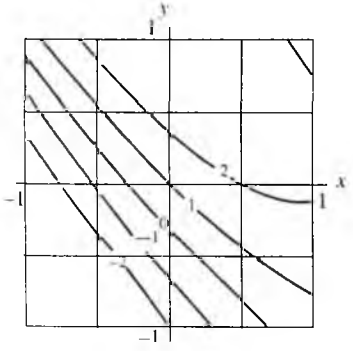


Figura 13.62 Función original, $f(x, y)$.

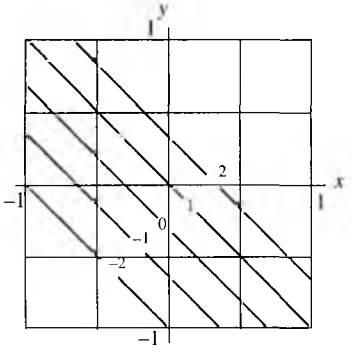


Figura 13.63 Aproximación lineal, $L(x, y)$.

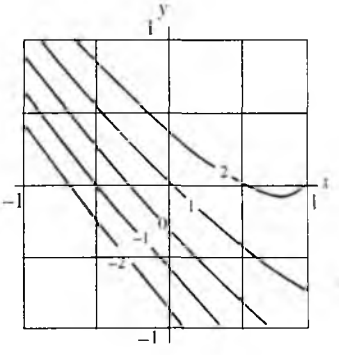


Figura 13.64 Aproximación cuadrática, $Q(x, y)$.

Observe que la gráfica de contorno de Q es más parecida a la gráfica de contorno de f de lo que es la gráfica de contorno de L. Como L es lineal, la gráfica de contorno de L está formada de líneas paralelas igualmente espaciadas.

Una forma alternativa, y más rápida, para encontrar el polinomio de Taylor en el ejemplo anterior es usar las aproximaciones de una sola variable. Por ejemplo, como

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} \ldots \text{ y sen } v = v - \frac{u^3}{3!} \ldots,$$

podemos sustituir $u = 2x + y$ y $u = x + y$ y expandir. Descartamos los términos más allá del segundo (porque buscamos el polinomio cuadrático) y resulta

$$\cos(2x + y) = 1 - \frac{(2x+y)^2}{2!} + \frac{(2x+y)^4}{4!} \ldots \approx 1 - \frac{1}{2}(4x^2 + 4xy + y^2) = 1 - 2x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2$$

y

$$\text{sen}(x + y) = (x + y) - \frac{(x+y)^3}{3!} \ldots \approx x + y.$$

Al combinar estos resultados se obtiene

$$\cos(2x + y) + 3 \text{ sen}(x + y) \approx 1 - 2x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2 + 3(x + y) = 1 + 3x + 3y - 2x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2.$$

Aproximaciones lineales y cuadráticas cerca de (a, b)

La linealización local para una función $f(x, y)$ en un punto (a, b) es

Polinomio de Taylor de grado 1 para aproximar $f(x, y)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b)
Si f tiene derivadas parciales continuas de primer orden, entonces

$$f(x, y) \approx L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Esto sugiere que una aproximación polinomial cuadrática $Q(x, y)$ para $f(x, y)$ cerca de un punto (a, b) debe escribirse en términos de $(x - a)$ y $(y - b)$ en lugar de x y y. Si establecemos la condición de que $Q(a, b) = f(a, b)$ y que las derivadas parciales de primero y segundo orden de Q y f en (a, b) sean iguales, entonces se obtiene el siguiente polinomio:

Polinomio de Taylor de grado 2 para aproximar $f(x, y)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b)
Si f tiene derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx Q(x,y) \\ &= f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ &\quad + \frac{f_{xx}(a, b)}{2}(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{f_{yy}(a, b)}{2}(y - b)^2. \end{aligned}$$

Estos coeficientes se determinan exactamente igual que para $(a, b) = (0, 0)$.

Ejemplo 2 Encontrar el polinomio de Taylor de grado 2 en el punto (1, 2) para la función $f(x, y) = \frac{1}{xy}$.

Solución La tabla 13.7 contiene las derivadas parciales y sus valores en el punto (1, 2).

TABLA 13.7 *Derivadas parciales de* $f(x, y) = 1/(xy)$

Derivada	Fórmula	Valor en (1, 2)	Derivada	Fórmula	Valor en (1, 2)
$f(x, y)$	$1/(xy)$	1 / 2	$f_{xx}(x, y)$	$2/(x^3y)$	1
$f_x(x, y)$	$-1/(x^2y)$	−1 / 2	$f_{xy}(x, y)$	$1/(x^2y^2)$	1 / 4
$f_y(x, y)$	$-1/(xy^2)$	−1 / 4	$f_{yy}(x, y)$	$2/(xy^3)$	1 / 4

Por lo tanto, el polinomio cuadrático de Taylor para f cerca de (1, 2) es

$$\begin{aligned}\frac{1}{xy} &\approx Q(x, y)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(y-2) + \frac{1}{2}(1)(x-1)^2 + \frac{1}{4}(x-1)(y-2) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)(y-2)^2\\ &= \frac{1}{2} - \frac{x-1}{2} - \frac{y-2}{4} + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)(y-2)}{4} + \frac{(y-2)^2}{8}.\end{aligned}$$

El error en aproximaciones lineales y cuadráticas

Regresemos a la función $f(x, y) = \cos(2x + y) + \operatorname{sen}(x + y)$ y sus aproximaciones lineales y cuadráticas, $L(x, y)$ y $Q(x, y)$. Las gráficas de contorno del ejemplo 1 son evidencia de que Q es una mejor aproximación a f que L. Ahora veremos exactamente cuánto mejor.

Comenzamos por considerar aproximaciones sobre el punto (0, 0). Definimos el error en la aproximación lineal como la diferencia

$$E_L = f(x, y) - L(x, y).$$

El error en la aproximación cuadrática se define de modo semejante como

$$E_Q = f(x, y) - Q(x, y).$$

La tabla 13.8 muestra la forma en que las magnitudes de estos errores, $|E_L|$ y $|E_Q|$, dependen de la distancia, $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, del punto (x, y) desde (0, 0). Los valores de la tabla 13.8 sugieren que, en este ejemplo,

$$E_L \text{ es proporcional a } d^2 \quad \text{y} \quad E_Q \text{ es proporcional a } d^3.$$

En general, se puede demostrar que los errores E_L y E_Q son proporcionales a d^2 y d^3, respectivamente.

TABLA 13.8 *Magnitud del error en las aproximaciones lineales y cuadráticas a* $f(x, y) = \cos(2x + y) + \operatorname{sen}(x + y)$

Punto (x, y)	Distancia d	Error, $\lvert E_L\rvert$	Error, $\lvert E_Q\rvert$
$x = y = 0$	0	0	0
$x = y = 10^{-1}$	$1.4 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-3}$
$x = y = 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-6}$
$x = y = 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-9}$
$x = y = 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-12}$

Para utilizar estos errores en la práctica, necesitamos acotar sus magnitudes. Si la distancia entre (x, y) y (a, b) se representa por $d(x, y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, se puede demostrar que se cumple el siguiente resultado:

Límite de error para aproximación lineal

Suponga que $f(x, y)$ es una función con derivadas parciales continuas de segundo orden tal que para $d(x, y) \le d_0$,

$$|f_{xx}|, |f_{xy}|, |f_{yy}| \le M_L$$

Supongamos que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= L(x, y) + E_L(x, y) \\ &= f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + E_L(x, y). \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$|E_L(x, y)| \le 2M_L d(x, y)^2 \quad \text{para} \quad d(x, y) \le d_0.$$

Observe que el límite superior para el término de error $E_L(x, y)$ tiene una forma que es reminiscente del término de segundo orden de la fórmula de Taylor para $f(x, y)$.

Límite de error para aproximación cuadrática

Supongamos que $f(x, y)$ es una función con derivadas parciales continuas de tercer orden tal que para $d(x, y) \le d_0$,

$$|f_{xxx}|, |f_{xxy}|, |f_{xyy}|, |f_{yyy}| \le M_Q.$$

Supongamos que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= Q(x, y) + E_Q(x, y) \\ &= f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ &+ \frac{f_{xx}(a, b)}{2}(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{f_{yy}(a, b)}{2}(y - b)^2 + E_Q(x, y). \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$|E_Q(x, y)| \le \frac{4}{3} M_Q d(x, y)^3 \quad \text{por} \quad d(x, y) \le d_0.$$

El problema 20 muestra cómo se obtienen estos cálculos de error y los coeficientes (2 y 4/3). Es importante observar el hecho que, para d pequeña, la magnitud de E_L es mucho menor que d y la magnitud de E_Q, mucho menor que d^2. En otras palabras tenemos el siguiente resultado:

A medida que $d(x, y) \to 0$:

$$\frac{E_L(x, y)}{d(x, y)} \to 0 \quad \text{y} \quad \frac{E_Q(x, y)}{(d(x, y))^2} \to 0.$$

Esto significa que, cerca del punto (a, b), podemos considerar la función original y a su aproximación como indistinguibles y que se comportan en la misma manera.

3 Supóngase que el polinomio de Taylor de grado 2 para f en (0, 0) es $Q(x, y) = 5x^2 + 3y^2$. Supóngase que también se indica que

$$|f_{xxx}|, |f_{xxy}|, |f_{xyy}|, |f_{yyy}| \le 9.$$

Obsérvese que $Q(x, y) > 0$ para toda (x, y) excepto $(0, 0)$. Demostrar que, excepto en $(0, 0)$, tenemos

$$f(x, y) > 0 \text{ para toda } (x, y) \text{ tal que } \sqrt{x^2 + y^2} = d < 0.25.$$

Solución Por el límite de error para el polinomio de Taylor de grado 2, tenemos

$$|E_Q(x, y)| = |f(x, y) - Q(x, y)| \leq \frac{4}{3}(9)d^3 = 12d^3$$

que puede escribirse como

$$-12d^3 \leq f(x, y) - Q(x, y) \leq 12d^3.$$

Por lo tanto sabemos que

$$Q(x, y) - 12d^3 \leq f(x, y).$$

Como $Q(x, y) = 5x^2 + 3y^2$, tenemos

$$3x^2 + 5y^2 - 12d^3 \leq f(x, y).$$

Como $3x^2 + 5y^2 \geq 3x^2 + 3y^2 = 3d^2$, tenemos

$$3d^2 - 12d^3 \leq f(x, y).$$

Ahora d^3 se aproxima a 0 más rápido que d^2, así que cuando d es pequeña, tenemos

$$0 \leq 3d^2 - 12d^3 \leq f(x, y).$$

De hecho, si escribimos $3d^2 - 12d^3 = 3d^2(1 - 4d)$ resulta claro que si $d < 1/4$ entonces $f(x, y) > 0$, excepto en $(0, 0)$, donde $f = 0$. Por lo tanto, f y Q tienen el mismo signo para puntos cerca de $(0, 0)$.

Problemas para la sección 13.9

Encuentre los polinomios cuadráticos de Taylor alrededor de $(0, 0)$ para las funciones de los problemas 1, 2 y 3.

1. $e^{-2x^2-y^2}$
2. $\operatorname{sen} 2x + \cos y$
3. $\ln(1 + x^2 - y)$

Para cada una de las funciones de los problemas del 4 al 11, encuentre las aproximaciones lineal y cuadrática válidas cerca de $(1, 1)$. Compare los valores de las aproximaciones en $(1.1, 1.1)$ con el valor exacto de la función.

4. $z = xe^y$
5. $z = (x + y)e^y$
6. $z = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$
7. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
8. $\arctan(x + y)$
9. $\dfrac{xe^y}{x + y}$
10. $z = \operatorname{sen}(x / y)$
11. $z = \arctan(x / y)$
12. Sea $f(x, y) = \sqrt{x + 2y + 1}$.
    a) Calcule la linealización local de f en $(0, 0)$.
    b) Calcule el polinomio de Taylor de grado 2 para f en $(0, 0)$.
    c) Compare los valores de las aproximaciones lineal y cuadrática del inciso a y del b con los verdaderos valores para $f(x, y)$ en los puntos $(0.1, 0.1)$, $(-0.1, 0.1)$, $(0.1, -0.1)$, $(-0.1, -0.1)$. ¿Cuál aproximación arroja valores más cercanos?
13. Con ayuda de una computadora y empleando su respuesta al problema 12, dibuje los seis diagramas de contorno de $f(x, y) = \sqrt{x + 2y + 1}$ y sus aproximaciones lineales y cuadráticas, $L(x, y)$ y $Q(x, y)$, en las dos ventanas $[-0.6, 0.6] \times [-0.6, 0.6]$ y $[-2, 2] \times [-2, 2]$. Explique la forma de los contornos, su separación, y la relación entre los contornos de f, L y Q.

14. La figura 13.65 muestra las curvas de nivel de una función $f(x, y)$ alrededor de un máximo o un mínimo, M. Uno de los puntos P y Q tiene coordenadas (x_1, y_1) y el otro tiene coordenadas (x_2, y_2). Suponga que $b > 0$ y $c > 0$. Considere las dos aproximaciones lineales a f dadas por

$$f(x, y) \approx a + b(x - x_1) + c(y - y_1)$$
$$f(x, y \approx k + m(x - x_2) + n(y - y_2).$$

a) ¿Cuál es la relación entre los valores de a y k?
b) ¿Cuáles son las coordenadas de P?
c) ¿Es M un máximo o un mínimo?
d) ¿Qué se puede decir del signo de las constantes m y n?

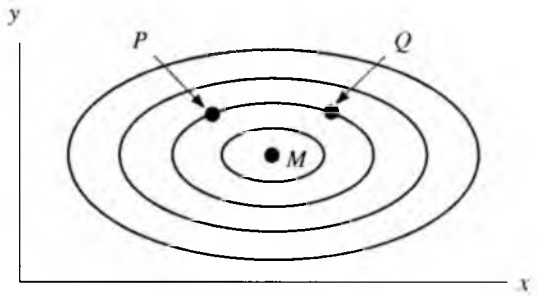


Figura 13.65

15. Considere la función $f(x, y) = (\text{sen } x)(\text{sen } y)$.
    a) Encuentre los polinomios de Taylor de grado 2 para f alrededor de los puntos $(0, 0)$ y $(\pi/2, \pi/2)$.
    b) Utilice los polinomios de Taylor para trazar los contornos de f cerca de cada uno de los puntos $(0, 0)$ y $(\pi/2, \pi/2)$.

Para los problemas del 16 al 19:

a) Encuentre la linealización local, $L(x, y)$, para la función $f(x, y)$ en el origen. Estime el error $E_L(x, y) = f(x, y) - L(x, y)$ si $|x| \le 0.1$ y $|y| \le 0.1$.
b) Encuentre el polinomio de Taylor de grado 2, $Q(x, y)$, para la función $f(x, y)$ en el origen. Calcule el error $E_Q(x, y) = f(x, y) - Q(x, y)$ si $|x| \le 0.1$ y $|y| \le 0.1$.
c) Utilice una calculadora para calcular exactamente $f(0.1, 0.1)$ y los errores $E_L(0.1, 0.1)$ y $E_Q(0.1, 0.1)$. ¿Cómo se comparan estos valores con los errores pronosticados en los incisos a y b?

16. $f(x, y) = (\cos x)(\cos y)$
17. $f(x, y) = (e^x - x)\cos y$
18. $f(x, y) = e^{x+y}$
19. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x+y}$

20. Se sabe que si las derivadas de una función de una variable, $g(t)$, satisfacen

$$|g^{(n+1)}(t)| \le K \quad \text{para} \quad |t| \le d_0,$$

entonces el error, E_n, en la $n^{\text{ésima}}$ aproximación de Taylor, $P_n(x)$, está acotado como sigue:

$$|E_n| = |g(t) - P_n(t)| \le \frac{K}{(n+1)!}|t|^{n+1} \quad \text{para } |t| \le d_0.$$

En este problema, usamos este resultado para obtener los límites de error de las aproximaciones de Taylor lineales y cuadráticas para $f(x, y)$. Para una función particular $f(x, y)$, sea $x = ht$ y $y = kt$ para h y k fijas, y definamos $g(t)$ como sigue:

$$g(t) = f(ht, kt) \quad \text{para } 0 \le t \le 1.$$

a) Calcule g' (t), $g''(t)$ y g''' (t) usando la regla de la cadena.
b) Demuestre que $L(ht, kt) = P_1(t)$ y que $Q(ht, kt) = P_2(t)$, donde L es la aproximación lineal a f en (0, 0) y Q es el polinomio de Taylor de grado 2 para f en (0, 0).
c) ¿Cuál es la relación entre $E_L = f(x, y) - L(x, y)$ y E_1? ¿Cuál es la relación entre $E_Q = f(x, y) - Q(x, y)$ y E_2?
d) Si se supone que las derivadas parciales de segundo y tercer orden de f están acotadas si $d(x, y) \leq d_0$, demuestre que $|E_L|$ y $|E_Q|$ están acotadas como en la página 165.

13.10 DIFERENCIABILIDAD

Notas sobre diferenciabilidad

En la sección 13.3 se hizo una introducción informal al concepto de diferenciabilidad. A una función $f(x, y)$ se la llamó *diferenciable* en un punto (a, b) si está bien aproximada por una función lineal cerca de (a, b). Esta sección se concentra en el significado preciso de la frase "bien aproximada". Al estudiar algunos ejemplos veremos que la linealidad local exige la existencia de derivadas parciales, pero hay otras condiciones. En particular, la existencia de derivadas parciales en un punto no es suficiente para garantizar la linealidad local en ese punto.

Comenzamos por analizar la relación entre continuidad y diferenciabilidad. Como ilustración, tome una hoja de papel, arrúguela hasta formar una pelota y vuelva a extenderla. Dondequiera que haya un pliegue será difícil aproximar la superficie por un plano, porque éstos son los puntos donde la función que da la altura del papel sobre el piso no es diferenciable. Sin embargo, la hoja de papel sirve como el modelo de una gráfica que es continua, sin interrupciones. Como en el caso del cálculo de una variable, la continuidad no implica la diferenciabilidad. Pero la diferenciabilidad *requiere* de la continuidad: no puede haber aproximaciones lineales a una superficie en puntos donde la altura sufre cambios abruptos.

Partiendo de la definición de diferenciabilidad para funciones de una sola variable, se llega a una definición de diferenciabilidad para funciones de dos variables.

Diferenciabilidad para funciones de una variable

Recordemos que una función $g(x)$ es *diferenciable* en el punto a si el límite

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h}$$

existe. Geométricamente, la definición quiere decir que la gráfica de $y = g(x)$ puede ser "bien aproximada" por la línea $y = L(x) = g(a) + g'(a)(x - a)$. ¿Qué tan bien tiene que aproximarse esta línea a la función $g(x)$ cerca del punto a antes que podamos decir que g es diferenciable en a? Para contestar esta pregunta, supongamos que g es diferenciable en a y sea $E(x)$ el error entre la función $g(x)$ y la línea $L(x)$, de modo que

$$\begin{aligned} E(x) &= g(x) - L(x) \\ &= g(x) - g(a) - g'(a)(x - a). \end{aligned}$$

Esto significa que en el punto $x = a + h$ cerca de a, el error $E(x)$ está dado por

$$E(a + h) = g(a + h) - g(a) - g'(a)h.$$

Supongamos que se considera el error relativo $E(a+h)/h$. Tenemos

$$\frac{E(a+h)}{h} = \frac{g(a+h)-g(a)}{h} - g'(a)$$

Por lo tanto, en el límite a medida que $h \to 0$, tenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{E(a+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} - g'(a).$$

Por la definición de la derivada, el lado derecho de la última ecuación es 0.

Vemos pues que si f es diferenciable, el error relativo tiende a 0 a medida que h tiende a 0:

$$\lim_{h\to 0} \frac{E(a+h)}{h} = 0.$$

Por "bien aproximado" debemos entender que este límite es cero. Empleamos esta idea para dar una nueva definición de diferenciabilidad que se puede generalizar a funciones de varias variables.

Una función $g(x)$ es **diferenciable en el punto** a si hay una función lineal $L(x) = g(a) + m(x-a)$ tal que si el error, $E(x)$, está definido por

$$g(x) = L(x) + E(x)$$

y si $h = x - a$ entonces el error relativo $E(a+h)/h$ satisface a

$$\lim_{h\to 0} \frac{E(a+h)}{h} = 0.$$

La función $L(x)$ se llama *linealización local* de $g(x)$ cerca de a. La función g es ***diferenciable*** si es diferenciable en cada punto de su dominio.

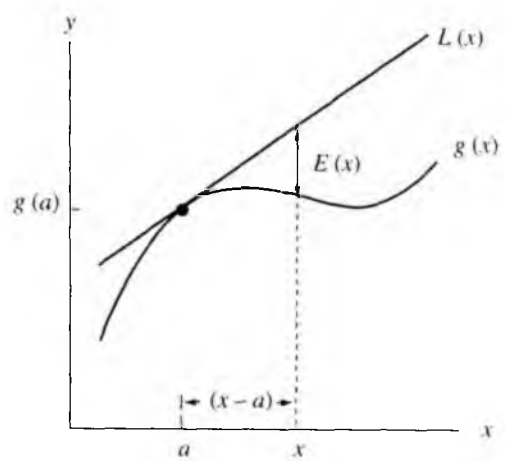


Figura 13.66 Gráfica de la función $y = g(x)$ y su linealización local $y = L(x)$ cerca del punto a.

Esta nueva definición indica que la razón $E(x)/(x-a)$ de la figura 13.66, el error dividido entre la distancia desde el punto a, tiende a 0 conforme $x \to a$. Además, puede demostrarse que debemos tener $m = g'(a)$.

Diferenciabilidad para funciones de dos variables

Con base en nuestra nueva definición de diferenciabilidad, definimos diferenciabilidad de una función de dos variables en un punto en términos del error y la distancia desde el punto. Si el punto es (a, b) y el punto cercano es $(a + h, b + k)$, la distancia es $\sqrt{h^2 + k^2}$ (véase Fig. 13.67).

Una función $f(x, y)$ es **diferenciable en el punto** (a, b) si hay una función lineal $L(x, y) = f(a, b) + m(x - a) + n(y - b)$ tal que si el error $E(x, y)$ está definido por

$$f(x, y) = L(x, y) + E(x, y),$$

y si $h = x - a$, $k = y - b$, entonces el *error relativo* $E(a + h, b + k) / \sqrt{h^2 + k^2}$ satisface

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \frac{E(a + h, b + k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

La función f es **diferenciable** si es diferenciable en cada punto de su dominio. La función $L(x, y)$ recibe el nombre de *linealización local* de $f(x, y)$ cerca de (a, b).

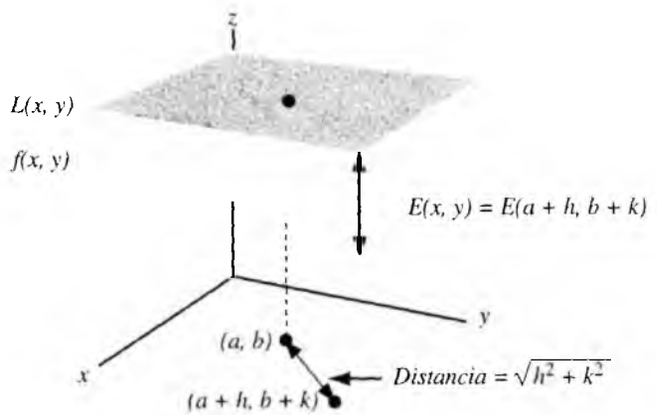


Figura 13.67 Gráfica de la función $z = f(x, y)$ y su linealización local $z = L(x, y)$ cerca del punto (a, b).

Derivadas parciales y diferenciabilidad

En el siguiente ejemplo, demostramos que esta definición de diferenciabilidad está de acuerdo con nuestra noción previa, es decir, que $m = f_x$ y $n = f_y$, y la gráfica de $L(x, y)$ es el plano tangente.

Ejemplo 1 Demostrar que si f es una función diferenciable con linealización local $L(x, y) = f(a, b) + m(x - a) + n(y - b)$, entonces $m = f_x(a, b)$ y $n = f_y(a, b)$.

Solución Como f es diferenciable, sabemos que el error relativo en $L(x, y)$ tiende a 0 conforme nos acercamos a (a, b). Supongamos que $h > 0$ y $k = 0$. Entonces sabemos que

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{E(a + h, b)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{h \to 0} \frac{E(a + h, b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - L(a + h, b)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b) - mh}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \right) - m = f_x(a, b) - m.$$

Se cumple un resultado semejante si $h < 0$, así que tenemos $m = f_x(a, b)$. El resultado $n = f_y(a, b)$ se encuentra de manera similar.

El ejemplo anterior demuestra que si una función es diferenciable en un punto, tiene ahí derivadas parciales. Por lo tanto, si una cualquiera de las derivadas parciales no existe, entonces la función no puede ser diferenciable. Esto es lo que pasa en el siguiente ejemplo de un cono.

Ejemplo 2 Considerar la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. ¿Es f diferenciable en el origen?

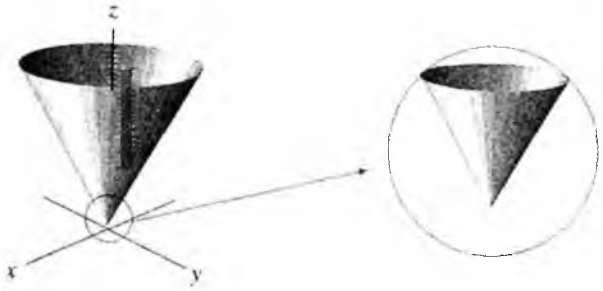


Figura 13.68 La función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ no es localmente lineal en (0, 0): un acercamiento alrededor de (0, 0) no hace que la gráfica parezca un plano.

Solución Si hacemos un acercamiento a la gráfica de la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en el origen, como se muestra en la figura 13.68, persiste la punta aguda; la gráfica nunca se modifica para tener aspecto plano. Cerca del vértice, no parece posible aproximar la gráfica (en ningún sentido razonable) por un plano.

A juzgar por la gráfica de f, no esperaríamos que f fuera diferenciable en (0, 0). Comprobemos esto y tratemos de calcular las derivadas parciales de f en (0, 0):

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h^2 + 0} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Como $|h|/h = \pm 1$, dependiendo de si h se aproxima a 0 desde la izquierda o la derecha, este límite no existe ni tampoco existe la derivada parcial $f_x(0, 0)$. Por lo tanto, f no puede ser diferenciable en el origen. Si lo fuera, existirían ambas derivadas parciales $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.

Como alternativa se podría demostrar de manera directa que no hay aproximación lineal cerca de (0, 0) que satisfaga el criterio de un error relativo pequeño para establecer la diferenciabilidad. Cualquier plano que pase por el punto (0, 0, 0) tiene la forma $L(x, y) = mx + ny$ para algunas constantes m y n. Si $E(x, y) = f(x, y) - L(x, y)$, entonces

$$E(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - mx - ny.$$

Entonces, para que f sea diferenciable en el origen, necesitaríamos demostrar que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \frac{\sqrt{h^2 + k^2} - mh - nk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Al tomar $k = 0$ resulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h| - mh}{h} = 1 - m \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|}.$$

Este límite existe sólo si $m = 0$ por la misma razón que antes. Pero entonces el valor del límite es 1 y no 0 como se necesita. En consecuencia, se llega otra vez a la conclusión de que f no es diferenciable.

En el ejemplo 2, las derivadas parciales f_x y f_y no existieron en el origen y esto fue suficiente para establecer la no diferenciabilidad ahí. Podría pensarse que si ambas derivadas parciales existen, entonces f debe ser diferenciable. Pero el siguiente ejemplo demuestra que esto no es necesariamente cierto: la existencia de ambas derivadas parciales en un punto *no* es suficiente para garantizar la diferenciabilidad.

Ejemplo 3 Considear la función $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$. Demostrar que las derivadas parciales $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen, pero que f no es diferenciable en (0, 0).

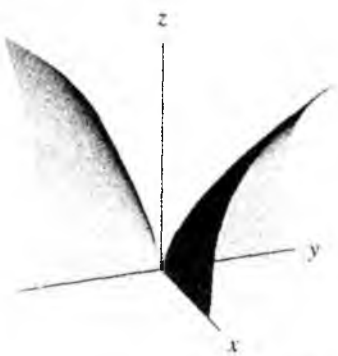


Figura 13.69 Gráfica de $z = x^{1/3}y^{1/3}$ para $z \geq 0$.

Solución En la figura 13.69 véase la parte de la gráfica de $z = x^{1/3}y^{1/3}$ cuando $z \geq 0$. Tenemos $f(0, 0) = 0$ y calculamos las derivadas parciales usando la definición:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

y de igual manera

$$f_y(0, 0) = 0.$$

Por lo tanto, si existiera una aproximación lineal cerca del origen, tendría que ser $L(x, y) = 0$. Pero podemos demostrar que esta selección de $L(x, y)$ no resulta en el pequeño error relativo que es necesario para la diferenciabilidad. De hecho, como $E(x, y) = f(x, y) - L(x, y) = f(x, y)$, es necesario examinar el límite

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{h^{1/3}h^{1/3}}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Si este límite existe, se obtiene el mismo valor no importa cómo se acerquen h y k a 0. Suponga que tomamos $k = h > 0$. Entonces el límite se convierte en

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}h^{1/3}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{2/3}}{h\sqrt{2}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{1/3}\sqrt{2}}.$$

Pero este límite no existe, puesto que valores pequeños de h harán que la fracción sea arbitrariamente grande. Por lo tanto, el único candidato posible para una aproximación lineal en el origen no tiene un error relativo suficientemente pequeño. En consecuencia, esta función no es diferenciable en el origen, aun cuando las derivadas parciales $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existan. La figura 13.69 confirma que cerca del origen la gráfica de $z = f(x, y)$ no está bien aproximada por ningún plano.

En resumen,

- Si una función es diferenciable en un punto, entonces ambas derivadas parciales existen.
- Tener ambas derivadas parciales en un punto no garantiza que una función sea diferenciable.

Continuidad y diferenciabilidad

Sabemos que las funciones diferenciables de una variable son continuas. Del mismo modo, puede demostrarse que si una función de dos variables es diferenciable en un punto, entonces la función es continua en el punto.

En el ejemplo 3, la función f era continua en el punto donde no era diferenciable. El ejemplo 4 demuestra que inclusive si las derivadas parciales de una función existen en un punto, la función no es necesariamente continua en ese punto si no es diferenciable ahí.

Ejemplo 4 Suponer que f es la función de dos variables definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

El problema 4 de la página 57 demostró que $f(x, y)$ no es continua en el origen. Demostrar que existen las derivadas parciales $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$. ¿Podría f ser diferenciable en $(0, 0)$?

Solución De la definición de la derivada parcial vemos que

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \frac{0}{h^2 + 0^2} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

y de igual manera

$$f_y(0, 0) = 0.$$

Por lo tanto, las derivadas parciales $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen, pero f no puede ser diferenciable en el origen puesto que no es continua ahí.

En resumen,

- Si una función es diferenciable en un punto, entonces es continua ahí.
- Tener ambas derivadas parciales en un punto no garantiza que una función sea continua ahí.

¿Cómo saber si una función es diferenciable?

¿Podemos usar derivadas parciales para saber si una función es diferenciable? Como vemos en los ejemplos 3 y 4, no es suficiente que existan las derivadas parciales; sin embargo, la siguiente condición sí garantiza la diferenciabilidad:

> Si las derivadas parciales, f_x y f_y, de una función f existen y son continuas en un pequeño disco con centro en el punto (a, b), entonces f es diferenciable en (a, b).

No demostraremos este hecho, aun cuando es un criterio de diferenciabilidad que con frecuencia resulta más sencillo de usar que la definición. El requisito de derivadas parciales continuas es más riguroso que el de diferenciabilidad, de modo que existen funciones diferenciables que no tienen derivadas parciales continuas. Sin embargo, la mayoría de las funciones que se encuentran tendrán derivadas parciales continuas. La clase de funciones con derivadas parciales continuas recibe el nombre de C^1.

Ejemplo 5 Demostrar que la función $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ es diferenciable en cualquier parte de su dominio.

Solución El dominio de f es todo el espacio de dos dimensiones excepto el origen. Demostraremos que f tiene derivadas parciales continuas en todas partes en su dominio (es decir, la función f está en C^1). Las derivadas parciales son

$$f_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad f_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Como f_x y f_y son cocientes de funciones continuas, las derivadas parciales son continuas en todas partes, excepto en el origen (donde los denominadores son cero). Por lo tanto, f es diferenciable en todo punto de su dominio.

La mayoría de las funciones construidas a partir de funciones elementales tienen derivadas parciales continuas, excepto quizá en unos cuantos puntos obvios. En consecuencia, en la práctica, con frecuencia podemos saber si las funciones son C^1 sin calcular explícitamente las derivadas parciales.

Problemas para la sección 13.10

Para las funciones f de los problemas del 1 al 4 conteste las siguientes preguntas. Justifique sus respuestas.

a) Dibuje en una computadora un diagrama de contorno para f.
b) ¿Es f diferenciable en todos los puntos $(x, y) \neq (0, 0)$?
c) ¿Existen las derivadas parciales f_x y f_y y serán continuas en todos los puntos $(x, y) \neq (0, 0)$?
d) ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?
e) ¿Existen las derivadas parciales f_x y f_y y son continuas en $(0, 0)$?

1. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}, & x \neq 0 \text{ y } y \neq 0, \\ 0, & x \neq 0 \text{ y } y \neq 0, \end{cases}$

2. $f(x$

3. $f(x$

4. $f(x$

5. Cor

a)
b)
c)
d)
e)

f)

g)

6. Con

a) D
b) D
c) ¿I

7. Con

a)

b)

c)
d)
e)

8. Supc

2. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0). \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

3. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0). \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

4. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0). \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

5. Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

   a) Dibuje en una computadora el diagrama de contorno de f.
   b) ¿Es f diferenciable para $(x, y) \neq (0, 0)$?
   c) Demuestre que $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen.
   d) ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?
   e) Suponga que $x(t) = at$ y $y(t) = bt$, donde a y b son constantes, no cero ambas. Si $g(t) = f(x(t), y(t))$, demuestre que

$$g'(0) = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}.$$

   f) Demuestre que

$$f_x(0, 0)\, x'(0) + f_y(0, 0) y'(0) = 0.$$

   ¿Se cumple la regla de la cadena para la función compuesta $g(t)$ en $t = 0$? Explique.
   g) Demuestre que la derivada direccional $f_{\vec{u}}(0, 0)$ existe para cada vector unitario $\vec{u}$. ¿Implica esto que f sea diferenciable en $(0, 0)$?

6. Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0). \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

   a) Dibuje en computadora el diagrama de contorno de f.
   b) Demuestre que la derivada direccional $f_{\vec{u}}(0, 0)$ existe para cada vector unitario $\vec{u}$.
   c) ¿Es f continua en $(0, 0)$? ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$? Explique

7. Considere la función $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

   a) Use computadora para dibujar el diagrama de contorno de f. ¿Se parece el diagrama de contorno al diagrama de un plano cuando hacemos un acercamiento al origen?
   b) Dibuje en computadora la gráfica de f. ¿Se parece la gráfica a un plano cuando se hace un acercamiento al origen?
   c) ¿Es f diferenciable para $(x, y) \neq (0, 0)$?
   d) Demuestre que $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen.
   e) ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$? [Sugerencia: Considere la derivada direccional $f_{\vec{u}}(0, 0)$ para $\vec{u} = (\vec{i} + \vec{j}) / \sqrt{2}$].

8. Suponga que una función f es diferenciable en el punto (a, b). Demuestre que f es continua en (a, b).

9. Suponga que $f(x, y)$ es una función tal que $f_x(0, 0) = 0$ y $f_y(0, 0) = 0$ y $f_{\vec{u}}(0, 0)$ para $\vec{u} = (\vec{i} + \vec{j}) / \sqrt{2}$].
   a) ¿Es f diferenciable en (0, 0)? Explique.
   b) Dé un ejemplo de una función f definida en dos dimensiones que satisfaga estas condiciones. [Sugerencia: La función f no tiene que estar definida por una sola fórmula válida para todos los puntos del plano.]

10. Considere la siguiente función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0). \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

La gráfica de f se muestra en la figura 13.70, y su diagrama de contorno, en la figura 13.71.

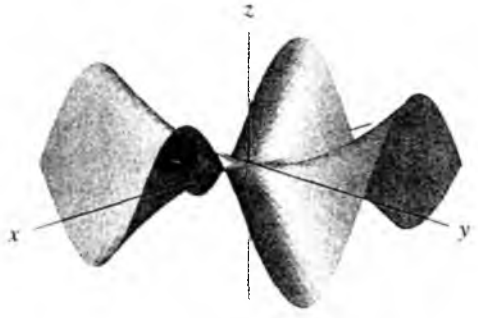


Figura 13.70 Gráfica de $\dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$.

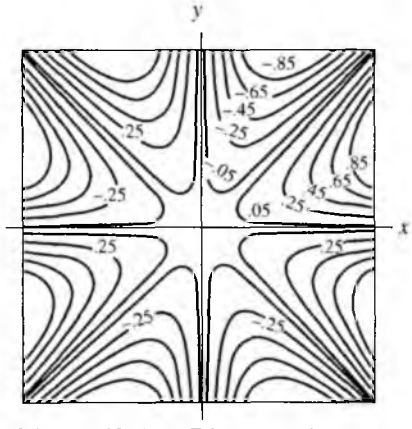


Figura 13.71 Diagrama de contorno de $\dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$.

a) Encuentre $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.
b) Demuestre que $f_x(0, 0) = 0$ y $f_y(0, 0) = 0$.
c) ¿Son continuas las funciones f_x y f_y en (0, 0)?
d) ¿Es f diferenciable en (0, 0)?

PROBLEMAS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO TRECE

Para los problemas del 1 al 4, encuentre las derivadas parciales indicadas. Suponga que las variables están restringidas a un dominio en el que la función está definida.

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ si $z = (x^2 + x - y)^7$

2. $\dfrac{\partial F}{\partial L}$ si $F = (L, K) = 3\sqrt{LK}$

3. $\dfrac{\partial f}{\partial p}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial q}$ si $f = (p, q) = e^{p/q}$

4. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ si $f = (x, y) = e^{xy}$ (ln y)

Encuentre ambas derivadas parciales para las funciones de los problemas del 5 al 8. Suponga que las variables están restringidas a un dominio en el que la función está definida.

5. $z = x^4 - x^7y^3 + 5xy^2$
6. $z = \tan(\theta) / r$
7. $w = s \ln(s + t)$
8. $w = \arctan(ue^{-v})$

9. Si $f(x, y) = x^2y$ y $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$, encuentre la derivada direccional en el punto (2, 6) en la dirección de $\vec{v}$.

Suponga que $f(x, y)$ es una función diferenciable. ¿Son falsos o verdaderos los enunciados de los problemas del 10 al 16? Explique su respuesta.

10. $f_{\vec{u}}(x_0, y_0)$ es un escalar
11. $f_{\vec{u}}(a, b) = \|\nabla f(a, b)\|$

12. Si $\vec{u}$ es tangente a la curva de nivel de f en algún punto, entonces grad $f \cdot \vec{u} = 0$ en ese punto.
13. Si f es diferenciable en (a, b), siempre hay una dirección en que la rapidez de cambio de f en (a, b) es 0.
14. Hay una función con un punto en su dominio donde $\|\text{grad } f\| = 0$ y donde hay una derivada direccional diferente de cero.
15. Hay una función con $\|\text{grad } f\| = 4$ y $f_{\vec{i}} = 5$ en algún punto.
16. Hay una función con $\|\text{grad } f\| = 4$ y $f_{\vec{j}} = -3$ en algún punto.
17. Sea $f(w, z) = w^2z + 3z^2$.
    a) Utilice un cociente de diferencias con $h = 0.01$ para aproximar $f_w(2, 2)$ y $f_z(2, 2)$.
    b) Ahora evalúe $f_w(2, 2)$ y $f_z(2, 2)$ exactamente.
18. La figura 13.72 muestra un diagrama de contorno para la temperatura T (en °C) de una pared en una habitación con calefacción, como función de la distancia x a lo largo de la pared y el tiempo t en minutos. Calcule $\partial T/\partial x$ y $\partial T/\partial t$ en los puntos dados. Dé unidades para sus respuestas y explique qué significan.
    a) $x = 15, t = 20$ b) $x = 5, t = 12$

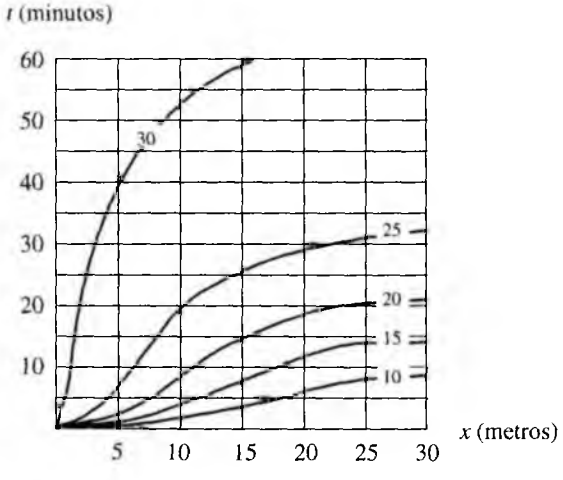


Figura 13.72

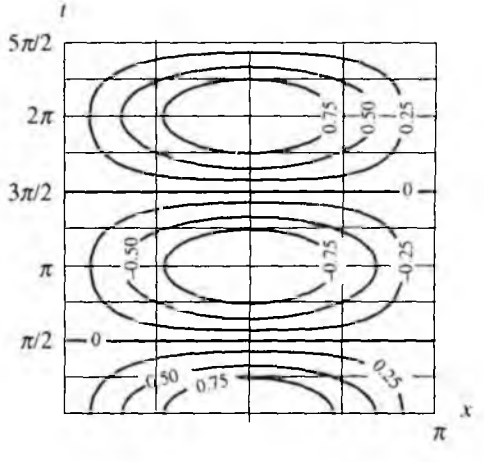


Figura 13.73

19. La figura 13.73 muestra un diagrama de contorno para la función de una cuerda en vibración, $f(x, t)$.
    a) ¿Es $f_t(\pi/2, \pi/2)$ positiva o negativa? ¿Y $f_t(\pi/2, \pi)$? ¿Qué indica el signo de $f_t(\pi/2, b)$ sobre el movimiento del punto en la cuerda en $x = \pi/2$ cuando $t = b$?
    b) Encuentre toda t para la que f_t sea positiva, para $0 \le t \le 5\pi/2$.
    c) Encuentre toda x y t tal que f_t sea positiva.

20. La cantidad Q (en libras) de carne que consume cierta comunidad durante una semana es una función $Q = f(b, c)$ de los precios de la carne, b, y del pollo, c, durante la semana. ¿Esperaría que $\partial Q/\partial b$ fuera positiva o negativa? ¿Y qué hay de $\partial Q/\partial c$?

21. Suponga que el costo de producir una unidad de cierto producto está dado por

$$c = a + bx + ky,$$

donde x es la cantidad de mano de obra utilizada (en horas-hombre), y la cantidad de materia prima empleada (por peso) y a, b y k son constantes. ¿Qué significa $\partial c/\partial x = b$? ¿Cuál es la interpretación práctica de b?

22. Las personas que viajan a diario a una ciudad pueden escoger entre ir en autobús o en tren. El número de personas que escogen cualquiera de los dos transportes depende en parte del precio de cada cual. Sea $f(P_1, P_2)$ el número de personas que toman el autobús cuando P_1 es el precio de un viaje en autobús y P_2 es el precio del viaje en tren. ¿Qué puede decirse de los signos de $\partial f/\partial P_1$ y de $\partial f/\partial P_2$? Explique sus respuestas.

23. La aceleración g debida a la gravedad, a una distancia r desde el centro de un planeta de masa m está dada por

$$g = \frac{Gm}{r^2},$$

donde G es la constante gravitacional universal.
    a) Encuentre $\partial g/\partial m$ y $\partial g/\partial r$.
    b) Interprete cada una de las derivadas parciales encontradas en el inciso anterior como la pendiente de una gráfica en el plano y trace la gráfica.

24. Suponga que la función $P = f(K, L)$ expresa la producción de una compañía como función del capital invertido, K, y sus costos de mano de obra, L.
    a) Suponga que $f(K, L) = 60K^{1/3}L^{2/3}$. Encuentre la relación entre K y L si la productividad marginal de capital (es decir, la rapidez de cambio de la producción como función del capital) es igual a la productividad marginal del costo de mano de obra (es decir, la rapidez de cambio de la producción como función del costo de mano de obra). Simplifique su respuesta.
    b) Ahora suponga que $f(K, L) = cK^aL^b$, con a, b y c constantes positivas. Conteste la misma pregunta que en el inciso a.

25. Al analizar una fábrica y decidir si se contratan o no más trabajadores, es útil saber en qué circunstancias aumenta la productividad. Suponga que $P = f(x_1, x_2, x_3)$ es la cantidad total producida como función de x_1, que es el número de trabajadores, y cualesquiera otras variables, x_2, x_3. Definimos la productividad promedio de un trabajador como P/x_1. Demuestre que la productividad promedio aumenta conforme x_1 aumenta cuando la producción marginal, $\partial P/\partial x_1$, es mayor que la productividad promedio, P/x_1.

26. Para la función de producción $P = 40L^{0.25}K^{0.75}$ de Cobb–Douglas, encuentre la diferencial dP cuando $L = 2$ y $K = 16$.

27. El área de un triángulo se puede calcular a partir de la fórmula $S = \frac{1}{2}\,ab$ sen C. Demuestre que si se comete un error de 10′ (o sea $\pi/1080$ radianes) al medir C, entonces el error en S es aproximadamente $\pi S/(1080 \tan C)$. [Nota: 10′ quiere decir 10 minutos, donde 1 minuto = 1/60 grados.]

28. La ecuación del gas para un mol de oxígeno relaciona su presión, P (en atmósferas), su temperatura, T (en K), y su volumen, V (en decímetros cúbicos, dm^3):

$$T = 16.574\ \frac{1}{V} - 0.52754\ \frac{1}{V^2} + 0.3879\ P + 12.187\ VP.$$

a) Encuentre la temperatura T y la diferencial dT si el volumen es 25 dm^3 y la presión es 1 atmósfera.

b) Utilice su respuesta al inciso a para calcular cuánto tendría que cambiar el volumen si la presión aumenta en 0.1 atmósferas y la temperatura permanece constante.

29. Encuentre la rapidez de cambio de $f(x, y) = xe^y$ en el punto (1, 1) en la dirección de $\vec{i} + 2\vec{j}$.

30. Encuentre la derivada direccional de $z = x^2 - y^2$ en el punto (3, –1) en la dirección que hace un ángulo $\theta = \pi/4$ con el eje x. ¿En qué dirección es máxima la derivada direccional?

31. La figura 13.74 muestra las curvas de nivel de una función $f(x, y)$. Dé el valor aproximado de $f_{\vec{u}}$ = (3, 1) con $\vec{u} = (-2\vec{i} + \vec{j}) / \sqrt{5}$. Explique su respuesta.

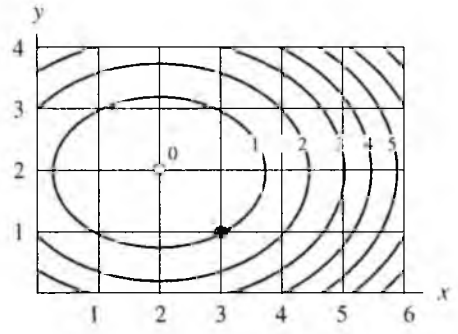


Figura 13.74

32. La figura 13.75 muestra el pago mensual, m, de un préstamo de P dólares solicitado a 5 años para comprar un automóvil, con una tasa de r por ciento de interés. Encuentre una fórmula para una función lineal que calcule m. ¿Cuál es el significado práctico de las constantes en su fórmula?

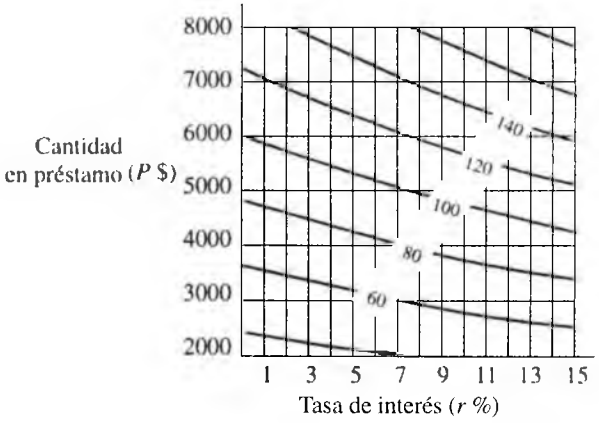


Figura 13.75

33. Encuentre el o los puntos en $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ donde el plano tangente es paralelo al plano $x - y + 3z = 0$.

34. Suponga que la temperatura en el punto (x, y) está dada por la función $T(x, y) = 100 - x^2 - y^2$. ¿En qué dirección debe caminar un insecto que busca calor desde el punto (x, y) para aumentar su temperatura en la forma más rápida?

35. Suponga que los valores de la función $f(x, y)$ cerca del punto $x = 2$, $y = 3$ están dados en la tabla 13.9. Calcule lo siguiente.

    a) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2, 3)}$ y $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2, 3)}$

    b) La rapidez de cambio de f en (2, 3) en la dirección del vector $\vec{i} + 3\vec{j}$.

    c) La máxima rapidez de cambio posible de f a medida que uno se aleja del punto (2, 3). ¿En qué dirección debe uno desplazarse para obtener esta rapidez de cambio?

    d) Escriba una ecuación para la curva de nivel que pasa por el punto (2, 3).

    e) Encuentre un vector tangente a la curva de nivel de f que pasa por el punto (2, 3).

    f) Encuentre el diferencial de f en el punto (2, 3). Si $dx = 0.03$ y $dy = 0.04$, encuentre df. ¿Qué representa df en este caso?

TABLA 13.9

		x	
		2.00	2.01
y	3.00	7.56	7.42
	3.02	7.61	7.47

36. La función $g(x, y)$ es diferenciable y tiene la propiedad de que $g(1, 3) = 4$, $g_x(1, 3) = -1$ y $g_y(1, 3) = 2$.

    a) Encuentre la ecuación de la curva de nivel de g que pasa por el punto (1, 3).

    b) Encuentre las coordenadas del punto en la superficie $z = g(x, y)$ encima del punto (1, 3).

    c) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie $z = g(x, y)$ en el punto encontrado en el inciso b.

37. Suponga que $w = f(x, y, z) = 3xy + yz$ y que x, y, z son funciones de u y u tales que

$$x = \ln u + \cos v, \quad y = 1 + u \operatorname{sen} v, \quad z = uv.$$

    a) Encuentre $\partial w/\partial u$ y $\partial w/\partial v$ en $(u, v) = (1, \pi)$.

    b) Suponga ahora que u y v son también funciones de t tales que

$$u = 1 + \operatorname{sen}(\pi t), \quad v = \pi t^2.$$

    Utilice su respuesta al inciso a para encontrar dw/dt en $t = 1$.

38. Una ciudad circular tiene un radio de r km y un promedio de densidad de población de r hab/km^2. En 1997, la población era de 3 millones, el radio era de 25 km y crecía a razón de 0.1 km/año. Si la densidad aumentaba a razón de 200 hab/km^2/año, encuentre la rapidez a la que crecía la población total de la ciudad.

39. Demuestre que si F es cualquier función diferenciable de una variable, entonces $V(x, y) = xF(2x + y)$ satisface la ecuación

$$x\frac{\partial V}{\partial x} - 2x\frac{\partial V}{\partial y} = V.$$

40. Encuentre una solución particular a la ecuación diferencial del problema 39 que satisfaga
$$V(1, y) = y^2.$$

41. Encuentre el polinomio cuadrático de Taylor alrededor de (0, 0) para $f(x, y) = \cos(x + 2y)\,\text{sen}(x - y)$.

42. Suponga que $f(x, y) = e^{(x-1)^2 + (y-3)^2}$.
    a) Encuentre el polinomio de Taylor de primer orden alrededor de (0, 0).
    b) Encuentre el polinomio (cuadrático) de Taylor de segundo orden alrededor del punto (1, 3).
    c) Encuentre un vector de dos dimensiones perpendicular a la curva de nivel que pasa por (0, 0).
    d) Encuentre un vector de tres dimensiones perpendicular a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (0, 0).

43. La función $T(x, y, z, t)$ es una solución a la ecuación del calor
$$T_t = K(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}),$$
e indica la temperatura en el punto (x, y, z) en el espacio, al tiempo t. La constante K es la conductividad térmica del medio a través del cual circula el calor.
    a) Demuestre que la función
$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{(4\pi Kt)^{3/2}} e^{-(x^2 + y^2 + z^2)/4Kt}$$
es una solución a la ecuación del calor para toda (x, y, z) en tres dimensiones y $t > 0$.
    b) Para cada tiempo fijo t, ¿cuáles son las superficies de nivel de la función $T(x, y, z, t)$ en tres dimensiones?
    c) Considere t como fija y calcule grad $T(x, y, z, t)$. ¿Qué indica grad $T(x, y, z, t)$ sobre la dirección y magnitud del flujo térmico?

44. Cada uno de los diagramas (I al IV) de la figura 13.76 representa las curvas de nivel de una función $f(x, y)$. Para cada función f, considere el punto arriba de P en la superficie $z = f(x, y)$ y seleccione de las listas que siguen:
    a) Un vector que podría ser normal a la superficie en ese punto.
    b) Una ecuación que podría ser la ecuación del plano tangente a la superficie en ese punto.

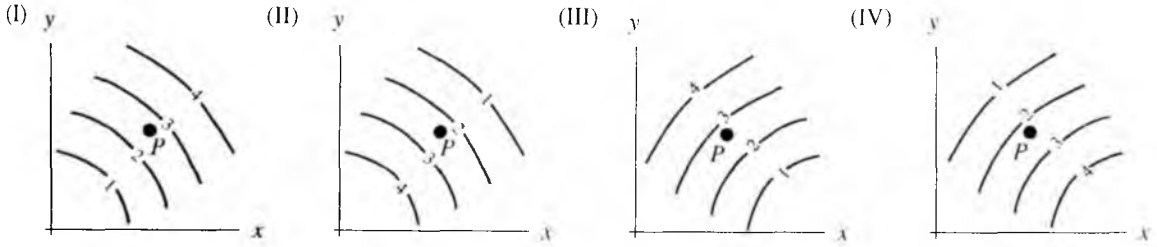


Figura 13.76

Vectores	Ecuaciones
E) $2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$	J) $x + y + z = 4$
F) $2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$	K) $2x - 2y - 2z = 2$
G) $2\vec{j} + 2\vec{k}$	L) $-3x - 3y + 3z = 6$
H) $-2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$	M) $-\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = -7$

OP
L

CAPÍTULO CATORCE

OPTIMIZACIÓN: EXTREMOS LOCALES Y GLOBALES

En el cálculo de una variable se indicó cómo encontrar los valores máximo y mínimo de una función de una variable. Con frecuencia, en la práctica se encuentra más de una variable en un problema de optimización. Por ejemplo, puede que una persona tenga $10 000 para invertir en equipo nuevo y en publicidad para su negocio. ¿Qué combinación de equipo y publicidad producirá la máxima utilidad? O bien, ¿qué combinación de medicamentos hará bajar al mínimo la temperatura de un paciente? En este capítulo se plantean problemas de optimización, en que las variables son libres por completo para variar (optimización no restringida) y donde hay una restricción en las variables (por ejemplo una restricción de presupuesto).

14.1 EXTREMOS LOCALES

Las funciones de varias variables, igual que las funciones de una variable, pueden tener extremos locales y globales. (Esto es, máximos y mínimos locales y globales). Una función tiene un extremo local en un punto donde toma los valores máximos o mínimos en una pequeña región alrededor del punto. Los extremos globales son los valores máximos y mínimos en cualquier parte del dominio en consideración (véase Figs. 14.1 y 14.2).

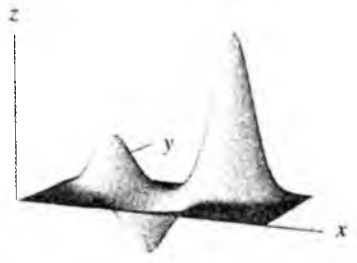


Figura 14.1 Extremos locales y globales para una función de dos variables en $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b$.

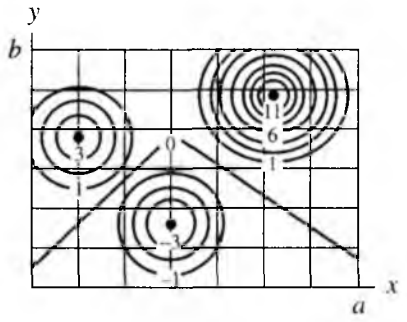


Figura 14.2 Mapa de contorno de la figura 14.1.

Más precisamente, considerando sólo puntos en los que f está definida, se dice:

- f tiene un **máximo local** en el punto P_0 si $f(P_0) \ge f(P)$ para todos los puntos P cerca de P_0.
- f tiene un **mínimo local** en el punto P_0 si $f(P_0) \le f(P)$ para todos los puntos P cerca de P_0.

¿Cómo se detecta un máximo o mínimo local?

Recuerde que si el vector gradiente de una función está definido y es diferente de cero, entonces apunta en la dirección en que la función aumenta. Suponga que una función f tiene un máximo local en un punto P_0 que no está en la frontera del dominio. Si el vector grad $f(P_0)$ estuviera definido y fuera distinto de cero, entonces podríamos aumentar f si se avanza en la dirección de grad $f(P_0)$. Como f tiene un máximo local en P_0, no hay dirección donde f sea creciente. Por lo tanto, si grad $f(P_0)$ está definido, debemos tener

$$\text{grad } f(P_0) = \vec{0}.$$

De igual manera, supongamos que f tiene un mínimo local en el punto P_0. Si grad $f(P_0)$ estuviera definido y fuera distinto de cero, entonces podríamos disminuir f avanzando en la dirección opuesta a grad $f(P_0) = \vec{0}$, y, por tanto, debemos tener otra vez grad $f(P_0) = 0$. En consecuencia, hacemos la siguiente definición:

Los puntos en donde el gradiente es $\vec{0}$ o no está definido reciben el nombre de **puntos críticos** de la función. Si una función tiene un máximo o mínimo local en un punto P_0, que no está en la frontera de su dominio, entonces P_0 es un punto crítico.

Para una función de dos variables, también podemos ver que el vector gradiente debe ser cero o no estar definido en un máximo local si observamos su diagrama de contorno y una gráfica de sus vectores de gradiente (véase Figs. 14.3 y 14.4). Alrededor del máximo, todos los vectores apuntan hacia dentro, perpendicularmente a los contornos. En el máximo, el vector gradiente debe ser cero o no estar definido. Un argumento semejante demuestra que el gradiente debe ser cero en un mínimo local.

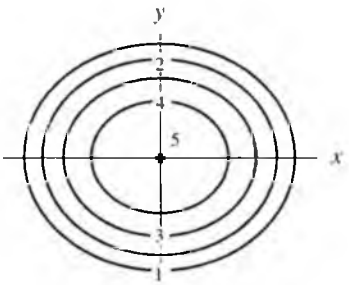


Figura 14.3 Diagrama de contorno alrededor de un máximo local de una función.

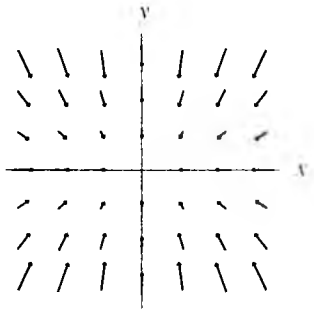


Figura 14.4 Gradientes apuntando hacia el máximo local de la función de la figura 14.3.

Cómo encontrar los puntos críticos

Para encontrar puntos críticos hacemos grad $f = f_x i + f_y j + f_z k = 0$, lo que significa hacer igual a cero todas las derivadas parciales de f. También debemos buscar los puntos donde una o más de las derivadas parciales sea indefinida.

Ejemplo 1 Encontrar y analizar los puntos críticos de $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5$.

Solución Para encontrar los puntos críticos, hacemos que sean iguales a cero ambas derivadas parciales:

$$f_x = 2x - 2 = 0$$
$$f_y = 2y - 4 = 0\,.$$

Al resolver estas ecuaciones se obtiene $x = 1$, $y = 2$. Por lo tanto, f tiene un solo punto crítico que es (1, 2). Para ver el comportamiento de f cerca de (1, 2), véanse los valores de la función de la tabla 14.1.

TABLA 14.1 *Valores de $f(x, y)$ cerca del punto* (1, 2)

y \ x	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
1.8	0.08	0.05	0.04	0.05	0.08
1.9	0.05	0.02	0.01	0.02	0.05
2.0	0.04	0.01	0.00	0.01	0.04
2.1	0.05	0.02	0.01	0.02	0.05
2.2	0.08	0.05	0.04	0.05	0.08

La tabla sugiere que la función tiene un valor mínimo local de 0 en (1, 2). Se puede verificar esto si se completa el cuadrado:

$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 = (x-1)^2 + (y-2)^2.$$

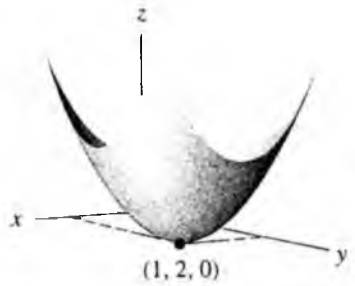


Figura 14.5 La gráfica de $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5$ con un mínimo local en el punto (1, 2).

La figura 14.5 muestra que la gráfica de f es un tazón parabólico con vértice en el punto (1, 2, 0). Es la misma forma que la gráfica $z = x^2 + y^2$ (Fig. 11.18 de la página 16), excepto que el vértice se ha desplazado (1, 2). Por lo tanto, el punto (1, 2) es un mínimo local de f (así como un mínimo global).

Ejemplo 2 Encontrar y analizar cualesquier puntos críticos de $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución Buscamos puntos donde grad $f = \vec{0}$ o sea indefinido. Las derivadas parciales están dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Estas ecuaciones nunca son cero ambas, pero ambas están indefinidas en $x = 0$, $y = 0$. Por lo tanto, (0, 0) es un punto crítico y un posible punto extremo. La gráfica de f (véase Fig. 14.6) es un cono, con vértice en (0, 0). En consecuencia, f tiene un máximo local y global en (0, 0).



Figura 14.6 Gráfica de $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

Ejemplo 3 Encontrar los extremos locales de la función $f(x, y) = 8y^3 + 12x^2 - 24xy$.

Solución Comenzamos por buscar puntos críticos:

$$f_x = 24x - 24y,$$
$$f_y = 24y^2 - 24x.$$

Al hacer iguales a cero estas expresiones resulta el sistema de ecuaciones

$$x = y, \qquad x = y^2,$$

que tiene dos soluciones, (0, 0) y (1, 1). ¿Son máximos, mínimos, o no son extremos? Véanse los contornos cerca de los puntos: la figura 14.7 muestra el diagrama de contorno de esta función. Observe que

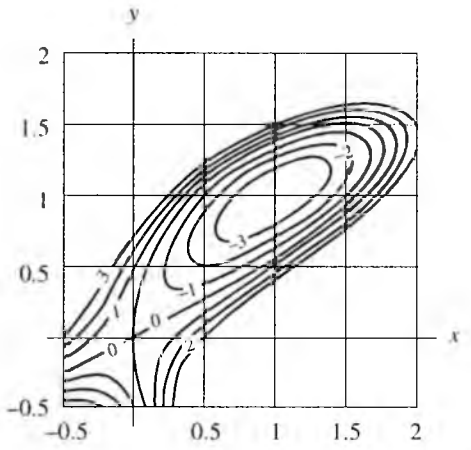


Figura 14.7 Diagrama de contorno de $f(x, y) = 8y^3 + 12x^2 - 24xy$ que muestra puntos críticos en (0, 0) y (1, 1)

$f(1, 1) = -4$ y que no hay otro contorno –4. Los contornos cerca de $P = (1, 1)$ tienen forma de óvalo e indican que f es creciente en valor sin importar en qué dirección nos alejamos de P. Esto sugiere que f tiene un mínimo local en el punto (1, 1).

Las curvas de nivel cerca de $Q = (0, 0)$ muestran un comportamiento muy diferente. Mientras que $f(0, 0) = 0$, vemos que f toma tanto valores positivos como negativos en puntos cercanos. Por lo tanto, el punto (0, 0) es un punto crítico que no es ni máximo local ni mínimo local.

Puntos de silla de montar

El ejemplo anterior muestra que pueden presentarse puntos críticos en máximos o mínimos locales, o en puntos que no son ninguno de éstos, o sea, que el valor de la función es mayor en algunas direcciones y menor en otras. Hacemos la siguiente definición:

> Una función, f, tiene un **punto de silla de montar** en P_0 si P_0 es un punto crítico de f y dentro de cualquier distancia de P_0, no importa lo pequeña que sea, hay puntos, P_1 y P_2, con
>
> $$f(P_1) > f(P_0) \qquad \text{y} \qquad f(P_2) < f(P_0).$$

Por lo tanto, de la figura 14.7 vemos que la función $f(x, y) = 8y^3 + 12x^2 - 24xy$ del ejemplo 3 tiene un punto de silla de montar en el origen.

Para otro ejemplo veamos la gráfica de $g(x,y) = x^2 - y^2$ de la figura 14.8. El origen es un punto crítico y $g(0, 0) = 0$. Como hay valores positivos en el eje de las x y negativos en el de las y, el origen es un punto de silla de montar. Observe que la gráfica de g tiene ahí el aspecto de una silla de montar.

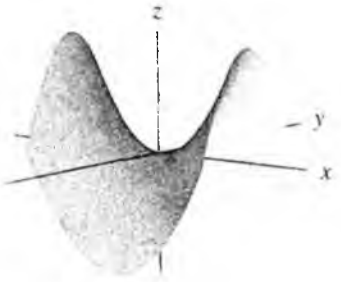


Figura 14.8 Gráfica de $g\,(x,y) = x^2 - y^2$ que muestra un punto de silla de montar en el origen

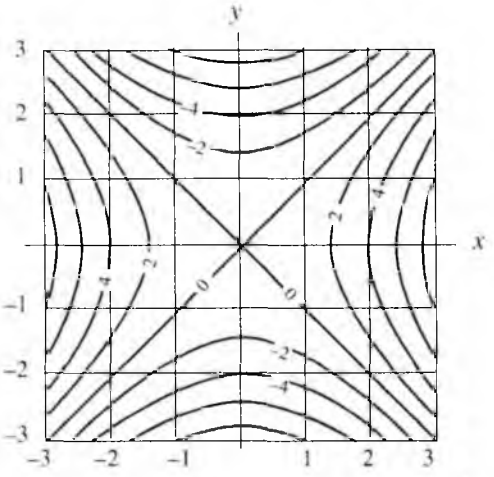


Figura 14.9 Contornos de $g\,(x,y) = x^2 - y^2$, mostrando un punto de silla de montar en el origen

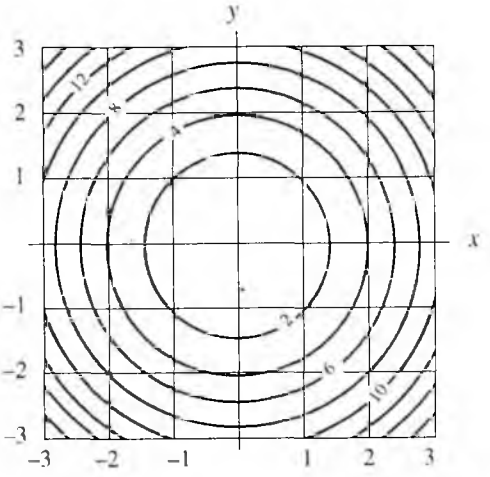


Figura 14.10 Contornos de $h\,(x,y) = x^2 + y^2$, mostrando un mínimo local en el origen

La figura 14.9 muestra las curvas de nivel de g cerca del punto de silla de montar (0, 0); son hipérbolas que ilustran valores tanto positivos como negativos de g cerca de (0, 0). Contraste esto con el aspecto de las curvas de nivel cerca de un máximo o mínimo local, por ejemplo, la figura 14.10 que muestra $h\,(x, y) = x^2 + y^2$ cerca de (0, 0).

Un punto crítico ¿es un máximo local, mínimo local o punto de silla de montar?

Podemos ver si un punto crítico de una función, f, es máximo, mínimo o punto de silla de montar al ver el diagrama de contorno. También existe un método analítico sencillo para hacer la distinción cuando en el punto crítico las derivadas parciales de f son cero. Cerca de la mayoría de los puntos críticos, una función tiene el mismo comportamiento que su aproximación cuadrática de Taylor alrededor de ese punto, así que debemos entender primero las funciones cuadráticas.

Funciones cuadráticas de la forma $f\,(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$

Comenzamos por ver lo que sucede en puntos críticos de funciones cuadráticas de la forma $f\,(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, donde a, b y c son constantes.

Ejemplo 4 Encontrar y analizar los extremos locales de la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$

Solución Para encontrar puntos críticos hacemos

$$f_x = 2x + y = 0,$$
$$f_y = x + 2y = 0.$$

El único punto crítico es (0, 0), y el valor de la función ahí es $f(0, 0) = 0$. Si f es siempre positiva o cero cerca de (0, 0), entonces (0, 0) es un mínimo local; si f es siempre negativa o cero cerca de (0, 0), es un máximo local; si f toma valores positivos y negativos es un punto de silla de montar. La gráfica de la figura 14.11 sugiere que (0, 0) es un mínimo local.

¿Cómo podemos estar seguros de que (0, 0) es un mínimo local? La forma algebraica para determinar si una función cuadrática es siempre negativa, siempre positiva, o asume valores de ambos signos, es completar el cuadrado. Al escribir

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

se demuestra que $f(x, y)$ es una suma de dos cuadrados, así que debe ser siempre mayor o igual que cero. Por lo tanto, el punto crítico es un mínimo tanto local como global.

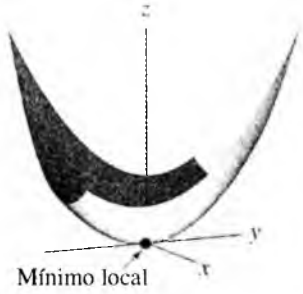


Figura 14.11 Gráfica de $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$ que alcanza un mínimo local en el origen.

Forma de la gráfica de $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$

En general, una función de la forma $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ tiene un punto crítico en (0, 0). Para analizar esta gráfica completamos el cuadrado. Si suponemos que $a \neq 0$, escribimos

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)y^2\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)y^2\right]. \end{aligned}$$

La forma de la gráfica de f depende de si el coeficiente de y^2 es positivo, negativo o cero. El signo de $D = 4ac - b^2$, llamado *discriminante*, determina el signo del coeficiente de y^2.

- Si $D > 0$, entonces la expresión dentro de los corchetes es positiva o cero, así que la función tiene un máximo local o un mínimo local.
  - Si $a > 0$, la función tiene un mínimo local, porque la gráfica es un paraboloide que se abre hacia arriba, como $z = x^2 + y^2$. (Véase Fig. 14.12).
  - Si $a < 0$, la función tiene un máximo local porque la gráfica es un paraboloide hacia abajo, como $z = -x^2 - y^2$. (Véase Fig. 14.13).
- Si $D < 0$, entonces la función crece en algunas direcciones y decrece en otras, como $z = x^2 - y^2$. Por lo tanto, tiene un punto de silla de montar (véase Fig. 14.14).
- Si $D = 0$, entonces la función cuadrática es $a\,(x + by/2a)^2$, cuya gráfica es un cilindro parabólico (véase Fig. 14.15).



Figura 14.12 Cóncava hacia arriba: $D > 0$ y $a > 0$



Figura 14.13 Cóncava hacia abajo: $D > 0$ y $a < 0$



Figura 14.14 Forma de silla de montar: $D < 0$



Figura 14.15 Cilindro parabólico: $D = 0$

De manera más general, la gráfica de $g\,(x,y) = a\,(x - x_0)^2 + b\,(x - x_0)\,(y - y_0) + c\,(y - y_0)^2$ tiene exactamente la misma forma que la gráfica de $f\,(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, excepto que el punto crítico está en (x_0, y_0) y no en (0, 0). Por lo tanto, la prueba del discriminante arroja los mismos resultados para el comportamiento de g cerca de (x_0, y_0)[1].

Clasificación de los puntos críticos de una función

Supongamos ahora que f es cualquier función con $f\,(0, 0) = 0$ y grad $f\,(0, 0) = \mathbf{0}$ Recuerde, de la página 161, que f se puede calcular (o aproximar) por su polinomio cuadrático de Taylor cerca de (0, 0):

$$f\,(x, y) \approx f\,(0, 0) + f_x\,(0, 0)x + f_y\,(0, 0)y + \frac{1}{2} f_{xx}\,(0, 0)x^2 + f_{xy}\,(0, 0)xy + \frac{1}{2} f_{yy}\,(0, 0)y^2.$$

Como $f\,(0, 0) = 0$ y $f_x\,(0, 0) = f_y\,(0, 0) = 0$, el polinomio cuadrático se simplifica a

$$f\,(x, y) \approx \frac{1}{2} f_{xx}\,(0, 0)x^2 + f_{xy}\,(0, 0)xy + \frac{1}{2} f_{yy}\,(0, 0)y^2.$$

El discriminante es

$$D = 4ac - b^2 = 4\left(\frac{1}{2} f_{xx}(0, 0)\right)\left(\frac{1}{2} f_{yy}\,(0, 0)\right) - f_{xy}\,(0, 0)\,y^2.$$

que se simplifica a

$$D = f_{xx}\,(0,0)\,f_{yy}\,(0,0) - (f_{xy}\,(0,0))^2.$$

Existe una fórmula similar para D si $f\,(0,0) \neq 0$ o si el punto crítico está en (x_0, y_0). Por lo tanto, obtenemos la prueba siguiente:

[1] Supusimos que $a \neq 0$. Si $a = 0$ y $c \neq 0$, el argumento no se modifica. Si $a = 0$ y $c = 0$, entonces $f\,(x, y) = bxy$, que es una silla de montar.

Prueba de la segunda derivada para funciones de dos variables

Supongamos que (x_0, y_0) es un punto donde grad $f(x_0, y_0) = \vec{0}$. Sea

$$D = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2.$$

- Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en (x_0, y_0).
- Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, entonces f tiene un máximo local en (x_0, y_0).
- Si $D < 0$, entonces f tiene un punto de silla de montar en (x_0, y_0).
- Si $D = 0$, cualquier cosa puede suceder: f puede tener un máximo local, o un mínimo local o un punto de silla de montar en (x_0, y_0).

Ejemplo 5 Encontrar los puntos máximos, mínimos y de silla de montar de la función

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + 3y^3 + 9y^2 - 3xy + 9y - 9x.$$

Solución Las derivadas parciales de f son $f_x = x - 3y - 9$ y $f_x = 9y^2 - 18y - 3x + 9$. Las ecuaciones $f_x = 0$ y $f_x = 0$ dan

$$9y^2 + 18y + 9 - 3x = 0,$$
$$x - 3y - 9 = 0.$$

Al eliminar la x resulta

$$9y^2 + 9y - 18 = 0,$$

que tiene soluciones $y = -2$ y $y = 1$. Encontramos los valores correspondientes de x, así que los puntos críticos de f son $(3, -2)$ y $(12, 1)$. El discriminante es

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = (1)(18y + 18) - (-3)^2 = 18y + 9.$$

Como $D(3, -2) = -36 + 9 < 0$, sabemos que $(3, -2)$ es un punto de silla de montar de f. Como $D(12, 1) = 18 + 9 > 0$ y $f_{xx}(12, 1) = 1 > 0$, sabemos que $(12, 1)$ es un mínimo local de f.

La prueba de la segunda derivada no proporciona ninguna información en el caso en que $D = 0$, pero como se ilustra en el siguiente ejemplo, todavía se pueden clasificar los puntos críticos al observar la gráfica de la función.

Ejemplo 6 Clasificar el punto crítico $(0, 0)$ de las funciones $f(x, y) = x^4 + y^4$, y $g(x, y) = -x^4 - y^4$, y $h(x, y) = x^4 - y^4$.

Solución Cada una de estas funciones tiene un punto crítico en $(0, 0)$, pero todas las segundas derivadas parciales son 0 ahí, por lo que cada función tiene $D = 0$. Cerca del origen, las gráficas de f, g y h se parecen a las superficies de las figuras 14.12 a la 14.14, respectivamente, y por eso vemos que f tiene un mínimo en $(0, 0)$, g un máximo en $(0, 0)$, y h tiene un punto de silla de montar en $(0, 0)$.

Podemos obtener los mismos resultados algebraicamente. Como $f(0, 0)$ y $f(x, y) > 0$ en el resto de su dominio, f debe tener un mínimo en el origen. Como $g(0, 0) = 0$ y $g(x, y) < 0$ en el resto de su dominio, g tiene un máximo en el origen. Por último, h tiene un punto de silla de montar en el origen porque $h(0, 0) = 0$ y $h(x, y) > 0$ en el eje de las x y $h(x, y) < 0$ en el de las y.

Problemas para la sección 14.1

1. Considere los puntos marcados A, B y C en la gráfica de contorno de la figura 14.16. De éstos, ¿cuáles parecen ser los puntos críticos? Clasifique los que sean puntos críticos.

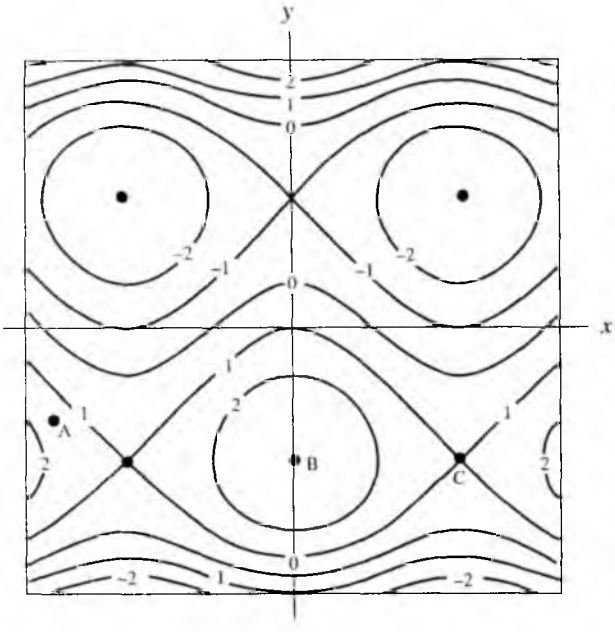


Figura 14.16

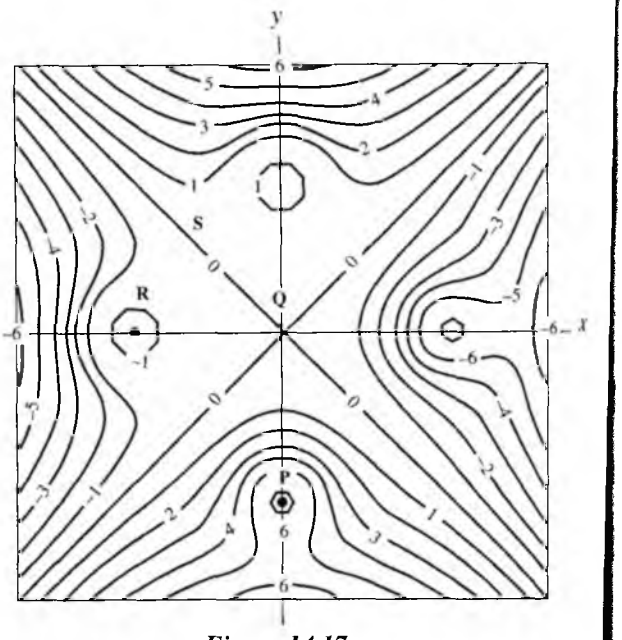


Figura 14.17

Para los problemas 2, 3 y 4 utilice la figura 14.17, que muestra curvas de nivel de alguna función $f(x, y)$.

2. Diga si considera que cada uno de los puntos siguientes es un máximo local, mínimo local, punto de silla de montar o ninguno de éstos.

   (a) P (b) Q (c) R (d) S

3. Trace la dirección de ∇f en varios puntos alrededor de P, Q y R.

4. Indique con flechas la dirección de ∇f en los puntos donde $\|\nabla f\|$ es máxima.

Para los problemas del 5 al 11 encuentre los puntos máximos locales, mínimos locales y de silla de montar de la función dada.

5. $f(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$
6. $f(x, y) = x^3 + e^{-y^2}$
7. $f(x, y) = (x + y)(xy + 1)$
8. $f(x, y) = 8xy - \frac{1}{4}(x + y)^4$
9. $E(x, y) = 1 - \cos x + y^2/2$
10. $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
11. $P(x, y) = 400 - 3x^2 - 4x + 2xy - 5y^2 + 48y$
12. Suponga que $f(x, y) = A - (x^2 + Bx + y^2 + Cy)$. ¿Qué valores de A, B y C dan a $f(x, y)$ un valor máximo local de 15 en el punto $(-2, 1)$?

14.2 EX

Cada función de los problemas 13, 14 y 15 tiene un punto crítico en (0, 0). ¿Qué clase de punto crítico es?

13. $f(x, y) = x^6 + y^6$ 14. $g(x, y) = x^4 + y^3$ 15. $h(x, y) = \cos x \cos y$

16. a) Encuentre todos los puntos críticos de

$$f(x, y) = e^x (1 - \cos y).$$

b) Los puntos críticos, ¿son máximos locales, mínimos locales o de silla de montar?

17. Suponga que $f_x = f_y = 0$ en (1, 3) y $f_{xx} > 0, f_{yy} = 0, f_{xy} = 0$.

a) ¿A qué conclusión puede llegarse acerca del comportamiento de la función cerca del punto (1, 3)?
b) Trace un posible diagrama de contorno.

18. Suponga que, para alguna función $f(x, y)$ en el punto (a, b), tenemos $f_x = f_y = 0$, $f_{xx} > 0$, $f_{yy} = 0$, $f_{xy} > 0$.

a) ¿A qué conclusión puede llegarse acerca de la forma de la gráfica de f cerca del punto (a, b)?
b) Trace un posible diagrama de contorno.

19. El comportamiento de una función puede ser complicado cerca de un punto crítico donde $D = 0$. Supongamos que

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2.$$

Demuestre que hay un punto crítico en (0, 0) y que $D = 0$ ahí. En seguida demuestre que el contorno para $f(x, y) = 0$ consta de tres rectas que se cortan en el origen y que estas rectas dividen el plano en seis regiones alrededor del origen, donde f pasa de positiva a negativa. Trace un mapa de contorno para f cerca de (0, 0). La gráfica de esta función recibe el nombre de *silla de montar para mono*.

20. Dibuje en una computadora los diagramas de contorno para la familia de funciones

$$f(x, y) = k(x^2 + y^2) - 2xy$$

para $k = -2, -1, 0, 1, 2$. Utilice estas cifras para clasificar el punto crítico en (0, 0) para cada valor de k. Explique sus observaciones mediante el uso del discriminante, D.

14.2 EXTREMOS GLOBALES: OPTIMIZACIÓN NO RESTRINGIDA

Suponga que deseamos encontrar los puntos más alto y más bajo en alguna región del país. Primero que todo, es importante saber si se trata de una región, de todo Estados Unidos, de un estado, o de un condado.

Para llevar P al máximo, calculamos sus derivadas parciales y las hacemos iguales a 0:

$$\frac{\partial P}{\partial q_1} = 598.8 - 0.6q_1 - 0.2q_2 = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial q_2} = 498.5 - 0.4q_2 - 0.2q_1 = 0.$$

Como grad P está definido en todas partes, los únicos puntos críticos de P son aquellos donde $P = 0$. En consecuencia, al despejar q_1, q_2, encontramos que

$$q_1 = 699.1 \quad \text{y} \quad q_2 = 896.7.$$

Los precios correspondientes son

$$p_1 = 390.27 \quad \text{y} \quad p_2 = 320.66.$$

Para ver si hemos encontrado un máximo o no, calculamos las segundas derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial q_1^2} = -0.6, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial q_2^2} = -0.4, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_2} = -0.2,$$

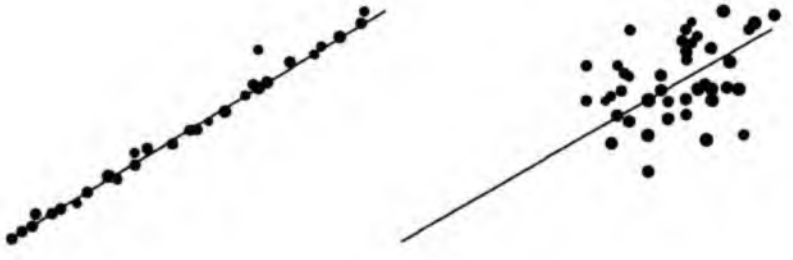
así que,

$$D = \frac{\partial^2 P}{\partial q_1^2}\,\frac{\partial^2 P}{\partial q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^2 = (-0.6)\,(-0.4) - (-0.2)^2 = 0.2.$$

Por lo tanto, hemos encontrado un máximo local. La gráfica de P es un paraboloide vuelto hacia abajo y por ello (699.1, 896.7) es en efecto un máximo global. La compañía debe producir 699.1 unidades del primer artículo a US $390.27 por unidad, y 896.7 unidades del segundo a un precio de US $320.66 por unidad. La utilidad máxima $P(699.1, 896.7) \approx \$433\,000$.

Ajuste de una recta a los datos

Una aplicación importante de optimización es al problema de ajustar la "mejor" recta a un grupo de datos. Supongamos que la información se grafica en el plano. Medimos la distancia desde una recta a los puntos de información al sumar los cuadrados de las distancias verticales desde cada punto a la recta. Cuanto menor sea esta suma de cuadrados, mejor se ajustará la recta a la información. La recta con la suma mínima de distancias al cuadrado recibe el nombre de *recta de mínimos cuadrados*, o bien *recta de regresión*. Si la información es casi lineal, la recta de mínimos cuadrados será un buen ajuste; de otra manera, puede no serlo (véase Fig. 14.19).



Información casi lineal: buen ajuste

Información no muy lineal: la recta no ajusta bien

Figura 14.19 Ajuste de rectas a puntos de datos.

Ejemplo 2 Encontrar una recta de mínimos cuadrados para los siguientes puntos de información: (1, 1), (2, 1) y (3, 3).

Solución Supongamos que la recta tiene ecuación $y = b + mx$. Si encontramos b y m entonces hemos encontrado la recta. Por lo tanto, para este problema, b y m son las dos variables. Deseamos reducir al mínimo la función $f(b, m)$ que indica la suma de los cuadrados de las tres distancias verticales desde los puntos a la recta en la figura 14.20.

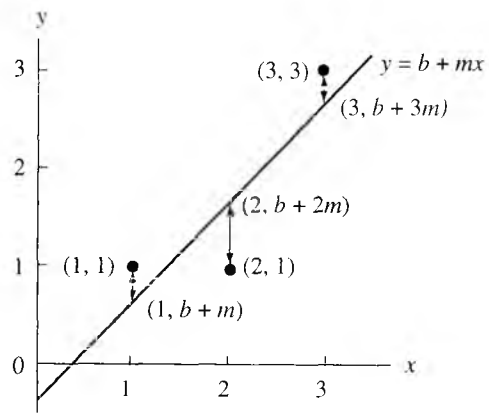


Figura 14.20 La recta de mínimos cuadrados reduce al mínimo la suma de las cuadrados de estas distancias verticales.

La distancia vertical desde el punto (1, 1) a la recta es la diferencia en las coordenadas y: $1 - (b + m)$; de igual manera para los otros puntos. Por lo tanto, la suma de cuadrados es

$$f(b, m) = (1 - (b + m))^2 + (1 - (b + 2m))^2 + (3 - (b + 3m))^2.$$

Para reducir f al mínimo buscamos puntos críticos. Primero diferenciamos f con respecto a b:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial b} &= -2(1 - (b + m)) - 2(1 - (b + 2m)) - 2(3 - (b + 3m)) \\ &= -2 + 2b + 2m - 2 + 2b + 4m - 6 + 2b + 6m \\ &= -10 + 6b + 12m.\end{aligned}$$

Ahora diferenciamos con respecto a m:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial m} &= 2(1 - (b + m))(-1) + 2(1 - (b + 2m))(-2) + 2(3 - (b + 3m))(-3) \\ &= -2 + 2b + 2m - 4 + 4b + 8m - 18 + 6b + 18m \\ &= -24 + 12b + 28m.\end{aligned}$$

Las ecuaciones $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial m} = 0$ dan un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{aligned}-10 + 6b + 12m &= 0, \\ -24 + 12b + 28m &= 0.\end{aligned}$$

La solución a este par de ecuaciones es el punto crítico $b = -1/3$ y $m = 1$. Como

$$D = f_{bb}f_{mm} - (f_{mb})^2 = (6)(28) - 12^2 = 24 \quad \text{y} \quad f_{bb} = 6 > 0,$$

hemos encontrado un mínimo local. La gráfica de $f(b, m)$ es un tazón parabólico, así que el mínimo local es el mínimo global de f. En consecuencia, la recta de mínimos cuadrados es

$$y = x - \frac{1}{3}.$$

Como prueba, observe que la recta $y = x$ pasa por los puntos (1, 1) y (3, 3). Es razonable que al introducir el punto (2, 1) desplace hacia abajo la intersección de y de 0 a $-1/3$.

Las fórmulas generales para la pendiente y la ordenada al origen de una recta de mínimos cuadrados están en el problema 18 al final de esta sección. Muchas calculadoras tienen ya integradas estas fórmulas, de modo que cuando se introducen los datos indican los valores de b y m. Al mismo tiempo, se obtiene el *coeficiente de correlación*, que mide qué tanto se ajustan los datos a la recta de mínimos cuadrados.

Búsqueda de gradiente para encontrar extremos locales

Hasta ahora hemos buscado los valores donde una función $f(x, y)$ alcanza su máximo o su mínimo, buscando primero los puntos críticos de f. Encontrar los puntos críticos significa resolver la ecuación grad $f = \vec{0}$, lo que a su vez supone resolver un par de ecuaciones simultáneas para x y y:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Sin embargo, resolver tales ecuaciones puede ser muy difícil. En la práctica, la mayoría de los problemas de optimización se resuelven por métodos numéricos, por ejemplo el de la *búsqueda de gradiente*. Este método se puede explicar por analogía con un montañista que quiere llevar al máximo su altitud buscando la cima de la montaña más alta. Todo lo que debe que hacer es continuar subiendo y, finalmente, llegará a la cima de alguna montaña. Si comienza cerca de la más alta, esa es probablemente la montaña que conquistará; si no, quizá suba a una más baja y terminará en un máximo local más que en uno global.

El método de la búsqueda de gradiente se ilustra en el siguiente ejemplo. Es un problema de minimización, así que imaginemos un escalador que, caminando siempre hacia abajo, busca el fondo del valle más bajo.

Ejemplo 3 Un camión va a descargar veinte metros cúbicos de grava en un relleno sanitario. La propietaria del camión piensa comprar una caja descubierta en la cual transportar la grava en varios viajes. El costo para ella es el costo de la caja más US $2 por viaje. La caja debe tener una altura de 0.5 m, pero ella puede escoger la longitud y el ancho. El costo de la caja será de $20/m^2 el frente y la parte trasera y $10/m^2 para el fondo y los costados. Observe el problema al que ella se enfrenta: una caja más pequeña es más barata, pero implica más viajes. ¿Cuáles deben ser las medidas de la caja que deba comprar para reducir al mínimo sus costos totales?[3]

[3] Adaptado de Claude McMillan Jr., *Mathematical Programming*, John Wiley & Sons, New York, 1978, 2da. ed. pp. 156-57.

Solución Primero obtenemos una expresión algebraica para los costos de la propietaria del camión. Sea la longitud de la caja de x metros y el ancho de y metros, y sea la altura de 0.5 m (véase Fig. 14.21).

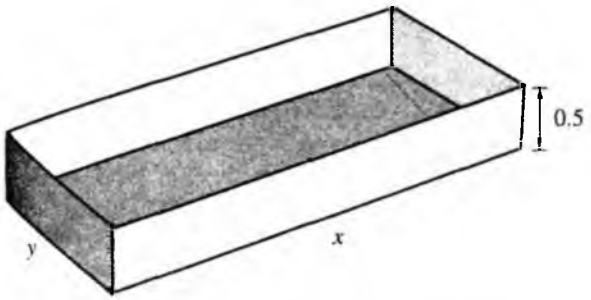


Figura 14.21 La caja para transportar grava.

TABLA 14.2 *Costo detallado del transportista*

20/(0.5 xy) a \$2/viaje	80/(xy)
2 extremos a \$20/m^2 × 0.5 y m^2	20y
2 lados a \$10/m^2 × 0.5 x m^2	10x
1 fondo a \$10/m^2 × xy m^2	10xy
Costo total	$f(x, y)$

El volumen de la caja es de $0.5xy$ m^3, así que la descarga de 20m^3 de grava requiere de $20/(0.5xy)$ viajes. El costo de la transportista se detalla en la tabla 14.2. El problema consiste en escoger x y y para reducir al mínimo el

$$\text{Costo total} = f(x, y) = \frac{80}{xy} + 20y + 10x + 10xy.$$

Escogemos un punto de partida (x_0, y_0) que puede no minimizar f pero que esperamos no esté demasiado lejos del punto mínimo. En este ejemplo comenzamos con $(x_0, y_0) = (5, 5)$, que definitivamente no es un punto crítico de f porque

$$\text{grad } f(5, 5) = 59.4\vec{i} + 69.4\vec{j} \neq \vec{0}.$$

Pensamos desplazarnos de (x_0, y_0) a un nuevo punto (x_1, y_1) de manera tal que f disminuya, esto es, $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0)$. Desplazarse en la dirección de gradiente de $f(x_0, y_0)$ hace aumentar f tan rápidamente como es posible, así que nos desplazamos en la dirección contraria, es decir $-\text{grad } f(x_0, y_0)$. Continuamos avanzando en esta dirección hasta que los valores de f empiecen a aumentar otra vez. Si nos desplazamos en forma paralela a $-\text{grad } f(x_0, y_0)$, nuestro desplazamiento desde el punto original es de la forma $-t \text{ grad } f(x_0, y_0)$, donde t es un escalar por determinarse. Como $\text{grad } f(x_0, y_0) = 59.4\vec{i} + 69.4\vec{j}$, las coordenadas de nuestro punto final son

$$(x_0 - 59.4t, y_0 - 69.4t).$$

Deseamos encontrar el valor mínimo de la función f a medida que t aumenta. La figura 14.22 indica la gráfica de

$$f((x_0, y_0) - t \text{ grad } f(x_0, y_0)) = f(5 - 59.4t, 5 - 69.4t)$$

para t positiva. Al hacer un acercamiento se ve que el mínimo local está en $t \approx 0.0554$. Por lo tanto, nos desplazamos al punto dado por

$$(x_1, y_1) = (5 - (59.4)(0.0554), 5 - (69.4)(0.0554)) \approx (1.71, 1.16).$$

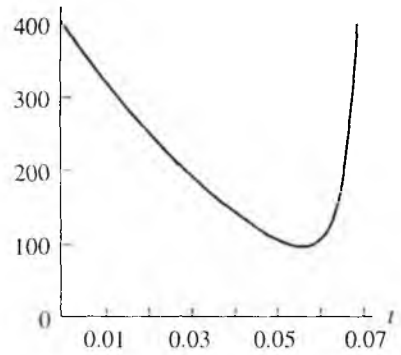


Figura 14.22 Primer paso: gráfica de $f((x_0, y_0) - t \operatorname{grad} f(x_0, y_0))$ que muestra mínimo local en $t \approx 0.0554$.

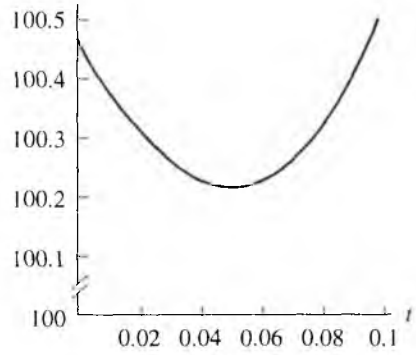


Figura 14.23 Segundo paso: gráfica de $f((x_1, y_1) - t \operatorname{grad} f(x_1, y_1))$ que muestra mínimo local en $t \approx 0.050$.

Observe que el costo en el punto inicial es $f(5, 5) = 403.2$ y el costo en el nuevo punto es $f(1.71, 1.16) = 100.47$, así que hemos reducido considerablemente el costo.

Se puede reducir aún más el costo si nos alejamos de (1.71, 1.16) en dirección contraria a $\operatorname{grad} f(1.71, 1.16) = -1.99\vec{i} + 2.33\vec{j}$. La figura 14.23 es la gráfica de

$$f((x_1, y_1) - t \operatorname{grad} f(x_1, y_1)) = f(1.71 + 1.99t, 1.16 - 2.33t)$$

que alcanza un mínimo local en $t \approx 0.050$. Por lo tanto, tomamos

$$(x_2, y_2) = (1.71 + (1.99)(0.050), 1.16 - (2.33)(0.050)) \approx (1.81, 1.04).$$

Observe que $f(1.81, 1.04) = 100.22$ en tanto que $f(1.71, 1.16) = 100.47$. El movimiento de (x_1, y_1) a (x_2, y_2) disminuyó el costo de f en una cantidad más bien pequeña, sólo US \$0.25. Por lo tanto, aun cuando no hemos alcanzado en realidad un mínimo, tenemos la impresión de que para propósitos prácticos estamos probablemente lo suficientemente cerca. La transportista redondeará cantidades y comprará una caja de dimensiones aproximadas de 1.8 m × 1 m × 0.5 m.

¿Cómo saber si una función tiene un máximo o mínimo global?

¿Bajo qué circunstancias una función de dos variables tiene un máximo o mínimo global? El siguiente ejemplo demuestra que una función puede tener un máximo global y un mínimo global en una región, o sólo uno de los dos, o ninguno.

Ejemplo 4 Investigar los máximos y mínimos globales de las siguientes funciones:

a) $h(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

b) $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5$ en el plano xy.

c) $g(x, y) = x^2 - y^2$ en el plano xy.

Solución

a) La gráfica de $h(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ es un paraboloide en forma de tazón con un mínimo global de 1 en (0, 0), y un máximo global de 2 en el borde de la región $x^2 + y^2 = 1$.

b) La gráfica de f de la figura 14.5 de la página 186 demuestra que f tiene un mínimo global en el punto (1, 2) y ningún máximo global (porque el valor de f aumenta sin límite conforme $x \to \infty$, $y \to \infty$.

c) La gráfica de g de la figura 14.8 de la página 188 demuestra que g no tiene máximo global porque $g(x, y) \to \infty$ conforme $x \to \infty$ si y es constante. De igual manera, g no tiene mínimo global porque $g(x, y) \to \infty$ conforme $x \to \infty$ si x es constante.

Hay, no obstante, condiciones que garantizan que una función tenga un máximo y mínimo globales. Para $h(x)$, una función de una variable, la función debe ser continua en un intervalo cerrado $a \le x \le b$. Si h es continua en un intervalo no cerrado, tal como $a \le x < b$ o $a < x < b$, o en un intervalo que no está acotado, tal como $a < x < \infty$, entonces h no necesariamente tiene un valor máximo o mínimo. ¿Cuál es la situación para funciones de dos variables? Resulta ser que algo semejante a lo anterior es válido para funciones continuas definidas en regiones que son cerradas y acotadas, análogas al intervalo cerrado y acotado $a \le x \le b$. En lenguaje práctico decimos

- Una **región cerrada** es aquella que contiene a su frontera;
- Una **región acotada** es aquella que no se extiende hasta el infinito en ninguna dirección.

Más precisas son las definiciones siguientes. Supongamos que R es una región en dos dimensiones. Un punto (x_0, y_0) es un *punto frontera* de R si, para toda $r > 0$, el disco $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$ con centro (x_0, y_0) y radio r contiene tanto puntos que están en R como puntos que no están en R. (Véase Fig. 14.24.) Un punto (x_0, y_0) puede ser un punto frontera de la región R sin pertenecer en realidad a R. Un punto (x_0, y_0) en R es un *punto interior* si no es un punto frontera; por lo tanto, para $r > 0$ suficientemente pequeña, el disco de radio r con centro en (x_0, y_0) está totalmente dentro de la región R. (Véase Fig. 14.25.) El conjunto de todos los puntos frontera es la *frontera de R* y el conjunto de todos los puntos interiores es el *interior de R*. La región R es *cerrada* si contiene a su frontera, en tanto que es *abierta* si todo punto en R es un punto interior.

Una región R en dos dimensiones es acotada si la distancia entre todo punto (x, y) en R y el origen es menor o igual a algún número constante K. Las regiones cerradas y acotadas en tres dimensiones se definen de la misma manera.

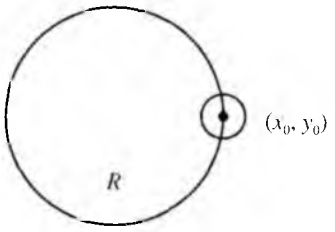


Figura 14.24 Punto de frontera (x_0, y_0) de R.

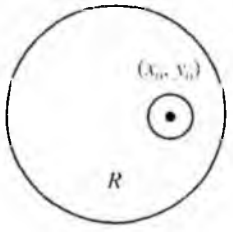


Figura 14.25 Punto interior (x_0, y_0) de R.

Ejemplo 5
a) El cuadrado $-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$ es cerrado y acotado.
b) El primer cuadrante $x \ge 0, y \ge 0$ es cerrado pero no acotado.
c) El disco $x^2 + y^2 < 1$ es abierto y acotado, pero no cerrado.
d) El semiplano $y > 0$ es abierto, pero no es cerrado ni acotado.

La razón por la que regiones cerradas y acotadas son útiles es el siguiente resultado[4]:

> Si f es una función continua en una región R cerrada y acotada, entonces f tiene un máximo global en algún punto (x_0, y_0) en R y un mínimo global en algún punto (x_1, y_1) en R.

El resultado también es válido para funciones de tres o más variables.

Si f no es continua o la región R no es cerrada y acotada, no hay seguridad de que f alcance un máximo global o mínimo global en R. En el ejemplo 4, la función g es continua, pero no alcanza un máximo o mínimo global en el plano, una región que es cerrada, pero no acotada. El siguiente ejemplo ilustra lo que puede fallar cuando la región es acotada, pero no cerrada.

Ejemplo 6 ¿La siguiente función tiene un máximo o mínimo global en la región R dada por $0 < x^2 + y^2 \leq 1$?

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Solución La región R es acotada, pero no es cerrada porque no contiene el punto frontera (0, 0). Vemos de la gráfica de $z = f(x, y)$ de la figura 14.26 que f tiene un mínimo global en el círculo $x^2 + y^2 = 1$. Sin embargo, $f(x, y) \to \infty$ a medida que $(x, y) \to (0, 0)$, así que f no tiene máximo global.

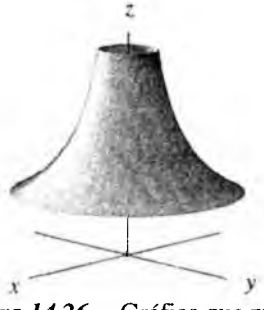


Figura 14.26 Gráfica que muestra que $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ no tiene máximo global en $0 < x^2 + y^2 \leq 1$.

Problemas para la sección 14.2

1. Observe el mapa climatológico de la figura 11.1 en la página 2 y encuentre las temperaturas máxima y mínima diarias en los estados de Mississippi, Alabama, Pennsylvania, Nueva York, California, Arizona y Massachusetts.
2. ¿Tiene máximos y mínimos globales la función $f(x, y) = -2x^2 - 7y^2$? Explique.
3. ¿Tiene máximos y mínimos globales la función $f(x, y) = x^2/2 + 3y^2 + 9y^2 - 3x + 9y - 9$? Explique.
4. De las siguientes funciones, ¿cuál tiene tanto máximo global como mínimo global? ¿Cuál no tiene ninguno?

$$f(x, y) = 5 + x^2 - 2y^2, \quad g(x, y) = x^2y^2, \quad h(x, y) = x^3 + y^3.$$

[4] Para una demostración, véase W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 2a. ed., p. 89 (New York: McGraw-Hill, 1976).

En los problemas 5, 6 y 7 encuentre el máximo y mínimo globales de la función dada sobre el cuadrado $-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$, y diga si se presenta en la frontera del cuadrado. (Sugerencia: examine la gráfica de la función).

5. $z = x^2 + y^2$ 6. $z = x^2 - y^2$ 7. $z = -x^2 - y^2$

8. La cantidad de un producto demandado por consumidores es una función de su precio. La cantidad de un producto demandado también puede depender del precio de otros productos. Por ejemplo, el precio del café afecta la demanda de té; el precio de la gasolina afecta la demanda de automóviles. Suponga que las cantidades demandadas, q_1 y q_2, de dos productos dependen de los precios, p_1 y p_2, de la siguiente manera

$$q_1 = 150 - 2p_1 - p_2$$
$$q_2 = 200 - p_1 - 3p_2.$$

   a) ¿Qué indica el hecho de que los coeficientes de p_1 y p_2 sean negativos? Dé un ejemplo de dos productos que pudieran estar relacionados de este modo.
   b) Suponga que un fabricante vende estos dos productos. ¿Cómo debe determinar los precios el fabricante para obtener el máximo ingreso posible? ¿Cuál es el máximo ingreso posible?

9. Una compañía opera dos plantas que fabrican el mismo artículo y cuyas funciones de costo total son

$$C_1 = 8.5 + 0.03q_1^2 \quad \text{y} \quad C_2 = 5.2 + 0.04q_2^2,$$

donde q_1 y q_2 son las cantidades producidas por cada planta. La cantidad demandada total, $q = q_1 + q_2$, está relacionada con el precio, p, por

$$p = 60 - 0.04q.$$

¿Cuánto debe producir cada planta para llevar al máximo las utilidades de la compañía?[5]

10. Suponga que se fabrican dos productos en cantidades q_1 y q_2 y se venden a precios de p_1 y p_2, respectivamente, y que el costo de producirlos está dado por

$$C = 2q_1^2 + 2q_2^2 + 10.$$

   a) Encuentre la utilidad máxima posible, suponiendo que los precios son fijos.
   b) Encuentre la rapidez de cambio de la utilidad máxima a medida que aumenta p_1.

11. Un proyectil tiene un dispositivo de control remoto que es sensible a la temperatura y a la humedad. Si t es la temperatura en °C y h es el porcentaje de humedad, el alcance sobre el cual se puede controlar el proyectil está dado por:

$$\text{Alcance en km} = 27{,}800 - 5t^2 - 6ht - 3h^2 + 400t + 300h,$$

¿Cuáles son las condiciones atmosféricas óptimas para controlar el proyectil?

12. Algunos artículos se venden a precios diferentes a diferentes grupos de personas. Por ejemplo, a veces hay descuentos para personas mayores o para niños. La razón de esto es que estos grupos pueden ser más sensibles a los precios, así que un descuento tendrá gran impacto en sus decisiones de compra. El vendedor se enfrenta a un problema de optimización: ¿Qué tan grande debe ser un descuento para llevar al máximo las utilidades?

[5] Adaptado de M. Rosser, *Basic Mathematics for Economists*, Routledge, Nueva York, 1993, p. 318.

Un teatro puede vender q_c boletos para niños y q_a para adultos a precios p_c y p_a, de acuerdo con las siguientes funciones de demanda:

$$q_c = rp_c^{-4} \quad \text{y} \quad q_a = sp_a^{-2},$$

y tiene costos de operación proporcionales al número total de boletos vendidos. ¿Cuál debe ser el precio relativo para los boletos de niños y de adultos?

13. Demuestre analíticamente que la función $f(x, y)$ del ejemplo 3 tiene un mínimo local en (2, 1).

14. Diseñe una caja rectangular de envase para leche, de ancho w, longitud l y altura h que contenga 512 cm^3 de leche. Los lados de la caja cuestan 1 centavos/cm^2 y la tapa y el fondo cuestan 2 centavos/cm^2. Encuentre las dimensiones de la caja que reduzcan al mínimo el costo total de materiales empleados.

15. El reglamento de una aerolínea internacional estipula que cada pasajero puede llevar una maleta para trajes de dimensiones tales que la suma de ancho, largo y alto sea menor o igual a 135 cm. Encuentre las dimensiones de la maleta para trajes de máximo volumen que un pasajero pueda llevar según este reglamento.

16. Una compañía fabrica un producto que demanda capital y mano de obra para producirlo. La cantidad, Q, del producto fabricado está dada por la función de producción de Cobb-Douglas

$$Q = AK^aL^b,$$

donde K es la cantidad de capital, L es la cantidad de mano de obra empleada y A, a y b son constantes positivas con $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$. Suponga que una unidad de capital cuesta \$$k$ y una unidad de mano de obra cuesta \$$l$. El precio del producto se determina en \$$p$ por unidad.

a) Si $a + b < 1$, ¿cuánto capital y mano de obra debe emplear la compañía para llevar al máximo sus utilidades?
b) ¿Hay una utilidad máxima en el caso de $a + b = 1$? Y ¿qué pasa si $a + b \geq 1$? Explique.

[Nota: En la página 29 se incluye un análisis de la función de producción de Cobb-Douglas. Los tres casos considerados antes, es decir, $a + b < 1$, $a + b = 1$ y $a + b > 1$ son, respectivamente, los casos de *rendimientos decrecientes a escala, rendimientos constantes a escala* y *rendimientos crecientes a escala.*]

17. Calcule la recta de regresión para los puntos (–1, 2), (0, –1), (1, 1) usando mínimos cuadrados.

18. En este problema derivaremos las fórmulas generales para la pendiente y la ordenada al origen de una recta de mínimos cuadrados. Suponga que tenemos n datos (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots$, (x_n, y_n). Sea $y = b + mx$ la ecuación de la recta de mínimos cuadrados.

a) Para cada punto (x_i, y_i), demuestre que el punto correspondiente directamente arriba o abajo de dicho punto, sobre la recta de mínimos cuadrados, tiene coordenada y de $b + mx_i$.
b) Para cada punto (x_i, y_i), demuestre que el cuadrado de la distancia vertical desde el punto al punto encontrado en el inciso a es $(y_i - (b + mx_i))^2$.
c) Forme la función $f(b, m)$ que es la suma de los cuadrados de todas las distancias n encontradas en el inciso b. Es decir,

$$f(b, m) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (b + mx_i))^2.$$

Demuestre que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial b}$ y $\frac{\partial f}{\partial m}$ están dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - (b + mx_i)).$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial m} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - (b + mx_i)) \cdot x_i.$$

d) Demuestre que las ecuaciones de los puntos críticos $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial m} = 0$, resultan en un par de ecuaciones lineales simultáneas en b y m:

$$nb + (\sum x_i)m = \sum y_i$$
$$(\sum x_i)b + \left(\sum x_i^2\right)m = \sum x_i y_i$$

e) De las ecuaciones del inciso d, despeje b y m y obtenga

$$b = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \Big/ \left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)$$

$$m = \left(n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i\right) \Big/ \left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)$$

f) Aplique estas fórmulas a los puntos (1, 1), (2, 1), (3, 3) para verificar que se obtiene el mismo resultado que en el ejemplo 2.

Cuando los datos no son lineales, a veces pueden transformarse de manera que parezcan más lineales. Por ejemplo, suponga que nuestra expectativa es que los puntos (x, y) estén aproximadamente en una curva exponencial, tal como

$$y = Ce^{ax},$$

donde a y C son constantes. Al tomar el logaritmo natural de ambos lados, encontramos que $\ln y$ es una función lineal de x.

$$\ln y = ax + \ln C.$$

Para encontrar a y C, usamos mínimos cuadrados para ajustar $\ln y$ *versus* x. Utilice este método en los problemas 19 y 20.

19. La población de Estados Unidos era de más o menos 180 millones en 1960, aumentó a 206 millones en 1970 y a 226 millones en 1980.

    a) Con base en esta información y suponiendo que la población crecía a una tasa exponencial, utilice el método de mínimos cuadrados para estimar la población en 1990.
    b) De acuerdo con el censo nacional, la población de 1990 fue de 249 millones. ¿Qué indica esto acerca de la hipótesis de crecimiento exponencial?
    c) Pronostique la población para el año 2010.

20. La información de la Tabla 14.3 muestra el costo de una estampilla de primera clase en Estados Unidos en los últimos 70 años.

TABLA 14.3 *Costo de una estampilla de primera clase*

Año	1920	1932	1958	1963	1968	1971	1974
Precio	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.08	0.10
Año	1975	1978	1981	1985	1988	1991	1995
Precio	0.13	0.15	0.20	0.22	0.25	0.29	0.32

a) Encuentre la recta de mejor ajuste que pasa por los datos de esta información. Mediante esta recta, pronostique el costo de una estampilla para el año 2010.
b) Grafique los puntos. ¿Parece lineal?
c) Grafique el año contra el logaritmo natural del precio: ¿Parece lineal? Si es lineal, ¿qué indica acerca del precio de una estampilla como función del tiempo? Encuentre la recta de mejor ajuste que pasa por estos puntos de información, y utilice su repuesta para pronosticar otra vez el costo de una estampilla para el año 2010.

21. Deseamos encontrar el valor mínimo de

$$f(x, y) = (x + 1)^4 + (y - 1)^4 + \frac{1}{x^2y^2 + 1}.$$

a) Grafique con la ayuda de una computadora el diagrama de contorno para f.
b) Encuentre un mínimo para f usando el método de búsqueda de gradiente.

22. El gobierno planea construir una tubería que bombeará agua de una presa a un estanque, como en la figura 14.27. El costo, C, (en millones de dólares) dependerá del diámetro, d, del tubo (en metros) y del número, n, de estaciones de bombeo, según la fórmula siguiente:[6]

$$C = 0.15n + 3\left(\frac{4d}{5}\right)^{-4.87} + \left(\frac{4d}{5}\right)^{1.8} + 3\left(\frac{4d}{5}\right)^{1.8} n^{-1}.$$

Por el método de búsqueda de gradiente, encuentre el número óptimo de estaciones de bombeo y diámetro de la tubería.

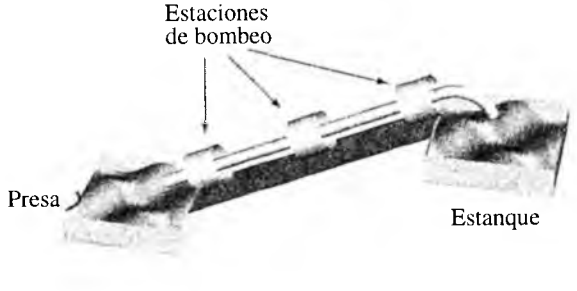


Figura 14.27

[6] Tomado de Douglass J. Wilde, *Globally Optimal Design*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

23. Considere la función dada por $f(x, y) = x^2 (y + 1)^3 + y^2$. Demuestre que f tiene sólo un punto crítico, a saber (0, 0), y que este punto es un mínimo local, pero no un mínimo global. Compare este resultado con el caso de una función con un solo mínimo local en cálculo de una variable.

14.3 OPTIMIZACIÓN RESTRINGIDA: MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Muchos, quizá la mayoría, de los problemas reales de optimización están restringidos por circunstancias externas. Por ejemplo, una ciudad que desea establecer un sistema público de transporte tiene sólo un número limitado de dólares de impuestos para invertir en el proyecto. En esta sección veremos cómo encontrar un valor óptimo con tales restricciones.

Método gráfico: maximizar la producción sujeta a una restricción de presupuesto

Supongamos que deseamos llevar al máximo la producción de una compañía con una restricción de presupuesto. Supongamos que la producción, f, es una función de dos variables, x y y, que son cantidades de dos materias primas, y que

$$f(x, y) = x^{2/3} y^{1/3}.$$

Si x y y se compran a precios de p_1 y p_2 miles de dólares por unidad, ¿cuál es la producción máxima f que se puede obtener con un presupuesto de c miles de dólares?

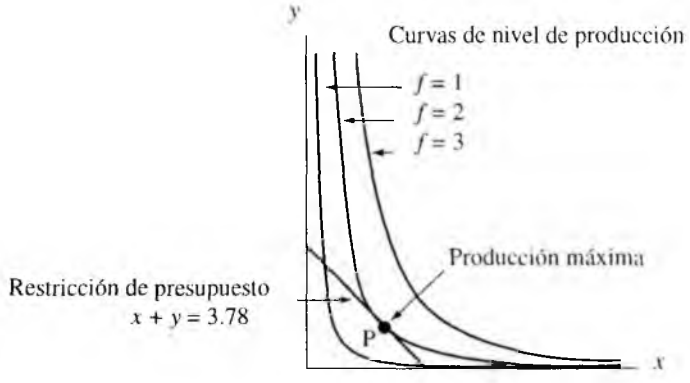


Figura 14.28 Punto óptimo, P, donde la restricción de presupuesto es tangente a una curva de nivel de la función de producción.

Para maximizar f sin tomar en cuenta el presupuesto, simplemente aumentamos x y y, pero la restricción de presupuesto nos impide aumentar x y y más allá de cierto punto. ¿En qué forma exactamente nos restringe el presupuesto? Con los precios de p_1 y p_2, la cantidad gastada en x es $p_1 x$ y la cantidad gastada en y es $p_2 y$, así que debemos tener

$$g(x, y) = p_1 x + p_2 y \leq c,$$

donde $g(x, y)$ es el costo total de las materias primas x y y, y c el presupuesto en miles de dólares.

Véase el caso cuando $p_1 = p_2 = 1$ y $c = 3.78$. Entonces,

$$x + y \leq 3.78$$

La figura 14.28 muestra algunos contornos de f y la restricción de presupuesto representada por la recta $x + y = 3.78$. Cualquier punto en la recta, o abajo de ella, representa un par de valores de x y y que podemos costear. Un punto en la recta gasta la totalidad del presupuesto, un punto abajo de la recta representa cantidades de x y y que podemos adquirir sin acabarnos el presupuesto. Cualquier punto arriba de la recta representa un par de valores que no podemos financiar. Para maximizar f, encontramos el punto que está en la curva de nivel con el máximo valor posible de f y que está *además* dentro del presupuesto. El punto debe estar en la restricción de presupuesto porque conviene gastar todo el dinero disponible. A menos que estemos en el punto donde la restricción de presupuesto sea tangente al contorno $f = 2$, podemos aumentar f si nos movemos a lo largo de la recta que representa la restricción de presupuesto de la figura 14.28. Por ejemplo, si estamos en la recta a la izquierda del punto de tangencia, avanzar a la derecha hará aumentar f; si estamos en la recta a la derecha del punto de tangencia, avanzar a la izquierda hará aumentar f. Por lo tanto, el valor máximo de f en la restricción de presupuesto se presenta en el punto donde la restricción de presupuesto es tangente al contorno $f = 2$.

Solución analítica: multiplicadores de Lagrange

Sabemos que la producción máxima se alcanza en el punto donde la restricción de presupuesto es tangente a la curva de nivel de la función de producción. El método de multiplicadores de Lagrange utiliza este hecho en forma algebraica. La figura 14.29 muestra que en el punto óptimo, P, el gradiente de f y la normal a la recta de presupuesto $g(x, y) = 3.78$ son paralelas. Por lo tanto, en P, grad f y grad g son paralelos, así que para algún escalar λ, llamado *multiplicador de Lagrange*

$$\text{grad } f = \lambda \text{ grad } g$$

Como $f = \left(\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3}\right)\vec{j}$ y grad $g = \vec{i} + \vec{j}$, tenemos, al igualar componentes,

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3} = \lambda \quad \text{y} \quad \frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3} = \lambda$$

Al eliminar λ se obtiene $\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3} = \frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3}$, que lleva a $2y = x$.

Como debemos satisfacer también la restricción $x + y = 3.78$, tenemos $x = 2.52$ y $y = 1.26$. Para estos valores,

$$f(2.52, 1.26) = (2.52)^{2/3}(1.26)^{1/3} \approx 2.$$

Por lo tanto, como antes, vemos que el valor máximo de f es aproximadamente 2; también averiguamos que este máximo se presenta en $x = 2.52$ y $y = 1.26$.

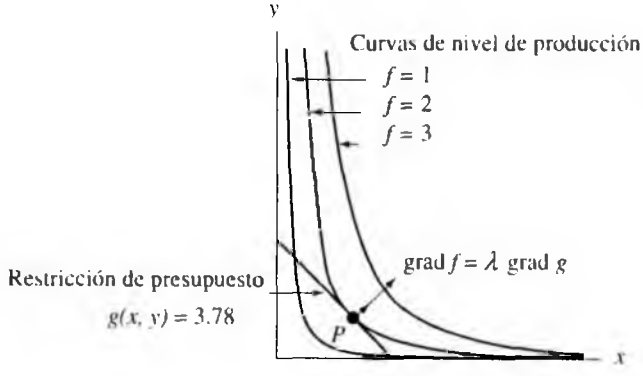


Figura 14.29 En el punto, P, de producción máxima, los vectores gradiente de f y gradiente de g son paralelos.

Multiplicadores de Lagrange en general

Supongamos que deseamos optimizar una *función objetivo* $f(x, y)$ sujeta a una *restricción* $g(x, y) = c$. Consideramos sólo los puntos que satisfacen la restricción y entre ellos buscamos los posibles extremos. Hacemos la siguiente definición.

Supongamos que P_0 es un punto que satisface la restricción $g(x, y) = c$.

- f tiene un **máximo local** en P_0 **sujeto a la restricción** si $f(P_0) \geq f(P)$ para todos los puntos P cerca de P_0 que satisfacen la restricción.
- f tiene un **máximo global** en P_0 **sujeto a la restricción** si $f(P_0) \geq f(P)$ para todos los puntos P que satisfacen la restricción.

Los mínimos locales y globales se definen de modo semejante.

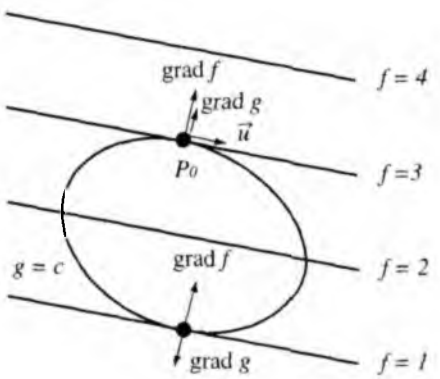


Figura 14.30 Los valores máximo y mínimo de $f(x, y)$ en $g(x, y) = c$ están en puntos donde grad f es paralelo a grad g.

Como vimos en el ejemplo de producción, los extremos restringidos se presentan en puntos donde los contornos de f son tangentes a los contornos de g; también pueden presentarse en puntos frontera de la restricción. A veces encontramos estos extremos al sustituir de la restricción en la función objetivo, pero el método de los multiplicadores de Lagrange funciona aun cuando la sustitución no es posible.

En cualquier punto, el gradiente de f apunta en la dirección en que f aumenta más rápidamente. Supongamos que $\vec{u}$ es un vector unitario tangente a la restricción. Si $f \cdot \vec{u} > 0$, entonces la derivada direccional, $f_{\vec{u}}$ es positiva y si se avanza en la dirección de $\vec{u}$ aumenta f. Si $f \cdot \vec{u} < 0$, entonces $f_{\vec{u}}$ es negativa y si se avanza en la dirección de $-\vec{u}$ aumenta f. Por lo tanto, en un punto P_0 donde f tiene un máximo local restringido, debemos tener $f \cdot \vec{u} = 0$. En consecuencia, en P_0, tanto grad f como grad g son perpendiculares a $\vec{u}$ y por esto grad f y grad g son paralelos (véase Fig. 14.30). Así, siempre y cuando $g \neq 0$ en P_0, podemos usar el método siguiente:

Para optimizar f sujeta a la restricción $g = c$, resolvemos las ecuaciones

$$\text{grad } f = \lambda \text{ grad } g \quad \text{y} \quad g = c$$

donde a λ se le llama **multiplicador de Lagrange**.

Si f y g son funciones de dos variables, el método de Lagrange nos da tres ecuaciones para tres incógnitas, x, y, λ:

$$f_x = \lambda g_x, \quad f_y = \lambda g_y, \quad g(x, y) = c.$$

Si f y g son funciones de tres variables, el método de Lagrange nos da cuatro ecuaciones para cuatro incógnitas, x, y, z, λ:

$$f_x = \lambda g_x, \quad f_y = \lambda g_y, \quad f_z = \lambda g_z, \quad g(x, y, z) = c$$

Ejemplo 1 Encuentre los valores máximo y mínimo de $x + y$ en el círculo $x^2 + y^2 = 4$.

Solución La función objetivo es

$$f(x, y) = x + y,$$

y la restricción es

$$g(x, y) = x^2 + y^2 = 4.$$

Como $f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} = \vec{i} + \vec{j}$ y grad $g = g_x\vec{i} + g_y\vec{j} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$, entonces grad $f = \lambda$ grad g resulta en

$$1 = 2\lambda x,$$
$$1 = 2\lambda y.$$

así que

$$x = y.$$

También sabemos que

$$x^2 + y^2 = 4,$$

resultando $x = y = \sqrt{2}$ o $x = y = -\sqrt{2}$.

Como $f(x, y) = x + y$, el valor máximo de f es $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, y se presenta cuando $x = y = \sqrt{2}$; el valor mínimo es $f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$, y se presenta cuando $x = y = -\sqrt{2}$ (véase Fig. 14.31).

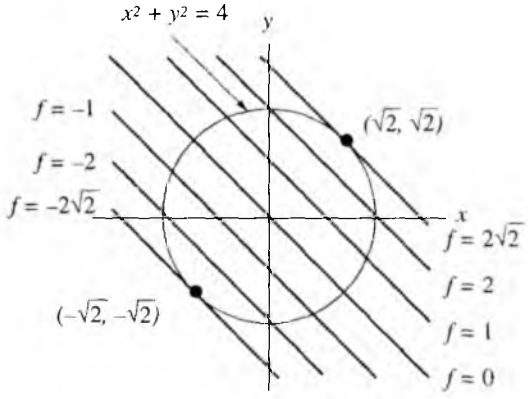


Figura 14.31 Los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = x + y$ en el círculo $x^2 + y^2 = 4$ están en puntos donde los contornos de f son tangentes al círculo.

¿Cómo distinguir un máximo de un mínimo?

Hay una segunda prueba de la derivada para clasificar los puntos críticos de problemas de optimización restringida, pero es más complicada que la prueba de la sección 14.1.[7] Sin embargo, como se ve de los ejemplos, una gráfica de la restricción y algunas curvas de nivel bastan, por lo general, para aclarar cuáles puntos máximos, cuáles mínimos y cuáles no son ni uno ni otro.

El significado de λ en el ejemplo de producción

En los ejemplos anteriores, nunca encontramos (ni necesitamos) el valor de λ. No obstante esto, λ tiene una interpretación práctica.

Repasemos el problema de producción donde deseábamos maximizar

$$f(x, y) = x^{2/3} y^{1/3}$$

sujeta a la restricción

$$g(x, y) = x + y = 3.78.$$

Resolvimos las ecuaciones

$$\frac{2}{3} x^{-1/3} y^{1/3} = \lambda,$$
$$\frac{2}{3} x^{2/3} y^{-2/3} = \lambda,$$
$$x + y = 3.78,$$

para obtener $x = 2.52$, $y = 1.26$ y $f(2.52, 1.26) \approx 2$. Si continuamos hasta encontrar λ resulta

$$\lambda \approx 0.53.$$

Supongamos ahora que hicimos otro cálculo aparentemente ajeno. Supongamos también que nuestro presupuesto aumenta un poco, de 3.78 a 4.78, con lo que resulta una nueva restricción de presupuesto de $x + y = 4.78$. Entonces la solución correspondiente está en $x = 3.19$ y $y = 1.59$ y el nuevo valor máximo (en lugar de $f = 2$) es

$$f = (3.19)^{2/3} (1.59)^{1/3} \approx 2.53.$$

Observe que la cantidad en la que f ha aumentado es 0.53, que es el valor de λ. Por lo tanto, en este ejemplo, el valor de λ representa la producción adicional alcanzada al aumentar el presupuesto en uno, en otras palabras, es el "extra" que se obtiene con una unidad más de presupuesto. En efecto, esto es cierto en general:

- El valor de λ es aproximadamente el aumento en el valor óptimo de f cuando el presupuesto aumenta en 1 unidad.

Más precisamente:

- El valor de λ representa la rapidez de cambio del valor óptimo de f a medida que aumenta el presupuesto.

[7] Ver J. E. Marsden y A. J. Tromba, *Vector Calculus*, 2a. ed., págs. 224-230, W. H. Freeman, San Francisco, 1981.

El significado de λ en general

Para interpretar λ, observamos la manera en que el valor óptimo de la función objetivo f cambia conforme varía el valor c de la función de restricción g. El punto óptimo (x_0, y_0) dependerá, en general, del valor de restricción c. De esta forma, siempre que x_0 y y_0 sean funciones diferenciables de c, podemos usar la regla de la cadena para diferenciar el valor óptimo $f(x_0(c), y_0(c))$ con respecto a c:

$$\frac{df}{dc} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx_0}{dc} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy_0}{dc}.$$

En el punto óptimo (x_0, y_0), tenemos $f_x = \lambda g_x$ y $f_y = \lambda g_y$, y por lo tanto

$$\frac{df}{dc} = \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx_0}{dc} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy_0}{dc}\right) = \lambda\frac{dg}{dc}.$$

Pero, a medida que $g(x_0(c), y_0(c)) = c$, vemos que $dg/dc = 1$, y así $df/dc = \lambda$. Por lo tanto, tenemos la siguiente interpretación del multiplicador de Lagrange λ:

> El valor de λ es la rapidez de cambio del valor óptimo de f a medida que c aumenta (donde $g(x, y) = c$). Si el valor óptimo de f se escribe como $f(x_0(c), y_0(c))$, entonces tenemos
>
> $$\frac{d}{dc} f(x_0(c), y_0(c)) = \lambda.$$

Ejemplo 2 Supóngase que la cantidad de alimentos producidos según la función $f(x, y) = x^{2/3} y^{1/3}$ se lleva al máximo, pero está sujeta a la restricción de presupuesto $x + y \le 3.78$. Suponga que el presupuesto se aumenta para conseguir un pequeño aumento en la producción. ¿A qué precio debe venderse el producto para justificar el aumento?

Solución Sabemos que $\lambda = 0.53$, lo que nos dice que $df/dc = 0.53$. Por lo tanto, aumentar el presupuesto en US $1 hace aumentar la producción en alrededor de 0.53 unidades. Para hacer redituable el aumento en presupuesto, los artículos adicionales producidos deben venderse en más de US $1. Por lo tanto, si p es el precio unitario del artículo, entonces $0.53p$ es el ingreso por las 0.53 unidades adicionales vendidas. En consecuencia, necesitamos que $0.53p \ge 1$, de donde $p \ge 1/0.53 = \$1.89$.

Optimización con restricciones regidas por una desigualdad

El problema de producción planteado al principio era llevar al máximo la producción $f(x, y)$ sujeta a la restricción de presupuesto

$$g(x, y) = p_1x + p_2y \le c.$$

Esta restricción de presupuesto está regida por una desigualdad, lo cual restringe (x, y) a una región del plano más bien que a una curva en el plano. En principio, debemos ver inicialmente si $f(x, y)$ tiene o no algún punto crítico en el interior, definido por

$$p_1x + p_2y < c.$$

Sin embargo, en el caso de una restricción de presupuesto, podemos ver que el máximo de f debe ocurrir cuando el presupuesto se ejerce en su totalidad, y así buscamos el valor máximo de f en la recta de frontera:

$$p_1x + p_2y = c.$$

Estrategia para optimizar $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) \leq c$.

- Encuentre todos los puntos del interior $g(x, y) < c$ donde grad f es cero o no está definido.
- Utilice multiplicadores de Lagrange para encontrar los extremos locales de f en la frontera $g(x, y) = c$.
- Evalúe f en los puntos encontrados en los dos pasos anteriores y compare los valores.

De la sección 14.2 sabemos que si f es continua en una región cerrada y acotada, R, entonces está garantizado que f alcanza sus valores máximo y mínimo globales en R.

Ejemplo 3 Encontrar los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 \leq 45$.

Solución Primero, buscamos todos los puntos críticos de f en el interior de la región. Al hacer

$$f_x = 2(x - 1) = 0$$
$$f_y = 2(y - 2) = 0$$

encontramos que f tiene exactamente un punto crítico en $x = 1$, $y = 2$. Como $1^2 + 2^2 < 45$, el punto crítico está en el interior de la región.

A continuación, encontramos los extremos locales de f en la curva de frontera $x^2 + y^2 = 45$. Para esto, usamos multiplicadores de Lagrange con restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 = 45$. Al hacer grad $f = \lambda$ grad g se obtiene

$$2(x - 1) = \lambda \cdot 2x,$$
$$2(y - 2) = \lambda \cdot 2y.$$

Si $\lambda = 0$, entonces $x = 1$, $y = 2$, el punto crítico interior. Por lo tanto, en la frontera tenemos

$$\frac{x}{x - 1} = \frac{y}{y - 2}$$

y así

$$y = 2x.$$

Al combinar esto con la restricción $x^2 + y^2 = 45$, resulta

$$5x^2 = 45$$

así que

$$x \pm 3.$$

Como $y = 2x$, tenemos posibles extremos locales en $x = 3$, $y = 6$ y $x = -3$, $y = -6$.

Se llega a la conclusión que los únicos candidatos para los valores máximo y mínimo de f en la región se presentan en $(1, 2)$, $(3, 6)$, y $(-3, -6)$. Al evaluar f en estos tres puntos se encuentra

$$f(1, 2) = 0, \qquad f(3, 6) = 20, \qquad f(-3, -6) = 80.$$

Por lo tanto, el valor mínimo de f es 0 en $(1, 2)$ y el valor máximo es 80 en $(-3, -6)$.

Problemas de optimización con dos restricciones

En la práctica se encuentran problemas de optimización donde la función objetivo f es una función de tres o más variables, y donde hay dos o más funciones de restricción. En este caso los contornos de f, g_1 y g_2 son superficies. Para optimizar f sujeta a las restricciones $g_1 = c_1$ y $g_2 = c_2$, resolvemos el sistema de ecuaciones,[8]

$$\begin{aligned} \text{grad}\, f(x, y, z) &= \lambda_1 \text{ grad } g_1(x, y, z) + \lambda_2 \text{ grad } g_2(x, y, z), \\ g_1(x, y, z) &= c_1, \\ g_2(x, y, z) &= c_2, \end{aligned}$$

para las cinco incógnitas $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$.

Ejemplo 4 El plano $x + y + z = 1$ corta el cilindro $x^2 + y^2 = 2$ en una curva C. Encontrar los puntos en C de altura mínima y máxima por encima del plano xy.

Solución Como z es la distancia de un punto arriba del plano xy, deseamos maximizar la función objetivo $f(x, y, z) = z$ sujeta a las restricciones

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 = 2 \quad \text{y} \quad g_2(x, y, z) = x + y + z = 1.$$

Resolvemos las ecuaciones grad $f = \lambda_1$ grad $g_1 + \lambda_2$ grad g_2, y $g_1(x, y, z) = 2$ y $g_2(x, y, z) = 1$:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\lambda_1 x + \lambda_2, \\ 0 &= 2\lambda_1 y + \lambda_2, \\ 1 &= \lambda_2, \\ x^2 + y^2 &= 2, \\ x + y + z &= 1. \end{aligned}$$

De las primeras dos ecuaciones obtenemos $x = y$. Al usar también la tercera resulta $x = y = -1/(2\lambda_1)$. Al sustituir estos valores por x y y en la cuarta se obtiene

$$\lambda_1 = \pm 1/2.$$

Esto produce $x = y = \pm 1$ y la última ecuación resulta en $z = -1$ y $z = 3$. Por lo tanto, $P_1 = (-1, -1, 3)$ es el punto en C de altura máxima arriba del plano xy y $P_2 = (1, 1, -1)$ es el punto de altura mínima.

La función de Lagrange

Con frecuencia se resuelven problemas de optimización restringida mediante una *Función de Lagrange*, $\mathcal{L}$. Por ejemplo, para optimizar la función $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = c$, usamos la función de Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda (g(x, y) - c).$$

[8] Una justificación del método de multiplicadores de Lagrange requiere el *teorema de la función implícita*. Ver, por ejemplo, J. E. Marsden y M. H. Hoffman, *Elementary Classical Analysis*, 2a. ed., W. H. Freeman, Nueva York, 1993.

Para ver por qué es útil la función $\mathcal{L}$, calculemos las derivadas parciales de $\mathcal{L}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y},$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (g(x, y) - c).$$

Observe que si (x_0, y_0) es un punto crítico de $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = c$ y λ_0 es el correspondiente multiplicador de Lagrange, entonces en el punto (x_0, y_0, λ_0) tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0.$$

En otras palabras, (x_0, y_0, λ_0) es un punto crítico para el problema de optimización no restringido del Lagrangiano, $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$. Por lo tanto, el Lagrangiano hace posible convertir un problema de optimización restringido en un problema no restringido.

El Lagrangiano que se emplea para optimizar la función $f(x, y, z)$ sujeta a dos restricciones $g_1(x, y, z)$ y $g_2(x, y, z) = c_2$ es

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) - \lambda_1 (g_1(x, y, z) - c_1) - \lambda_2 (g_2(x, y, z) - c_2).$$

Ejemplo 5 Una compañía tiene una función de producción con tres insumos, x, y y z, dados por

$$f(x, y, z) = 50x^{2/5} y^{1/5} z^{1/5}.$$

El presupuesto total es de US $24 000 y la compañía puede comprar x, y y z a US $80, US $12 y US $10 por unidad, respectivamente. ¿Qué combinación de insumos llevará a la máxima la producción?[9]

Solución Necesitamos llevar al máximo la función objetivo

$$f(x, y, z) = 50x^{2/5} y^{1/5} z^{1/5},$$

sujeta a la restricción

$$g(x, y, z) = 80x + 12y + 10z = 24{,}000.$$

Por lo tanto, la función de Lagrange es

$$\mathcal{L}(x, y, z) = 50x^{2/5} y^{1/5} z^{1/5} - \lambda (80x + 12y + 10z - 24{,}000),$$

y así buscamos soluciones al sistema de ecuaciones que se obtiene de grad $\mathcal{L} = 0$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 20x^{-3/5}y^{1/5} - 80\lambda = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 20x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} - 12\lambda = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 10x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} - 10\lambda = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(80x + 12y + 10z - 24{,}000) = 0.$$

---

[9] Adaptado de M. Rosser, *Basic Mathematics for Economists*, pág. 363, Routledge, Nueva York, 1993.

Simplificamos este sistema para obtener

$$\lambda = \frac{1}{4}x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5},$$
$$\lambda = \frac{5}{6}x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5},$$
$$\lambda = x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5},$$

$$80x + 12y + 10z = 24{,}000.$$

Al eliminar z de las primeras dos ecuaciones resulta $x = 0.3y$. Si se elimina x de la segunda y tercera ecuaciones resulta $z = 1.2y$ y al sustituir x y z en $80x + 12y + 10z = 24\,000$ resulta

$$80(0.3y) + 12y + 10(1.2y) = 24{,}000,$$

así que $y = 500$. Por lo tanto obtenemos $x = 150$ y $z = 600$, y el valor correspondiente de f es $f(150, 500, 600) = 4\,622$ unidades.

La gráfica de la restricción es un plano en el espacio. Como los insumos x, y y z no deben ser negativos, la restricción es un triángulo en el primer cuadrante, con bordes en los planos coordenados. En la frontera del triángulo, una (o más) de las variables x, y, z es cero y por ello la función f es cero. En consecuencia, $x = 150$, $y = 500$, $z = 600$ es un máximo.

Problemas para la sección 14.3

En los problemas del 1 al 17, utilice multiplicadores de Lagrange para encontrar los valores máximo y mínimo de $f(x, y)$ sujetos a las restricciones dadas.

1. $f(x, y) = x + y$, $x^2 + y^2 = 1$
2. $f(x, y) = 3x - 2y$, $x^2 + 2y^2 = 44$
3. $f(x, y) = x^2 + y$, $x^2 - y^2 = 1$
4. $f(x, y) = xy$, $4x^2 + y^2 = 8$
5. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $x^4 + y^4 = 2$
6. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $x^2 - y^2 = 1$
7. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
8. $f(x, y, z) = 2x + y + 4z$, $x^2 + y + z^2 = 16$
9. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - 2z$, $x^2 + y^2 = z$
10. $f(x, y, z) = x^2 - 2y + 2z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
11. $f(x, y, z) = x + y + z$, sujeta a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x - y = 1$
12. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, $x^2 + y^2 \le 4$
13. $f(x, y) = xy$, $x^2 + 2y^2 \le 1$
14. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $x^2 \ge y$
15. $f(x, y) = x + 3y$, $x^2 + y^2 \le 2$
16. $f(x, y) = x^3 + y$, $x + y \ge 1$
17. $f(x, y) = x^3 - y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$

18. Una compañía fabrica un producto usando insumos x, y y z según la función de producción

$$Q(x, y, z) = 20x^{1/2}y^{1/4}z^{2/5}.$$

Los precios por unidad son US \$20 para x, US \$10 para y y US \$5 para z. ¿Qué cantidad de cada insumo debe emplear la compañía para fabricar 1 200 productos al mínimo costo?[10]

[10] Adaptado de M. Rosser, *Basic Mathematics for Economists*, pág. 363, Routledge, Nueva York, 1993.

19. Considere el caso de una empresa que fabrica una mercancía en dos plantas distintas. El costo total de fabricación depende de las cantidades, q_1 y q_1, suministradas por cada planta, y está determinado por la *función conjunta de costo*, $C = f(q_1, q_2)$. Suponga que

$$f(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 500$$

es una aproximación a la función conjunta de costo y que el objetivo de la compañía es producir 200 unidades, y al mismo tiempo reducir al mínimo los costos de producción. ¿Cuántas unidades debe producir cada fábrica?

20. Una industria fabrica un producto a partir de dos materias primas. La cantidad producida, Q, puede darse por la función de Cobb-Douglas:

$$Q = cx^a y^b,$$

donde x y y son las cantidades de cada una de las dos materias primas empleadas, y a, b y c son constantes positivas. Suponga que la primera materia prima cuesta $\$P_1$ por unidad y la segunda cuesta $\$P_2$ por unidad. Encuentre la producción máxima posible si no se pueden gastar más de $\$K$ en materias primas.

21. Cada quien trata de distribuir equitativamente su tiempo para descansar y para trabajar. El resultado es que cuanto menos trabajemos, nuestro ingreso desciende. Por lo tanto, cada persona tiene *curvas de indiferencia* que relacionan el número de horas de descanso, l, con el ingreso, s. Si, por ejemplo, a una persona le da igual tener 0 horas de descanso y un ingreso de US $1125 por semana, por un lado, que 10 horas de descanso y un ingreso de US $750 a la semana por el otro, entonces los puntos $l = 0$, $s = 1125$, y $l = 10$, $s = 750$ están ambos en la misma curva de indiferencia. La tabla 14.4 proporciona información de tres curvas de indiferencia, I, II y III.

TABLA 14.4

Ingreso semanal			Horas semanales de descanso		
I	II	III	I	II	III
1125	1250	1375	0	20	40
750	875	1375	10	30	50
500	625	750	20	40	60
375	500	625	30	50	70
250	375	500	50	70	90

a) Trace las tres curvas de indiferencia en papel para graficar.

b) Suponga que dispone de 100 horas a la semana para trabajar y descansar, y que gana $10/h. Escriba una ecuación en términos de l y s que represente esta restricción.

c) En el mismo papel para graficar, trace una gráfica de esta restricción.

d) Calcule, de la gráfica, qué combinación de horas de descanso e ingreso escogería en estas circunstancias. Dé el número correspondiente de horas por semana que trabajaría. Explique cómo efectuó este cálculo.

22. La figura 14.32 muestra ∇f para una función $f(x, y)$ y dos curvas $g(x, y) = 1$ y $g(x, y) = 2$. Observe que $g = 1$ es la curva interior y $g = 2$ es la curva exterior. Marque los puntos siguientes en una copia de la figura.
    a) El (los) punto(s) A donde f tiene un máximo local.
    b) El (los) punto(s) B donde f tiene un punto de silla de montar.
    c) El punto C donde f tiene un máximo en $g = 1$.
    d) El punto D donde f tiene un mínimo en $g = 1$.
    e) Si utilizó multiplicadores de Lagrange para encontrar C, ¿Cuál sería el signo de λ? ¿Por qué?

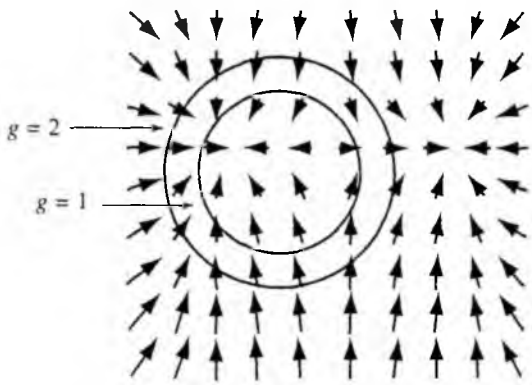


Figura 14.32

23. Diseñe un recipiente cilíndrico cerrado que contenga 100 cm^3 y tenga la mínima área superficial posible. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones?

24. Una compañía fabrica x unidades de un artículo y y unidades de otro. La función

$$C = 5x^2 + 2xy + 3y^2 + 800.$$

es una aproximación al costo total en dólares, C, de producir estos dos artículos
    a) Si la cuota de producción para el número total de artículos (ambos tipos combinados) es 39, encuentre el costo de producción mínimo.
    b) Calcule el costo adicional o el ahorro si la cuota de producción se eleva a 40 o baja a 38.

25. Una montañista en la cima de una montaña desea bajar a una menor altitud tan rápido como le sea posible. Suponga que la altitud de la montaña está dada aproximadamente por

$$h(x, y) = 3000 - \frac{1}{10000}(5x^2 + 4xy + 2y^2) \text{ metros},$$

donde x, y son coordenadas horizontales sobre la tierra (en metros), con la cima de la montaña ubicada justo encima del origen. En treinta minutos, la montañista puede llegar a cualquier punto (x, y) en un círculo de radio 1000 m. ¿En qué dirección debe caminar para descender lo más posible?

26. Suponga que la cantidad, q, de un producto fabricado depende del número de trabajadores, W, y la cantidad de capital invertido, K, y está representada por la función de Cobb-Douglas

$$q = 6W^{3/4}K^{1/4}$$

Además, los costos de mano de obra son US \$10 por trabajador, el costo de capital es US \$20 por unidad, y el presupuesto es US \$3 000.

a) ¿Cuál es el número óptimo de trabajadores, y el número óptimo de unidades de capital?
b) Demuestre que, en los valores óptimos de W y K, la relación entre la productividad marginal de mano de obra ($\partial q/\partial W$) y la productividad marginal de capital ($\partial q/\partial K$) es la misma que la relación entre el costo de una unidad de mano de obra y el costo de una unidad de capital.
c) Vuelva a calcular los valores óptimos de W y K cuando el pruesupuesto aumenta en un dólar. Compruebe que al aumentar el presupuesto en US \$1 es posible la producción de λ unidades adicionales del artículo, donde λ es el multiplicador de Lagrange.

27. El director de una clínica de una zona residencial tiene un presupuesto anual de US \$600 000 y desea distribuir este presupuesto de modo que se realice el máximo número de visitas a pacientes, V, que está dado como función del número de doctores, D, y el número de enfermeras, N, por

$$V = 1000D^{0.6}N^{0.3}.$$

Los doctores reciben un salario de US \$40 000 y las enfermeras de US \$10 000.

a) Plantee el problema de optimización restringida que ha de resolver el director.
b) Describa verbalmente las condiciones que deben satisfacer $\partial V/\partial D$ y $\partial V/\partial N$ para que V tenga un valor óptimo.
c) Resuelva el problema formulado en el inciso a.
d) Encuentre el valor del multiplicador de Lagrange e interprete su significado en este problema.
e) En el punto óptimo, ¿cuál es el costo marginal de una visita a un paciente (es decir, el costo de una visita adicional)? ¿Aumentará o disminuirá dicho costo marginal con el número de visitas? ¿Por qué?

28. Reduzca al mínimo

$$f(x, y, z) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

sujeta a la restricción $Ax + By + Cz + D = 0$. ¿Cuál es el significado geométrico de su solución?

29. Sea $f(x, y)$ una función lineal, de modo que $f(x, y) = ax + by + c$ donde a, b y c son constantes, y sea R una región en el plano xy.
a) Si R es cualquier disco, demuestre que los valores máximo y mínimo de f en R se presentan en la frontera del disco.
b) Si R es cualquier rectángulo, demuestre que los valores máximo y mínimo de f en R se presentan en las esquinas del rectángulo. También pueden presentarse en otros puntos del rectángulo.
c) Explique, con ayuda de una gráfica del plano $z = f(x, y)$, por qué son de esperarse las respuestas obtenidas en los incisos a y b.

30. a) En el problema 26, ¿es otro el valor de λ si el presupuesto cambia de US \$3 000 a US \$4 000?
b) En el problema 27, es otro el valor de λ si el presupuesto cambia de US \$600 000 a US \$700 000?
c) ¿Qué condiciones debe satisfacer una función de producción Cobb-Douglas?

$$Q = cK^a L^b$$

para garantizar que el aumento marginal de producción (es decir, la rapidez de aumento de la producción con el presupuesto) no es afectada por el tamaño del presupuesto?

PROBLEMAS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO CATORCE

1. Encuentre los puntos locales máximos, mínimos y de silla de montar de la función

$$f(x, y) = \text{sen } x + \text{sen } y + \text{sen } (x + y), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi.$$

Para los problemas 2, 3 y 4, encuentre los puntos máximos y mínimos locales, y de silla de montar de las funciones dadas. Diga si los máximos o mínimos locales son máximos o mínimos globales. Explique.

2. $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3xy$

3. $f(x, y) = xy + \ln x + y^2 - 10, \quad (x > 0)$

4. $f(x, y) = x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y}$

5. Suponga que $f_x = f_y = 0$ en $(1, 3)$ y $f_{xx} < 0, f_{yy} < 0, f_{xy} = 0$. Dibuje un posible diagrama de contorno.

6. Encuentre la recta de mínimos cuadrados para los puntos $(0, 4)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$.

7. Encuentre el máximo y el mínimo de la función $z = 4x^2 - xy + 4y^2$ sobre el disco cerrado $x^2 + y^2 \leq 2$.

8. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = -3x^2 - 2y^2 + 20xy$ en la recta $x + y = 100$?

9. Una compañía vende dos productos que son hasta cierto punto sustitutos uno del otro, como son el café y el té. Si aumenta el precio de uno, entonces la demanda del otro aumenta. Las cantidades demandadas, q_1 y q_2, están dadas como función de los precios, p_1 y p_2, por

$$q_1 = 517 - 3.5p_1 + 0.8p_2 \quad \text{y} \quad q_2 = 770 - 4.4p_2 + 1.4p_1.$$

¿Qué precios debe cobrar la compañía para llevar al máximo el ingreso total por ventas?[11]

10. Una regla práctica en biología expresa que a medida que el área A de una isla aumenta diez veces, el número de especies animales, N, que viven en ella se duplica. La tabla 14.5 muestra el área (en km^2) de varias islas de las Indias Occidentales y el número de especies que viven en cada una. Suponga que N es una potencia de A. Valiéndose de la regla práctica, encuentre

a) N como función de A. b) $\ln N$ como función de $\ln A$.

c) Con los datos proporcionados, tabule $\ln N$ contra $\ln A$ y encuentre la recta de mejor ajuste. ¿Está su respuesta de acuerdo con la regla?

TABLA 14.5 *Número de especies en varias islas*

Isla	Área (km^2)	Número
Redonda	3	5
Saba	20	9
Montserrat	192	15
Puerto Rico	8858	75
Jamaica	10854	70
Hispaniola (Haití y Rep. Dominicana)	77571	130
Cuba	113715	125

[11] Adaptado de M. Rosser, *Basic Mathematics for Economists*, pág. 318, Routledge, Nueva York, 1993.

11. Suponga que la cantidad, Q, fabricada de un cierto producto depende de la cantidad de mano de obra, L, y de capital, K, empleados, según la función

$$Q = 900L^{1/2} K^{2/3}$$

Suponga que la mano de obra cuesta US $100 por unidad y que el capital cuesta US $200 por unidad. ¿Qué combinación de mano de obra y capital debe emplearse para producir 36 000 unidades de los artículos al costo mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo?

12. Una organización internacional debe decidir cómo gastar los US $2 000 que se le han asignado para aliviar el problema del hambre en una región remota. Esperan dividir el dinero entre comprar arroz a $5/saco y frijoles a $10/saco. El número, P, de personas que se alimentarían si compraran x sacos de arroz y y sacos de frijoles está dado por

$$P = x + 2y + \frac{x^2y^2}{2 \cdot 10^8}.$$

¿Cuál es el número máximo de personas que pueden alimentarse, y cómo debe la organización asignar su dinero?

13. La cantidad, Q, de un producto fabricado por una compañía está dada por

$$Q = aK^{0.6} L^{0.4},$$

donde a es una constante positiva, K es la cantidad de capital y L es la cantidad de mano de obra empleados. Los costos de capital son US $20 por unidad, los de mano de obra son US $10 por unidad, y la compañía desea que los costos de capital y mano de obra combinados no sean de más de US $150. Suponga que nos piden asesorar a la compañía, y nos enteramos de que se están empleando 5 unidades de capital y 5 de mano de obra.

a) ¿Qué aconsejaría? ¿Debe la planta usar más mano de obra?, ¿menos? ¿Más o menos capital? Si es así, ¿cuánto?

b) Escriba un resumen de una sola idea que pudiera emplearse para convencer al consejo de directores de seguir su recomendación.

14. Un doctor desea programar visitas para dos pacientes que han sido operados de tumores, para reducir al mínimo la demora esperada en la detección de un nuevo tumor. Las visitas a los pacientes 1 y 2 se programan a intervalos de x_1 y x_2 semanas, respectivamente. Se pueden realizar un total de m visitas por semana para ambos pacientes combinados.

Se considera que las tasas de recurrencia de tumores para los pacientes 1 y 2 son v_1 y v_2 tumores por semana, respectivamente. Por lo tanto, $v_1/(v_1 + v_2)$ y $v_2/(v_1 + v_2)$ son las probabilidades de que en el paciente 1 y el paciente 2, respectivamente, se detecte el siguiente tumor. Se sabe que la demora esperada en la detección de un tumor para un paciente auscultado cada x semanas es $x/2$. Por lo tanto, la demora esperada en la detección para ambos pacientes combinados está dada por[12]

$$f(x_1, x_2) = \frac{v_1}{v_1 + v_2} \cdot \frac{x_1}{2} + \frac{v_1}{v_1 + v_2} \cdot \frac{x_2}{2}.$$

Encuentre los valores de x_1 y x_2 en términos de v_1 y v_2 que minimicen $f(x_1, x_2)$ sujeta al hecho de que m, el número de visitas por semana, es fijo.

15. ¿Cuál es el valor del multiplicador de Lagrange del problema 14? ¿Cuáles son las unidades de λ? ¿Cuál es su significado práctico para el doctor?

[12] Adaptado de Daniel Kent, Ross Shachter, *et al.*, "Efficient Scheduling of Cystoscopies in Monitoring for Recurrent Bladder Cancer", en *Medical Decision Making*, Hanley and Belfus, Filadelfia, 1989.

16. La ecuación de Cobb-Douglas proporciona un modelo para la cantidad total, q, de una mercancía producida como función del número de trabajadores, W, y la cantidad de capital invertido, K. Se trata de la función de producción

$$q = cW^{1-a}K^{a}$$

donde a y c son constantes positivas. Suponga que los costos de mano de obra son $\$p_1$ por trabajador, los costos de capital son $\$p_2$ por unidad, y hay un presupuesto fijo de $\$b$. Demuestre que cuando W y K están en sus niveles óptimos, la relación entre la productividad marginal de mano de obra y la productividad marginal de capital es igual a la relación entre el costo de una unidad de mano de obra y una unidad de capital.

17. Un canal de irrigación tiene una sección transversal trapezoidal de 50m^2 de área, como en la figura 14.33. El gasto promedio del canal es inversamente proporcional al perímetro húmedo, p, del canal, es decir, al perímetro del trapezoide de la figura 14.33, excluyendo la parte superior. Por lo tanto, para maximizar el gasto debemos reducir p al mínimo. Encuentre la profundidad d, el ancho w de la base y el ángulo θ que den el gasto máximo.[13]

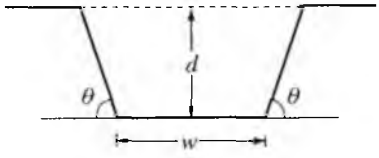


Figura 14.33

18. La energía necesaria para comprimir un gas desde la presión p_1 a la presión p_{N+1} en N etapas es proporcional a

$$E = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 + \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{p_{N+1}}{p_N}\right)^2 - N.$$

Demuestre cómo seleccionar las presiones intermedias $p_2, \ldots, p_N$ para reducir la energía necesaria.[14]

19. Una familia desea cambiarse a una casa en un punto que está mejor ubicado con respecto a la escuela de los hijos y los lugares de trabajo de los padres. Véase la figura 14.34.

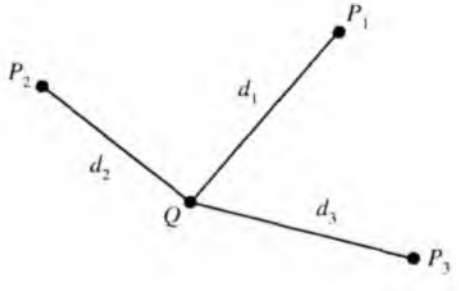


Figura 14.34

[13] Adaptado de Robert M. Stark y Robert L. Nichols, *Mathematical Foundations of Design: Civil Engineering Systems*, McGraw-Hill, Nueva York, 1972.
[14] Adaptado de Rutherford, Aris, *Discrete Dynamic Programming*, Blaisdell, Nueva York, 1964 pág. 35.

Actualmente viven en Q, la escuela está en P_1, el trabajo de la madre en P_2 y el trabajo del padre en P_3. Se trata de reducir al mínimo $d = d_1 + d_2 + d_3$, donde

d_1 = distancia a la escuela,
d_2 = distancia al trabajo de la madre,
d_3 = distancia al trabajo del padre.

a) Demuestre que grad d_i es un vector unitario que apunta directamente alejándose de P_i, para $i = 1, 2, 3$. [Sugerencia: dibuje contornos de d_i; ponga especial atención en la separación de los contornos.]

b) Utilice su respuesta a la parte a) para dibujar gradiente de d en el punto Q de la figura 14.34. ¿En qué dirección debe cambiarse la familia para disminuir d?

c) Encuentre lo mejor que pueda el punto del diagrama donde gradiente de $d = 0$. ¿Qué condición geométrica caracteriza a este lugar?

20. Considere la función $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 8y^2 + x - y$.

a) Calcule los puntos críticos de f y clasifíquelos.

b) Por el método de completar el cuadrado, grafique el diagrama de contorno de f y demuestre que el extremo local encontrado en el inciso a es global.

c) Comenzando en el punto (1, 1), reduzca f al mínimo usando el método de búsqueda de gradiente y compare su respuesta después de dos iteraciones con su respuesta al inciso a.

21. Un rayo luminoso que cruza la frontera entre dos medios diferentes (por ejemplo el vacío y vidrio, o aire y agua) experimenta un cambio de dirección o es *refractado* en una cantidad que depende de las propiedades de los medios. Suponga que un rayo luminoso viaja del punto A al punto B, como se muestra en la figura 14.35, con velocidad v_1 en el medio 1 y velocidad v_2 en el medio 2.

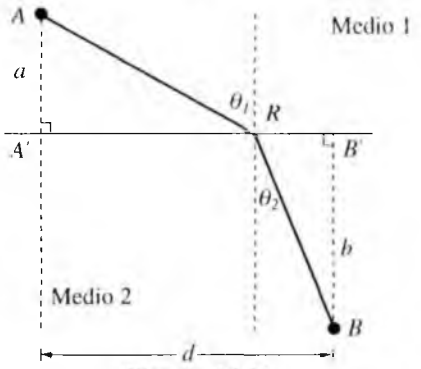


Figura 14.35

a) Encuentre el tiempo $T(\theta_1, \theta_2)$ que tarda el rayo para viajar de A a B, en términos de los ángulos θ_1, θ_2 y las constantes a, b, v_1 y v_2.

b) Demuestre que los ángulos θ_1, θ_2 satisfacen la restricción

$$a \tan \theta_1 + b \tan \theta_2 = d$$

c) ¿Cuál es el efecto en el tiempo, T, de hacer que $\theta_1 \to -\pi/2$ (es decir, mover R a la izquierda de A') o hacer que $\theta_1 \to \pi/2$ (es decir, mover R a la derecha de B')?

d) El *principio de Fermat* expresa que el rayo de luz sigue una trayectoria tal que el tiempo tomado T se reduce al mínimo. Utilice el método de multiplicadores de Lagrange para demostrar que $T(\theta_1, \theta_2)$ se reduce al mínimo cuando se cumple la *ley de refracción de Snell:*

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

(La constante v_1/v_2 recibe el nombre de *índice de refracción* del medio 2 con respecto al medio 1. Por ejemplo, los índices del aire, agua y vidrio con respecto a un vacío son aproximadamente 1.0003, 1.33 y 1.52, respectivamente. Los lentes modernos para leer se fabrican de plásticos con alto índice de refracción, para reducir peso y grosor cuando la receta prescribe mucho aumento.)

22. Veintiséis equipos compiten por la copa Stanley de hockey. Al principio de la temporada un experimentado aficionado calcula que la probabilidad de que el equipo i gane es algún número p_i, donde $0 \le p_i \le 1$ y

$$\sum_{i=1}^{26} p_i = 1.$$

Exactamente un equipo ganará en realidad, así que las probabilidades tienen que sumar 1. Si uno de los equipos, por ejemplo el i, está seguro de ganar, entonces p_i es igual a 1 y todos los otros p_j deben ser igual a cero. Otro caso extremo ocurre si es igualmente probable que todos los equipos ganen, cuando las p_i son iguales a 1/26, y el resultado de la temporada de hockey es totalmente impredecible. Por lo tanto, la *incertidumbre* del resultado de la temporada de hockey depende de las probabilidades $p_1, \ldots, p_{26}$. En este problema medimos cuantitativamente esta incertidumbre mediante la siguiente función:

$$S(p_1, \ldots, p_{26}) = -\sum_{i=1}^{26} p_i \frac{\ln p_i}{\ln 2}.$$

Observe que como $p_i \le 1$, se tiene $-\ln p_i \le 0$ y por lo tanto $S \ge 0$.

a) Demuestre que $\lim_{p \to 0} p \ln p = 0$. (Esto significa que S es una función continua de las p_i, donde $0 \le p_i \le 1$ y $1 \le i \le 26$, si hacemos $p \ln p|_{p=0}$ igual a cero. Como S es entonces una función continua en una región cerrada y acotada, alcanza un valor máximo y un mínimo en esta región.)

b) Encuentre el valor máximo de $S(p_1, \ldots, p_{26})$ sujeto a la restricción $p_1 + \ldots + p_{26} = 1$. ¿Cuáles son los valores de p_i en este caso? ¿Qué significa su respuesta en términos de la incertidumbre en el resultado de la temporada de hockey?

c) Encuentre el valor mínimo de $S(p_1, \ldots, p_{26})$, sujeto a la restricción $p_1 + \ldots + p_{26} = 1$. ¿Cuáles son los valores de p_i en este caso? ¿Qué significa su respuesta en términos de la incertidumbre en el resultado de la temporada de hockey?

[Nota: La función S es un ejemplo de una función de *entropía;* el concepto de entropía se emplea en teoría de la información, mecánica estadística y termodinámica cuando se mide la incertidumbre en un experimento (la temporada de hockey en este problema) o sistema físico.]

23. Encuentre la distancia mínima desde el punto (1, 2, 10) al paraboloide dado por la ecuación $z = x^2 + y^2$. Dé una justificación geométrica de su respuesta.

24. El cono $z = x^2 + y^2$ es cortado por el plano $z = 1 + x + y$. Encuentre los puntos en la intersección del cono y el plano que estén más cerca y más lejos del origen. Dé una justificación geométrica de su respuesta.

CAPÍTULO QUINCE

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Una integral definida es el límite de una suma. Se usa una integral definida para calcular la población total de una región, dada la densidad de población como función de la posición. Si la densidad de población es una función sólo de una variable (por ejemplo, la distancia desde el centro de una ciudad) tenemos una integral definida ordinaria de una variable. Si la densidad depende de más de una variable, necesitamos una integral múltiple para calcular la población total. En este capítulo desarrollamos integrales dobles y triples en coordenadas cartesianas y polares.

15.1 LA INTEGRAL DEFINIDA DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

En esta sección vemos la forma de calcular una población total a partir de una densidad de población en el plano. Esto lleva a la definición de la integral definida de una función de dos variables.

Densidad de población de zorras en Inglaterra

La población de zorras en algunas partes de Inglaterra es importante para los funcionarios de salud pública preocupados por la rabia que dispersan estos animales. El diagrama de contorno de la figura 15.1 muestra la densidad de población $D = f(x, y)$ de zorras en el suroeste de Inglaterra, donde x y y están en kilómetros, medidos desde la esquina suroeste del mapa, y D en zorras por kilómetro cuadrado.[1] El contorno de línea gruesa es la línea de la costa (aproximadamente) y puede considerarse como el contorno $D = 0$; es evidente que la densidad es cero fuera de ella.

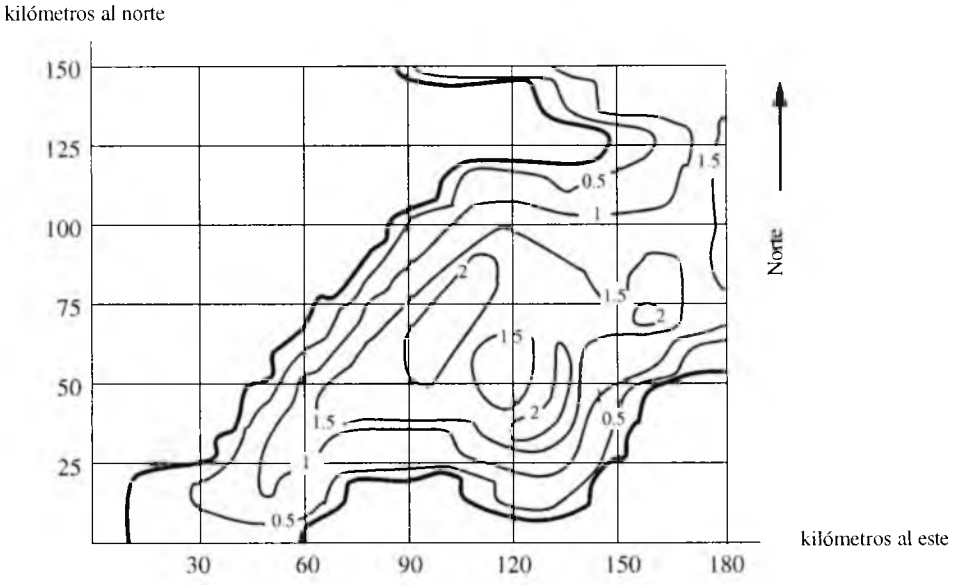


Figura 15.1 Densidad de población de zorras en el sudoeste de Inglaterra.

Ejemplo 1 Calcular la población total de zorras de la región representada por el mapa de la figura 15.1.

Solución Deseamos encontrar los límites superior e inferior para la población. Subdividimos el mapa en los 36 rectángulos que se muestran en la figura 145.1 y estimamos la población de cada rectángulo. Después encontramos un límite superior para la densidad de población de cada rectángulo, lo multiplicamos por el área del rectángulo para obtener un límite superior de la población de ese rectángulo y luego sumamos estos límites superiores para obtener un límite superior de la población total. En el rectángulo inferior izquierdo hay una pequeña región entre los contornos de 0.5 y 1, de modo que estimamos que la densidad de zorras de este rectángulo es de cuando mucho 0.6 zorras por kilómetro cuadrado. El siguiente rectángulo hacia el norte es todo mar y, por lo tanto, no hay zorras, pero en el rectángulo hacia el este hay

[1] Adaptado de D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, 1989.

TABLA 15.1 *Estimaciones superiores de la densidad de población de zorras*

0	0	0	0.8	1.5	1.5
0	0	0.5	1.5	1.5	1.5
0	0	1.5	2.5	1.9	2.3
0	1.2	2.2	2.5	2.5	2.5
0	1.3	2	2.2	2.5	0.5
0.6	1.3	1	1	1.3	0

TABLA 15.2 *Estimaciones inferiores de la densidad de población de zorras*

0	0	0	0	0	0.1
0	0	0	0	0	0.1
0	0	0	0.5	1.2	1.2
0	0	0	1	1	0
0	0	0.5	0.5	0	0
0	0	[illegible]	0	0	0

una región entre los contornos marcados 1 y 1.5, de modo que estimamos que la densidad máxima es de 1.3 zorras por kilómetro cuadrado. Si continuamos de esta manera obtenemos los límites superiores de la tabla 15.1. De igual manera obtenemos los límites inferiores que se muestran en la tabla 15.2.

Cada rectángulo tiene un área de $30 \times 25 = 750$ km^2, de manera que resulta:

Estimación inferior = $(0.1 + 0.1 + 0.5 + 1.2 + 1.2 + 1 + 1 + 0.5 + 0.5) \cdot 750 = 4575$ zorras.

Del mismo modo, obtenemos el límite superior:

$$\text{Estimación superior} = 41.6 \cdot 750 = 31\,200 \text{ zorras}$$

El promedio de nuestros cálculos es de alrededor de 18 000 zorras, de manera que tomamos esto como nuestro estimado. Observe que hay una amplia discrepancia entre los cálculos superior e inferior; si tomamos subdivisiones más pequeñas podríamos efectuar estimaciones más precisas.

Definición de la integral definida

Las sumas empleadas para aproximar la población de zorras son similares a las sumas de Riemann que se usan para definir la integral definida de una función de una variable. Ahora definimos la integral definida para una función f de dos variables en una región rectangular.[2] Dada una función continua $f(x, y)$ definida en una región $a \le x \le b$ y $c \le y \le d$, construimos una suma de Riemann al subdividir la región en rectángulos más pequeños. Esto se hace subdividiendo cada uno de los intervalos $a \le x \le b$ y $c \le y \le d$ en n y m subintervalos iguales respectivamente, y se obtienen nm subrectángulos (véase Fig. 15.2).

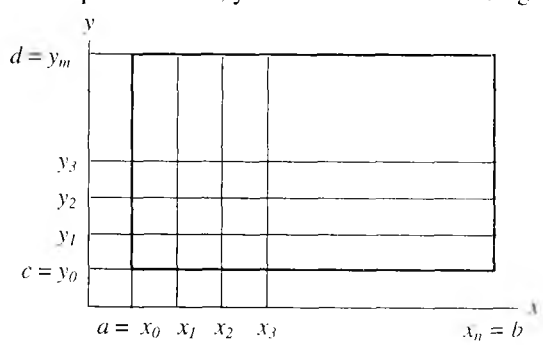


Figura 15.2 Subdivisión de un rectángulo en nm subrectángulos.

El área de cada subrectángulo es ΔA, donde $\Delta A = \Delta x\, \Delta y$, $\Delta x = (b - a)/n$ es el ancho de cada subdivisión a lo largo del eje x y $\Delta y = (d - c)/m$ el ancho de cada subdivisión a lo largo del eje y. Para calcular la suma de Riemann, multiplicamos el área de cada subrectángulo por el valor de la función en un punto del rectángulo y sumamos todos los números resultantes. Al seleccionar el punto que indique el valor máximo, M_{ij}, de la función en cada rectángulo, se obtiene la *suma superior*, $\Sigma_{ij} M_{ij}\, \Delta x\, \Delta y$.

La *suma inferior*, $\Sigma_{i,j} L_{ij}\ \Delta x\, \Delta y$, se obtiene al tomar el valor mínimo en cada rectángulo. Por lo tanto, cualquier otra suma de Riemann satisface la expresión

$$\sum_{i,j} L_{ij}\, \Delta x\, \Delta y \le \sum_{i,j} j\,(x_i, y_j)\, \Delta x\, \Delta y \le \sum_{i,j} M_{ij}\, \Delta x \Delta y$$

donde (x_i, y_j) es cualquier punto del ij-ésimo subrectángulo. Definimos la integral definida tomando el límite conforme los números de subdivisiones, n y m, tienden al infinito. Al comparar las sumas superior e inferior, como se hizo para la población de zorras, se puede demostrar que el límite existe cuando la función, f, es continua. Obtenemos el mismo límite dejando que Δx y Δy tiendan a cero. Por lo tanto, tenemos la siguiente definición:

Supongamos que la función f es continua en R, el rectángulo $a \le x \le b$, $c \le y \le d$. Definimos la **integral definida** de f sobre R

$$\int_R f\, dA = \lim_{\Delta x,\, \Delta y \to 0} \sum_{i,j} f(x_i, y_j)\, \Delta x \Delta y.$$

Tal integral recibe el nombre de **integral doble.**

A veces consideramos a dA como el área de un rectángulo infinitesimal de longitud dx y altura dy, de modo que $dA = dx\, dy$. Entonces usamos la notación[3]

$$\int_R f\, dA = \int_R f(x, y)\, dx dy\ .$$

La suma de Riemann empleada en la definición, con subdivisiones rectangulares de igual tamaño, es sólo un tipo de suma de Riemann. Para una suma general de Riemann, las subdivisiones no tienen que ser todas del mismo tamaño.

Ejemplo 2 Sea R el rectángulo $0 \le x \le 1$ y $0 \le y \le 1$. Utilizar sumas de Riemann para calcular $\int_R e^{-(x^2+y^2)}\, dA$.

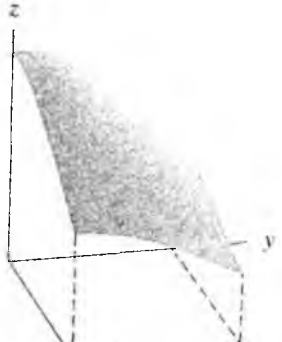


Figura 15.3 Gráfica de $e^{-(x^2+y^2)}$ sobre el rectángulo R.

[3] Otra notación común para la integral doble es $\iint_R f\, dA$.

ctángulo. Por lo tanto,

l definida tomando el
arar las sumas superi-
l límite existe cuando
n a cero. Por lo tanto,

≤ *d*. Definimos la

ngitud *dx* y altura *dy*,

ıres de igual tamaño,
isiones no tienen que

$\int_R e^{-(x^2+y^2)}\,dA$.

Solución Partimos R en 16 subrectángulos dividiendo cada borde en cuatro partes. La figura 15.3 muestra que $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ disminuye a medida que nos alejamos del origen. Por lo tanto, para obtener una suma superior evaluamos f en cada subrectángulo en la esquina más cercana al origen. Por ejemplo, en el rectángulo $0 \le x \le 0.25$, $0 \le y \le 0.25$, evaluamos f en (0, 0).

Mediante la tabla 15.3 encontramos que

$$\begin{aligned}\text{Suma superior} = [\,&(1 + 0.9394 + 0.7788 + 0.5698)\\ &+ (0.9394 + 0.8825 + 0.7316 + 0.5353)\\ &+ (0.7788 + 0.7316 + 0.6065 + 0.4437)\\ &+ (0.5698 + 0.5353 + 0.4437 + 0.3247)]\,(0.0625) = 0.68.\end{aligned}$$

Para obtener una suma inferior, debemos evaluar f en la esquina opuesta de cada rectángulo, porque la superficie desciende tanto en dirección de x como de y. Esto produce una suma inferior de 0.44. En consecuencia,

$$0.44 \le \int_R e^{-(x^2+y^2)}\,dA \le 0.68.$$

Para obtener una mejor aproximación, calculamos las estimaciones inferior y superior con más subdivisiones. En la tabla 15.4 se muestran los resultados para varios casos con igual número de subdivisiones en las direcciones x y y.

TABLA 15.3 *Valores de* $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ *del rectángulo* R

x \ y	0.0	0.25	0.50	0.75	1.00
0.0	I	0.9394	0.7788	0.5698	0.3679
0.25	0.9394	0.8825	0.7316	0.5353	0.3456
0.50	0.7788	0.7316	0.6065	0.4437	0.2865
0.75	0.5698	0.5353	0.4437	0.3247	0.2096
1.00	0.3679	0.3456	0.2865	0.2096	0.1353

TABLA 15.4 *Aproximaciones de suma de Riemann a* $\int_R e^{-(x^2+y^2)}\,dA$

	Número de subdivisiones en las direcciones de x y y			
	8	16	32	64
Superior	0.6168	0.5873	0.5725	0.5651
Inferior	0.4989	0.5283	0.5430	0.5504

El verdadero valor de la doble integral, 0.5577. . . , está atrapado entre las sumas inferior y superior. Observe que la suma inferior aumenta y la superior disminuye conforme crece el número de subdivisiones. (¿Por qué?) Sin embargo, aun con 64 subdivisiones, que llevan a $64^2 = 4096$ términos en la suma de Riemann, las sumas inferior y superior coinciden con el verdadero valor de la integral sólo en el primer lugar decimal. Por lo tanto, debemos buscar mejores formas de aproximar la integral.

La región *R*

En nuestra definición de la integral definida $\int_R f(x, y)\,dA$, la región R es un rectángulo. Pero la integral definida se puede definir para regiones de otras formas, incluyendo triángulos, círculos y regiones acotadas por las gráficas de funciones continuas por partes.

Para aproximar la integral definida sobre una región, R, que no sea rectangular, usamos una cuadrícula de rectángulos que se aproximan a la región. Obtenemos esta cuadrícula al encerrar R en un rectángulo grande y subdividir ese rectángulo; consideramos sólo los subrectángulos que están dentro de R.

Como se indicó en el caso anterior, escogemos un punto (x_i, y_j) de cada subrectángulo y formamos una suma de Riemann

$$\sum f(x_i, y_j)\,\Delta x\,\Delta y\,.$$

Sin embargo, esta vez la suma se efectúa sólo sobre los rectángulos que están dentro de R. Por ejemplo, en el caso de la población de zorras podemos usar los rectángulos que están totalmente en tierra. A medida que las subdivisiones se hacen más finas, la cuadrícula se parece cada vez más a la región R. Para una función, f, que es continua en R, definimos la integral definida como sigue:

$$\int_R f\,dA = \lim_{\Delta x,\,\Delta y \to 0} \sum_{i,j} f(x_i, y_j)\,\Delta x\,\Delta y$$

donde la suma de Riemann se toma sobre los rectángulos que están dentro de R.

Podemos preguntarnos por qué es posible omitir los rectángulos que cubren el borde de R. Si los incluimos, ¿podríamos obtener un valor diferente para la integral? La respuesta es que para cualquier región que nos encontremos, el área de los subrectángulos que cubre el borde tiende a 0 conforme la cuadrícula se hace más fina. Por lo tanto, omitir estos rectángulos no afecta el límite.

Interpretaciones de la doble integral

Interpretación como un área

Supongamos que $f(x, y) = 1$ para todos los puntos (x, y) de la región R. Entonces cada término de la suma de Riemann es de la forma $1 \cdot \Delta A = \Delta A$ y la doble integral dará el área de la región R.

$$\text{Área}\,(R) = \int_R 1\,dA = \int_R dA$$

Interpretación como volumen

Así como la integral definida de una función positiva de una variable puede interpretarse como el área bajo la gráfica de la función, de igual modo se puede interpretar la integral definida de una función positiva de dos variables como el volumen bajo su gráfica. En el caso de una variable, visualizamos las sumas de Riemann como el área total de los rectángulos construidos arriba de las subdivisiones. En el caso de dos variables, obtenemos barras sólidas en lugar de rectángulos. Conforme aumenta el número de subdivisiones, las partes superiores de las barras se aproximan mejor a la superficie, y el volumen de las barras se acerca más al volumen bajo la superficie y arriba de la región R (véase Fig. 15.4).

Figura 15.4

Ejemplo 3 Encontrar
$x \leq 1$ y $-1 \leq$

Solución Si R es el r

La tab
n^2 subrecta
la integral

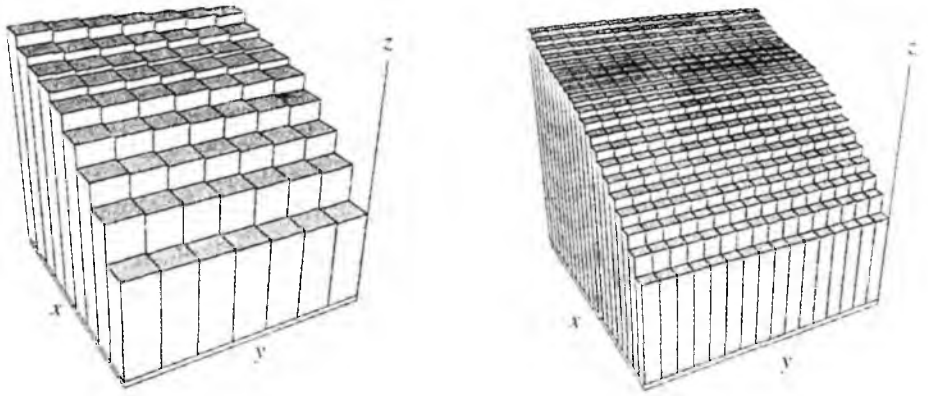


Figura 15.4 Aproximación del volumen bajo una gráfica con sumas de Riemann cada vez más finas.

Ejemplo 3 Encontrar el volumen bajo la gráfica de $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ que se encuentra sobre el rectángulo $-1 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$ (véase Fig. 15.5)

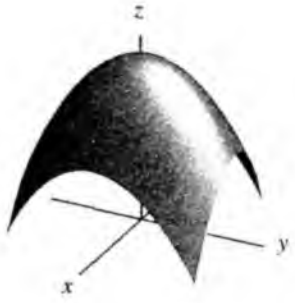


Figura 15.5 Gráfica de $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ sobre $-1 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$.

Solución Si R es el rectángulo $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, el volumen que buscamos está dado por

$$\text{Volumen} = \int_R (2 - x^2 - y^2)\, dA$$

La tabla 15.5 contiene valores de sumas de Riemann, S_n, calculados al subdividir el rectángulo en n^2 subrectángulos y evaluar f en el punto con valores mínimos de x y y. La tabla sugiere que el valor de la integral es aproximadamente 5.3.

TABLA 15.5 *Sumas de Riemann para* $\int_R (2 - x^2 - y^2)\, dA$

n	5	10	20	40
S_n	5.12	5.28	5.32	5.33

Interpretación de la integral definida cuando f es una función de densidad

Una función de dos variables puede representar una densidad por unidad de área, por ejemplo la densidad de población de zorras (en zorras por unidad de área), o la densidad de masa de una delgada placa metálica. Entonces, la integral $\int_R f\,dA$ representa la población total o masa total de la región R.

Interpretación de la integral definida como un valor promedio

Como en el caso de una variable, la integral definida puede emplearse para calcular el valor promedio de una función:

$$\text{Valor promedio de } f \text{ en la región } R = \frac{1}{\text{Área de } R} \int_R f\,dA$$

Esto puede reescribirse como

$$\text{Valor promedio} \times \text{área de } R = \int_R f\,dA.$$

De esta manera, si interpretamos la integral como el volumen bajo la gráfica de f, entonces podemos considerar el valor promedio de f como la altura de la caja con el mismo volumen que tiene la misma base (véase Fig. 15.6).

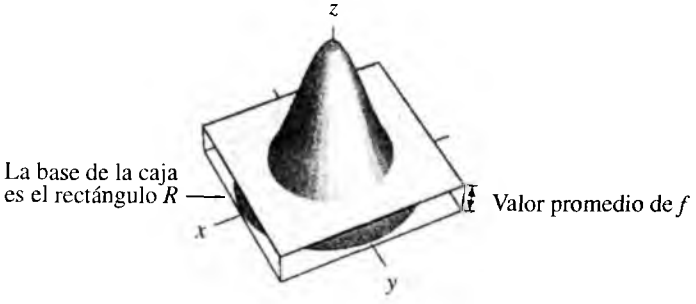


Figura 15.6 Volumen y valor promedio.

Una manera de visualizar esto es imaginarse que el volumen bajo la gráfica está hecho de cera; si la cera se derritiera y nivelara dentro de las paredes erigidas en el perímetro de R, entonces terminaría en forma de una caja con altura igual al valor promedio de f.

Problemas para la sección 15.1

1. Una función $f(x, y)$ tiene los valores de la tabla 15.6. Sea R el rectángulo $1 \le x \le 1.2$, $2 \le y \le 2.4$. Encuentre las sumas de Riemann que sean estimaciones razonables de más o de menos para $\int_R f(x, y)\,dA$ con $\Delta x = 0.1$ y $\Delta y = 0.2$.

TABLA 15.6

		x		
		1.0	1.1	1.2
y	2.0	5	7	10
	2.2	4	6	8
	2.4	3	5	4

2. La gráfica de $f(x, y) = 2 + xy$ forma un sólido sobre el rectángulo R con $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 4$. Mediante sumas de Riemann con cuatro subdivisiones, encuentre los límites superior e inferior para el volumen de este sólido.
3. Sea R el rectángulo con vértices (0, 0), (4, 0), (4, 4) y (0, 4) y sea $f(x, y) = \sqrt{xy}$.
   a) Encuentre límites superior e inferior razonables para $\int_R f\,dA$ sin subdividir R.
   b) Calcule $\int_R f\,dA$ dividiendo R en cuatro subrectángulos y evaluando f en sus valores máximo y mínimo en cada uno.
4. La figura 15.7 muestra la distribución de temperatura, en °C, en una habitación de 5 metros por 5 metros con calefacción. Mediante sumas de Riemann, calcule la temperatura promedio de la habitación.

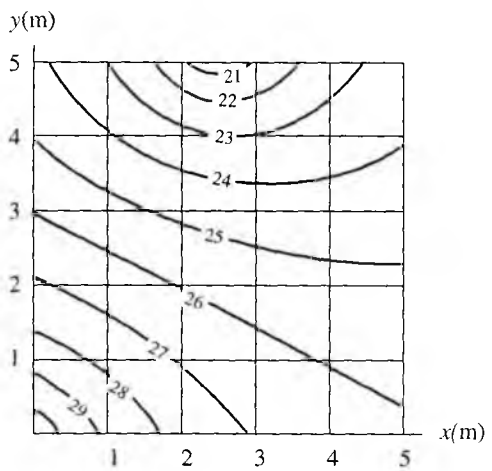


Figura 15.7

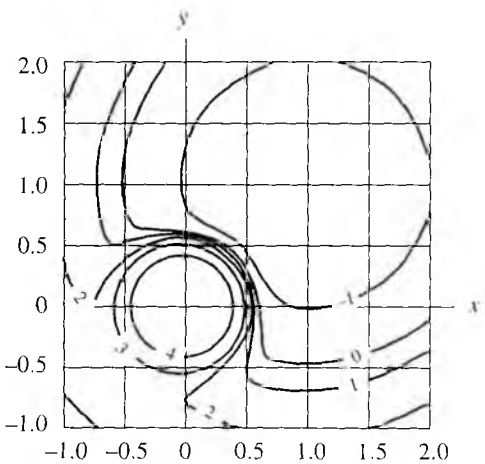


Figura 15.8

5. La figura 15.8 muestra el diagrama de contorno de una función $z = f(x, y)$. Sea R el cuadrado $-0.5 \le x \le 1$, $-0.5 \le y \le 1$. ¿Es positiva o negativa la integral $\int_R f\,dA$? Explique su razonamiento.
6. Un biólogo estudia la población de insectos y mide la densidad de población de moscas y mosquitos en diversos puntos en una región de estudio rectangular. En las figuras 15.9 y 15.10 se muestran las gráficas de las dos densidades de población para la región. Si suponemos que las unidades a lo largo de ejes correspondientes son las mismas en las dos gráficas, ¿hay más moscas o más mosquitos en la región?

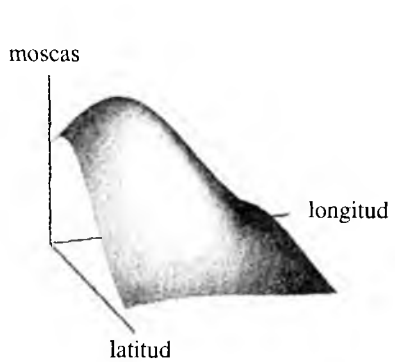


Figura 15.9

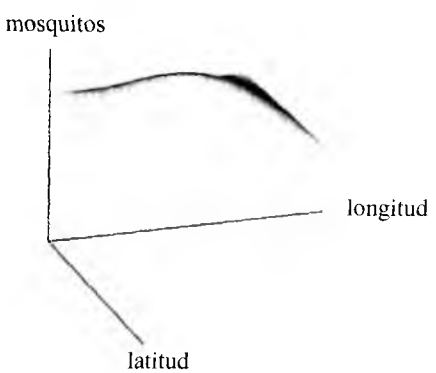


Figura 15.10

En los problemas 7 y 8 utilice un programa de computadora o calculadora que encuentre sumas bidimensionales de Riemann para calcular la integral dada.

7. Si R es el rectángulo $1 \le x \le 2$, $1 \le y \le 3$, calcule $\int_R (x^2 + y^2)\, dA$.

8. Si R es el rectángulo $-\pi \le x \le 0$, $0 \le y \le \pi/2$, calcule $\int_R \text{sen}\,(xy)\, dA$.

9. El casco de una embarcación tiene un ancho de $w(x, y)$ pies en un punto a x pies del frente y y pies abajo de la línea de flotación. A continuación se ilustra una tabla de valores de w. Formule una integral definida que indique el volumen del casco abajo de la línea de flotación y luego calcule el valor de la integral.

TABLA 15.7

Profundidad abajo de la línea de flotación (en pies) \ Frente de bote → Parte trasera de bote	0	10	20	30	40	50	60
0	2	8	13	16	17	16	10
2	1	4	8	10	11	10	8
4	0	3	4	6	7	6	4
6	0	1	2	3	4	3	2
8	0	0	1	1	1	1	1

10. Sea $f(x, y)$ una función de x y y que es independiente de y, es decir, $f(x, y) = g(x)$ para alguna función g de una variable.
    a) ¿Qué aspecto tiene la gráfica de f ?
    b) Sea R el rectángulo $a \le x \le b$, $c \le y \le d$. Por interpretación de la integral como volumen, y usando la respuesta del inciso a, exprese $\int_R f\, dA$ en términos de una integral de una variable.

11. La figura 15.11 muestra contornos para la frecuencia anual de tornados por cada 10 000 millas cuadradas en Estados Unidos.[4] Cada cuadrícula mide 100 millas por lado. Utilice el mapa para calcular el número total de tornados por año en a) Texas b) Florida c) Arizona

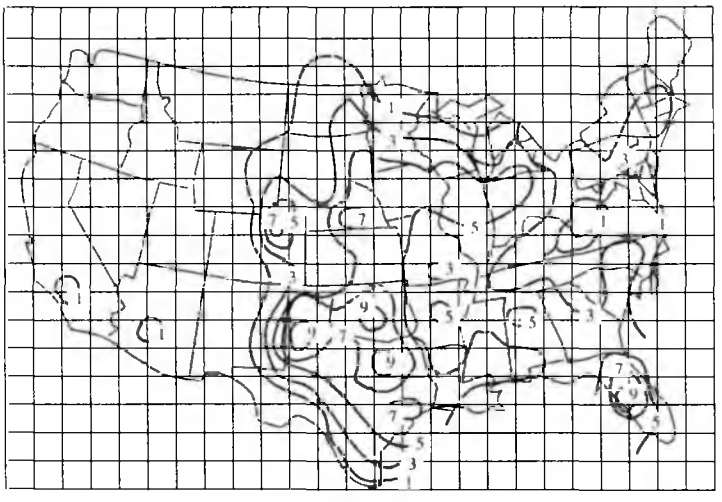


Figura 15.11

[4] De *Modern Physical Geography*, Alan H. Strahler y Arthur H. Strahler, 4a. ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 1992, pág. 128.

12. La figura 15.12 muestra contornos de cantidad de lluvia anual (en centímetros en Oregon[5]. Utilícela para calcular cuánta lluvia cae en Oregon en un año. Cada cuadrícula mide 100 kilómetros por lado.

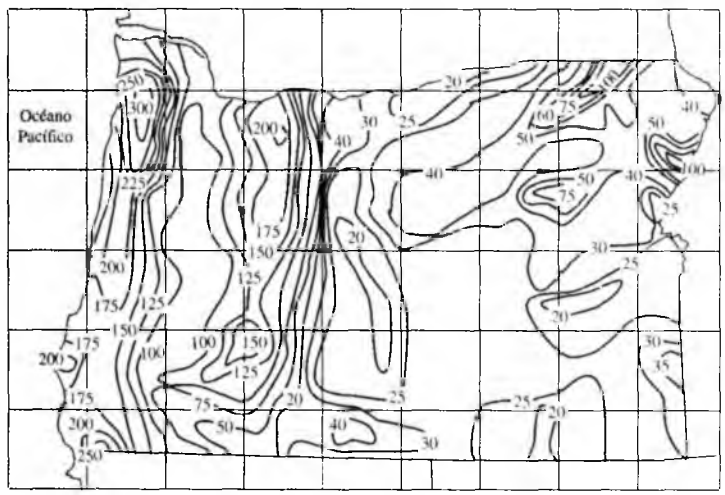


Figura 15.12

13. Sea D la región dentro de un círculo unitario con centro en el origen, sea R la mitad derecha de D y sea B la mitad inferior de D. Diga (sin calcular el valor de ninguna de las integrales) si cada integral es positiva, negativa o cero.

a) $\int_D dA$	b) $\int_B dA$	c) $\int_R 5x\, dA$	d) $\int_B 5x\, dA$
e) $\int_D dA$	f) $\int_D (y^3 + y^5)\, dA$	g) $\int_B (y^3 + y^5)\, dA$	h) $\int_R (y^3 + y^5)\, dA$
i) $\int_B (y - y^3)\, dA$	j) $\int_D (y - y^3)\, dA$	k) $\int_D \operatorname{sen} y\, dA$	l) $\int_D \cos y\, dA$
m) $\int_D e^x\, dA$	n) $\int_D xe^x\, dA$	o) $\int_D xy^2\, dA$	p) $\int_B x \cos y\, dA$

14. Para cualesquier números a y b, suponga que $|a + b| \leq |a| + |b|$. Utilice esto para explicar por qué

$$\left| \int_R f\, dA \right| \leq \int_R |f|\, dA.$$

15.2 INTEGRALES ITERADAS

En la sección 15.1 aproximamos integrales dobles empleando sumas de Riemann. En esta sección vemos la forma de calcular exactamente integrales dobles recurriendo a integrales ordinarias de una variable.

[5] De *Physical Geography of the Global Environment*, H. J. de Blij y Peter O. Muller, John Wiley & Sons, Nueva York, 1993, pág. 133.

Otra vez la población de zorras: expresar una integral doble como integral iterada

Para calcular la población de zorras calculamos una suma de la forma

$$\text{Población total} \approx \sum_{i,\,j} f(x_i, y_j)\,\Delta x \Delta y$$

donde $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le m$ y los valores $f(x_i, y_j)$ se pueden distribuir como en la tabla 15.8.

TABLA 15.8 *Límites superiores para densidades de población de zorras para* $n = m = 6$

0	0	0	0.8	1.5	1.5
0	0	0.5	1.5	1.5	1.5
0	0	1.5	2.5	1.9	2.3
0	1.2	2.2	2.5	2.5	2.5
0	1.3	2	2.2	2.5	0.5
0.6	1.3	1	1	1.3	0

Para cualquier valor de n y m, existen dos maneras de calcular esta suma: una consiste en sumar horizontalmente los renglones primero y la otra es sumar verticalmente las columnas primero. Si sumamos los renglones primero, podemos escribir la suma en la forma

$$\text{Población total} \approx \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta x \right) \Delta y$$

La suma interior, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta x$, aproxima la integral $\int_0^{180} f(x, y_j)\,dx$. Por lo tanto, tenemos

$$\text{Población total} \approx \sum_{j=1}^{m} \left(\int_0^{180} f(x, y_j)\,dx \right) dy$$

La suma exterior representa una suma de Riemann que aproxima otra integral, esta vez con integrando $\int_0^{180} f(x, y)\,dx$, que es una función de y. Así, podemos escribir la población total en términos de integrales anidadas de una variable:

$$\text{Población total} \approx \int_0^{150} \left(\int_0^{180} f(x, y)\,dx \right) dy$$

Como la población total está representada por $\int_R f\,dA$, hemos descubierto una manera de expresar integrales dobles:

> Si R es el rectángulo $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ y si $f(x, y)$ es una función continua de dos variables, entonces
>
> $$\int_R f\,dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx \right) dy$$
>
> La expresión $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx \right)$, o simplemente $\int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy$, se llama **integral iterada.**

La integral interior se realiza con respecto a x, manteniendo y constante, y luego el resultado se integra con respecto a y.

El paralelo entre sumatoria repetida e integración repetida

Es útil observar cómo la sumatoria y la notación de integral guardan entre sí un paralelismo. Visualizar una suma de Riemann como una suma de sumas,

$$\sum_{i,j} f(x_i, y_j)\,\Delta x \Delta y = \sum_j \left(\sum_i f(x_i, y_j)\,\Delta x \right) \Delta y$$

lleva a ver una integral doble como integral de integrales:

$$\int_R f(x, y)\,\Delta x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx \right) dy$$

donde R es el rectángulo $a \le x \le b$ y $c \le y \le d$.

Ejemplo 1 Un edificio mide 8 pies de ancho y 16 pies de largo; tiene un techo plano de 12 pies de alto en una esquina, y 10 pies de alto en cada una de las dos esquinas adyacentes. ¿Cuáles el volumen del edificio?

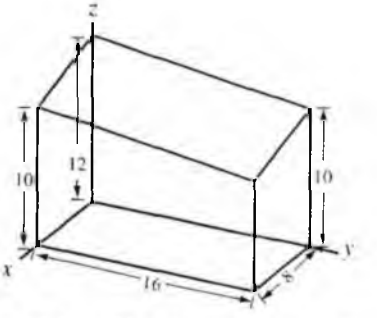


Figura 15.13 Cabaña con techo inclinado.

Solución Si ponemos la esquina más alta en el eje z, el lado largo en el eje y y el lado corto en el eje x, como en la figura 15.13, entonces el techo es un plano con intersección z de 12, y pendiente en x de $(-2)/8 = -1/4$ y pendiente y de $(-2)/16 = -1/8$. Por lo tanto, la ecuación del techo es

$$z = 12 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y.$$

Para calcular el volumen, integramos sobre el rectángulo $0 \le x \le 8$, $0 \le y \le 16$. Al formular una integral iterada obtenemos

$$\text{Volumen} = \int_0^{16} \int_0^8 \left(12 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y\right) dx\,dy.$$

La integral interior es

$$\int_0^8 \left(12 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y\right) dx = \left(12x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}xy\right)\Big|_0^8 = 88 - y.$$

Luego la integral exterior es

$$\int_0^{16} (88 - y)\, dy = (88y - \frac{1}{2} y^2) \Big|_0^{16} = 1280.$$

Así que el volumen del edificio es de 1280 pies cúbicos.

El orden de integración

Al calcular la población de zorras podríamos haber escogido sumar las columnas (x fija) primero, en lugar de los renglones. Esto lleva a una integral iterada donde x es constante en la integral interior en lugar de y. De este modo,

$$\int_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \left(\int_a^d f(x, y)\, dy \right) dx$$

donde R es el rectángulo $a \le x \le b$ y $c \le y \le d$.

Para cualquier función que pudiera encontrarse, no importa en qué orden integremos sobre una región rectangular R; se obtiene el mismo valor para la doble integral de cualquier modo.

$$\int_R f\, dA = \int_c^b \left(\int_a^d f(x, y)\, dy \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx$$

Ejemplo 2 Calcular el volumen del ejemplo 1 como una integral iterada con y fija en la integral interior.

Solución Al reescribir la integral tenemos

$$\text{Volúmen} = \int_0^8 \left(\int_0^{16} (12 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y)\, dy \right) dx = \int_0^8 \left((12y - \frac{1}{4}xy - \frac{1}{16}y^2) \Big|_0^{16} \right) dx$$

$$= \int_0^8 (176 - 4x)\, dx = (176x - 2x^2) \Big|_0^8 \, dx = 1280.$$

Integrales iteradas sobre regiones no rectangulares

Ejemplo 3 La densidad en el punto (x, y) de una placa metálica en forma de triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 15.14, es $d(x, y)$. Expresar su masa como una integral iterada.

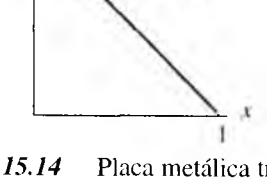


Figura 15.14 Placa metálica triangular con densidad $\delta(x, y)$ en el punto (x, y).

Solución Mediante
pieza esta

Al sumar

donde R
integral p
rectángul

Esta integ
de franjas
b. Por lo t
rior con r
tribucione

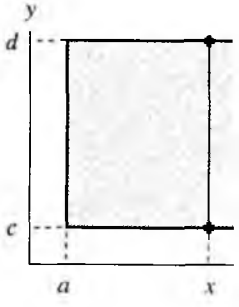


Figura 15.15 Integr
rectángulo usando fra

Para
franjas ve
gulo en el
la recta y =
lo tanto, l

Por último
a 1. En co

Podríamos
lugar de x

Solución Mediante una cuadrícula, divida la región en pequeños rectángulos de lado Δx y Δy. Así, la masa de una pieza está dada por

$$\text{Masa de rectángulo} \approx \text{Densidad} \cdot \text{Área} \approx \delta(x, y)\Delta x\, \Delta y.$$

Al sumar sobre todos los rectángulos se obtiene una suma de Riemann que aproxima una integral doble:

$$\text{Masa} = \int_R \delta(x, y)\, dA$$

donde R es el triángulo. El borde inclinado del triángulo es la recta $y = 1 - x$. Deseamos calcular esta integral por medio de una integral iterada. Consideremos cómo funciona una integral iterada sobre un rectángulo, como por ejemplo

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

Esta integral es sobre el rectángulo $a \le x \le b$, $c \le y \le d$. La integral interior con respecto a y es a lo largo de franjas verticales desde $y = c$ a $y = d$. Hay una de estas franjas para cada valor de x entre $x = a$ y $x = b$. Por lo tanto, el valor de la integral interior depende del valor de x. Después de calcular la integral interior con respecto a y, calculamos la integral exterior con respecto a x, lo que significa sumar las contribuciones de las franjas verticales individuales que forman el rectángulo (véase Fig. 15.15).

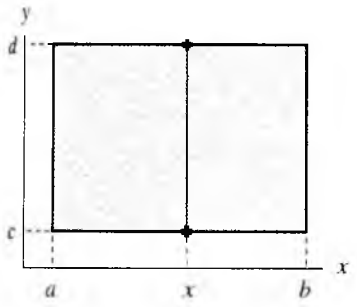


Figura 15.15 Integración sobre un rectángulo usando franjas verticales.

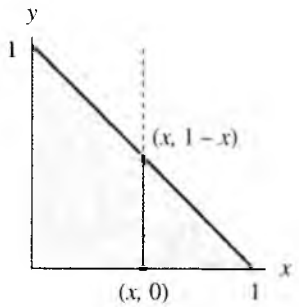


Figura 15.16 Integración sobre un triángulo usando franjas verticales.

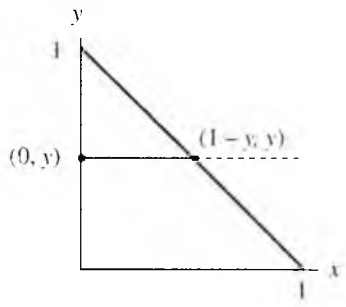


Figura 15.17 Integración sobre un triángulo usando franjas horizontales.

Para la región triangular de la figura 15.14, la idea es la misma. La única diferencia es que las franjas verticales individuales ya no van todas de $y = c$ a $y = d$. La franja vertical que entra al triángulo en el punto $(x, 0)$ sale del mismo en el punto $(x, 1 - x)$, porque el borde superior del triángulo es la recta $y = 1 - x$. Véase la figura 15.16. De este modo, en esta franja vertical, y pasa de 0 a $1 - x$. Por lo tanto, la integral interior es

$$\int_0^{1-x} \delta(x, y)\, dy.$$

Por último, como hay una de estas integrales para cada valor de x entre 0 y1, la integral exterior va de 0 a 1. En consecuencia, la integral iterada que buscamos es

$$\text{Masa} = \int_0^1 \int_0^{1-x} \delta(x, y)\, dy dx.$$

Podríamos haber escogido para integrar el orden opuesto, manteniendo y fija en la integral interior en lugar de x. Los límites se forman al ver franjas horizontales en lugar de verticales y expresando x

valores de x en los puntos de extremo en términos de y. Una franja horizontal típica va de $x = 0$ a $x = 1 - y$, y como los valores de y en su totalidad varían de 0 a 1, la integral iterada es

$$\text{Masa} = \int_0^1 \int_0^{1-y} \delta(x, y)\, dx dy.$$

Límites sobre integrales iteradas

- Los límites en la integral exterior deben ser constantes.
- Si la integral interior es con respecto a x, sus límites deben ser constantes o bien expresiones en términos de y, y viceversa.

Ejemplo 4 Encontrar la masa M de una placa metálica R limitada por $y = x$ y $y = x^2$, con densidad dada por $\delta(x, y) = 1 + xy$ kg/m^2 (véase Fig. 15.18).

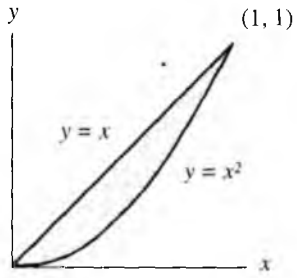


Figura 15.18 Placa metálica con densidad $\delta(x, y)$.

Solución La masa está dada por

$$\text{Masa} = \int_R \delta(x, y)\, dA.$$

Integramos primero franjas verticales; esto significa que hacemos primero la integral de y, que va de la frontera inferior $y = x^2$ a la frontera superior $y = x$. El borde izquierdo de la región está en $x = 0$ y el borde derecho está en el punto de intersección de $y = x$ y $y = x^2$, que es (1, 1). Por lo tanto, la coordenada x de las franjas verticales puede variar de $x = 0$ a $x = 1$, entonces la masa está dada por

$$M = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \delta(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (1 + xy)\, dy\, dx.$$

Al calcular la integral interior primero resulta

$$M = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (1 + xy)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\left(y + x\frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=x} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{12} \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{5}{24} \text{ kg}.$$

Ejemplo 5 Una ciudad está construida a la orilla del mar en forma de una región semicircular de 3 km de radio. Encontrar la distancia promedio desde cualquier punto de la ciudad al océano.

Solución Imagine el océano abajo del eje x en el plano xy y considere la ciudad como la mitad superior del disco circular de radio 3 limitado por $x^2 + y^2 = 9$ (véase Fig. 15.19).

La distancia desde cualquier punto (x, y) de la ciudad al océano es la distancia vertical al eje x, es decir y. Por lo tanto, buscamos calcular

$$\text{Distancia promedio} = \frac{1}{\text{Área } (R)} \int_R y \, dA,$$

donde R es la región entre la mitad superior del círculo $x^2 + y^2 = 9$ y el eje x. El área de R es $\pi 3^2/2 = 9\pi/2$. Para calcular la integral tomemos la integral interior con respecto a y. Una franja vertical típica va del eje x, es decir $y = 0$, al semicírculo. El límite superior debe expresarse en términos de x, de modo que despejamos $x^2 + y^2 = 9$ para obtener $y = \sqrt{9 - x^2}$. Como x varía de -3 a 3 en toda la región, la integral es:

$$\int_R y \, dA = \int_{-3}^{3} \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} y \, dy \right) dx = \int_{-3}^{3} \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{9-x^2}} \right) dx$$

$$= \int_{-3}^{3} \frac{1}{2}(9 - x^2)\, dx = \frac{1}{2}\left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{3} = \frac{1}{2}(18 - (-18)) = 18.$$

Por lo tanto, la distancia promedio es $18/(9\pi/2) = 4/\pi$ km.

¿Qué pasaría si escogemos integrar primero con respecto a x? Entonces obtenemos los límites al considerar franjas horizontales, no verticales, y de $x^2 + y^2 = 9$ despejamos x en términos de y. Obtenemos $x = -\sqrt{9 - y^2}$ en el extremo izquierdo de la franja y $x = \sqrt{9 - y^2}$ a la derecha. Ahora y varía de 0 a 3 y, por lo tanto, la integral se convierte en:

$$\int_R y \, dA = \int_0^3 \left(\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} y \, dx \right) dy = \int_0^3 \left(yx \Big|_{x=-\sqrt{9-y^2}}^{x=\sqrt{9-y^2}} \right) dy = \int_0^3 2y\sqrt{9 - y^2}\, dy$$

$$= -\frac{2}{3}(9 - y^2)^{3/2}\Big|_0^3 = -\frac{2}{3}(0 - 27) = 18.$$

Se obtiene el mismo resultado que antes. En consecuencia, la distancia promedio al océano es $(2/(9\pi))18 = 4/\pi$ km.

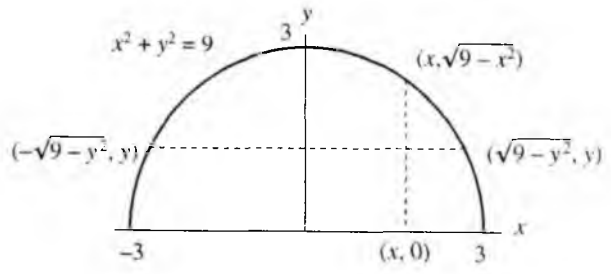


Figura 15.19 La ciudad junto al océano mostrando una franja vertical típica y una franja horizontal típica.

En los ejemplos vistos hasta aquí, se dio la región y el problema era determinar los límites para la integral iterada. A veces sólo se conocen los límites y lo que buscamos es determinar la región.

Ejemplo 6 Trazar la región de integración de la integral iterada $\int_0^6 \int_{x/3}^2 x\sqrt{y^3+1}\, dy\, dx$.

Solución La integral interior es con respecto a y, así que imaginamos franjas verticales que cruzan la región de integración. La parte inferior de cada franja es $y = x/3$, una recta que pasa por el origen, y la parte superior es $y = 2$, una recta horizontal. Como los límites de la integral exterior son 0 y 6, toda la región está contenida entre las rectas verticales $x = 0$ y $x = 6$. Observe que las rectas $y = 2$ y $y = x/3$ se encuentran donde $x = 6$. La región se muestra en la figura 15.20.

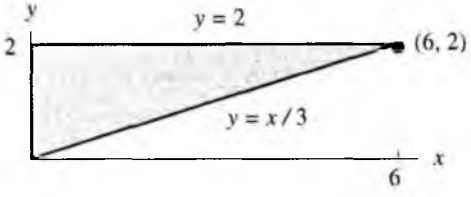


Figura 15.20 Región de integración para el ejemplo 6.

Inversión de orden de integración

A veces puede ser útil invertir el orden de integración en una integral iterada. Es sorprendente que una integral difícil o imposible de calcular con los límites en un orden, pueda ser tan fácil en el otro. El siguiente ejemplo es uno de tales casos.

Ejemplo 7 Evaluar $\int_0^6 \int_{x/3}^2 x\sqrt{y^3+1}\, dy\, dx$ usando la región trazada en la figura 15.20.

Solución Puesto que $\sqrt{y^3+1}$ no tiene antiderivada elemental, no podemos calcular simbólicamente la integral interior. Intentémoslo invirtiendo el orden de integración. De la figura 15.20 vemos que las franjas horizontales van de $x = 0$ a $x = 3y$. En toda la región, y varía de 0 a 2. Por lo tanto, cuando cambiamos el orden de integración resulta

$$\int_0^6 \int_{x/3}^2 x\sqrt{y^3+1}\, dy\, dx = \int_0^2 \int_0^{3y} x\sqrt{y^3+1}\, dx\, dy.$$

Ahora podemos por lo menos hacer la integral interior porque conocemos la antiderivada de x. ¿Qué pasa con la integral exterior?

$$\int_0^2 \int_0^{3y} x\sqrt{y^3+1}\, dx\, dy = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2}\sqrt{y^3+1}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=3y} dy = \int_0^2 \frac{9y^2}{2}(y^3+1)^{1/2}\, dy.$$

$$= (y^3+1)^{3/2}\Big|_0^2 = 27 - 1 = 26.$$

Así, invertir el orden de integración hizo mucho más fácil el problema anterior. Observe que antes de invertir el orden es esencial trazar la región sobre la que se realiza la integración.

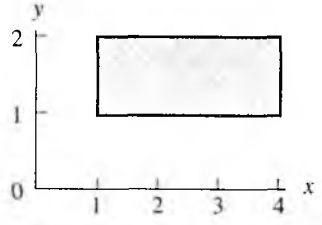
Problemas para la sección 15.2

Para los problemas del 1 al 4, evalúe la integral dada.

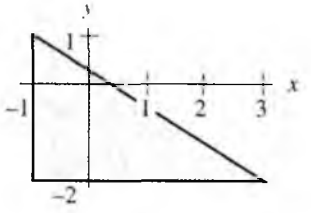
1. $\int_R \sqrt{x+y}\ dA$, donde R es el rectángulo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.
2. Calcule la integral del problema 1 usando el otro orden de integración.
3. $\int_R (5x^2 + 1) \operatorname{sen} 3y\ dA$, donde R es el rectángulo $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le \pi/3$.
4. $\int_R (2x + 3y)^2\ dA$, donde R es el triángulo con vértices en $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$

Para cada una de las regiones R en los problemas del 5 al 8, escriba $\int_R f\,dA$ como una integral iterada.

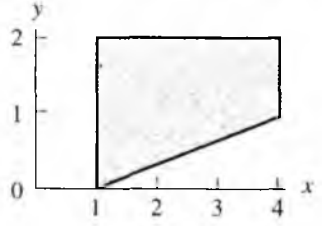
5.



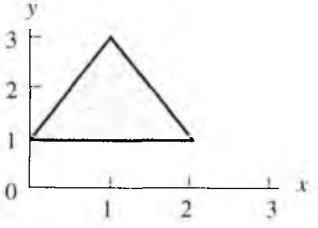
6.



7.



8.



Para los problemas del 9 al 13, trace la región de integración y evalúe la integral.

9. $\int_1^3 \int_0^4 e^{x+y}\,dy\,dx$
10. $\int_0^2 \int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx$
11. $\int_1^5 \int_x^{2x} \operatorname{sen}(x)\,dy\,dx$
12. $\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^{y} x^2y^3 dx\,dy$
13. $\int_{-2}^{0} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} 2xy\,dy\,dx$
14. Considere la integral $\int_0^4 \int_0^{-(y-4)/2} g(x, y)\,dx\,dy$.
    a) Trace la región sobre la que se efectúa la integración.
    b) Escriba la integral con el orden de integración invertido.

Evalúe la integral en los problemas 15, 16 y 17, invirtiendo el orden de integración.

15. $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx\,dy$
16. $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \operatorname{sen}(x^2)\,dx\,dy$
17. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{2 + x^3}\,dx\,dy$

18. Invierta el orden de integración $\int_{-4}^{0}\int_{0}^{2x+8} f(x,y)dy\,dx + \int_{0}^{4}\int_{0}^{-2x+8} f(x,y)dy\,dx$.

Para los problemas 19, 20 y 21 formule, pero no evalúe, una integral iterada para el volumen del sólido.

19. Bajo la gráfica de $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ y arriba del plano xy.
20. Abajo de la gráfica de $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ y arriba del plano $z = 16$.
21. La pirámide de tres lados cuya base está en el plano xy y cuyos tres lados son los planos verticales $y = 0$ y $y - x = 4$, y el plano inclinado $2x + y + z = 4$.

Para los problemas 22, 23 y 24, encuentre el volumen de la región dada.

22. Bajo la gráfica de $f(x, y) = xy$ y arriba del cuadrado $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$ en el plano xy.
23. El sólido entre los planos $z = 3x + 2y + 1$ y $z = x + y$, y arriba del triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(2, 2, 0)$ y $(0, 1, 0)$ en el plano xy. Véase la figura 15.21.

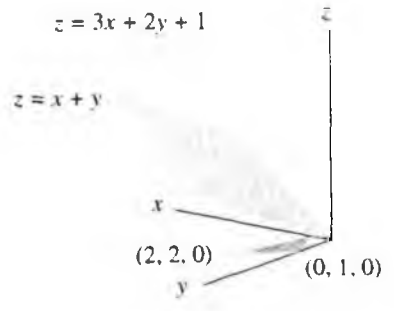


Figura 15.21

24. La región R acotada por la gráfica de $ax + by + cz = 1$ y los planos coordenados. Suponga que a, b y c son positivas.
25. Encuentre el promedio de distancia al eje x para los puntos de la región limitada por el eje x y la gráfica de $y = x - x^2$.
26. Demuestre que, para un triángulo rectángulo, la distancia promedio desde cualquier punto del triángulo a uno de los catetos es un tercio de la longitud del otro cateto. (Los catetos de un triángulo rectángulo son los dos lados que no son la hipotenusa.)

27. Evalúe $\int_{0}^{1}\int_{y}^{1} \operatorname{sen}(x^2)dx\,dy$

28. Evalúe $\int_{0}^{1}\int_{e^y}^{e} \frac{x}{\ln x}dx\,dy$.

29. Con frecuencia, en los aeropuertos, las puertas de salida están alineadas en una terminal como puntos a lo largo de una recta. Si una persona llega a una puerta y tiene que llegar otra para abordar un vuelo de enlace, ¿qué proporción de la longitud de la terminal tendrá que caminar, en promedio? Esto puede modelarse si se seleccionan de manera aleatoria dos números, $0 \le x \le 1$ y $0 \le y \le 1$, y se calcula el valor promedio de $|x - y|$. Utilice una doble integral para demostrar que, en promedio, la persona tiene que caminar 1/3 de la longitud de la terminal.

30. En realidad, en el problema 29, las puertas de la terminal no están ubicadas continuamente de 0 a 1, como supusimos. Sólo hay un número finito de puertas y es probable que estén a distancias iguales. Supongamos que hay $n + 1$ puertas ubicadas a $1/n$ de distancia de un extremo de la terminal ($x_0 = 0$) al otro ($x_n = 1$). Si suponemos que todos los pares (i, j) de puertas de llegada y salida son igualmente probables, demuestre que

$$\text{Promedio de distancia entre dos puertas} = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \left| \frac{i}{n} - \frac{j}{n} \right|.$$

Identifique esta suma, aproximada (pero no exactamente), con una suma de Riemann de n subdivisiones para el integrando empleado en el problema 29. Calcule esta suma para $n = 5$ y $n = 10$ y compare con la respuesta de 1/3 obtenida en el problema 29.

15.3 INTEGRALES TRIPLES

Una función continua de tres variables puede integrarse en una región sólida W en el espacio, de la misma manera que una función de dos variables se integra sobre una región plana en dos dimensiones. De nueva cuenta, comenzamos con una suma de Riemann. Primero subdividimos W en pequeñas regiones, luego multiplicamos el volumen de cada región por un valor de la función de esa región y luego sumamos los resultados. Por ejemplo, si W es la caja $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, $p \le z \le q$, entonces subdividimos cada lado en l, m y n partes, seccionando por lo tanto a W en lmn cajas más pequeñas, como se muestra en la figura 15.22.

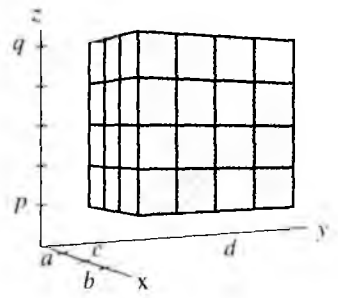


Figura 15.22 Subdivisión de una caja en tres dimensiones.

El volumen de cada cajita es

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z,$$

donde $\Delta x = (b - a)/l$, $\Delta y = (d - c)/m$, y $\Delta z = (q - p)/n$. Al usar esta subdivisión, escogemos un punto (x_i, y_j, z_k) en la ijk -ésima cajita y hacemos una suma de Riemann

$$\sum_{i,\,j,\,k} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta V.$$

Si f es continua, conforme Δx, Δy y Δz se aproximan a 0, esta suma de Riemann se aproxima a la integral definida, $\int_W f\, dV$, llamada *integral triple,* que se define como

$$\int_W f\, dV = \lim_{l,\,m,\,n \to \infty} \sum_{i,\,j,\,k} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta V.$$

Como en el caso de una integral doble, podemos evaluar esta integral como una integral iterada:

Integral triple como una integral iterada

$$\int_w f\,dV = \int_p^q \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z)\,dx \right) dy \right) dz,$$

donde y y z se tratan como constantes en la integral interior (dx), y z se trata como una constante en la integral de en medio (dy). La integración puede efectuarse en cualquier orden.

Ejemplo 1 Un cubo C tiene lados de 4 cm de longitud y está hecho con un material de densidad variable. Si un vértice está en el origen y los vértices adyacentes están en los ejes positivos x, y y z, entonces la densidad (en gm/cm^3) en el punto (x, y, z) es $\delta(x, y, z) = 1 + xyz$ gm/cm^3. Encontrar la masa del cubo.

Solución Considere un pedacito ΔV del cubo, suficientemente pequeño para que la densidad permanezca casi constante sobre él. Entonces

$$\text{Masa de un pedacito} = \text{Densidad} \cdot \text{Volumen} \approx \delta(x, y, z)\,\Delta V.$$

Para obtener la masa total, sumamos las masas de los pedacitos y tomamos el límite conforme $\Delta V \to 0$. Por lo tanto, la masa es la integral triple

$$M = \int_C \delta\,dV = \int_0^4\int_0^4\int_0^4 (1 + xyz)\,dx\,dy\,dz = \int_0^4\int_0^4 \left[x + \frac{1}{2}x^2yz \right]_{x=0}^{x=4} dy\,dz$$

$$= \int_0^4\int_0^4 (4 + 8yz)\,dy\,dz = \int_0^4 [4y + 4y^2z]_{y=0}^{y=4}\,dz = \int_0^4 (16 + 64z)\,dz = 576 \text{ gm}.$$

Ejemplo 2 Expresar el volumen del edificio descrito en el ejemplo 1 de la página 236 como una integral triple.

Solución El edificio está descrito por $0 \le x \le 8$, $0 \le y \le 16$, y $0 \le z \le 12 - x/4 - y/8$ (véase Fig. 15.23). Para encontrar su volumen, lo dividimos en pequeños cubos de volumen $\Delta V = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ y sumamos. Primero formamos una columna vertical de cubos sobre el punto $(x, y, 0)$. Esta columna va de $z = 0$ a $z = 12 - x/4 - y/8$, y

$$\text{Volumen de la columna vertical} \approx \sum_z \Delta V = \sum_z \Delta x\Delta y\Delta z = \left(\sum_z \Delta z \right) \Delta x\,\Delta y.$$

A continuación alineamos estas columnas en forma paralela al eje y para formar una rebanada desde $y = 0$ a $y = 16$. Por lo tanto

$$\text{Volumen de la rebanada} \approx \left(\sum_y \sum_z \Delta z\Delta y \right) \Delta x.$$

Por último, alineamos las rebanadas a lo largo del eje x desde $x = 0$ hasta $x = 8$ y sumamos sus volúmenes, para obtener

$$\text{Volumen del edificio} \approx \sum_x \sum_y \sum_z \Delta z\,\Delta y\,\Delta x.$$

Por lo tanto,

Ejemplo 3 Formul
la dens

Solución El cono
$\Delta x\,\Delta y\,\Delta$
mente δ
0) come

Hay una
$\sqrt{x^2 + y^2}$

Por lo tanto, en el límite,

$$\text{Volumen del edificio} \approx \int_0^8 \int_0^{16} \int_0^{12 - x/4 - y/8} 1 \, dz \, dy \, dx.$$

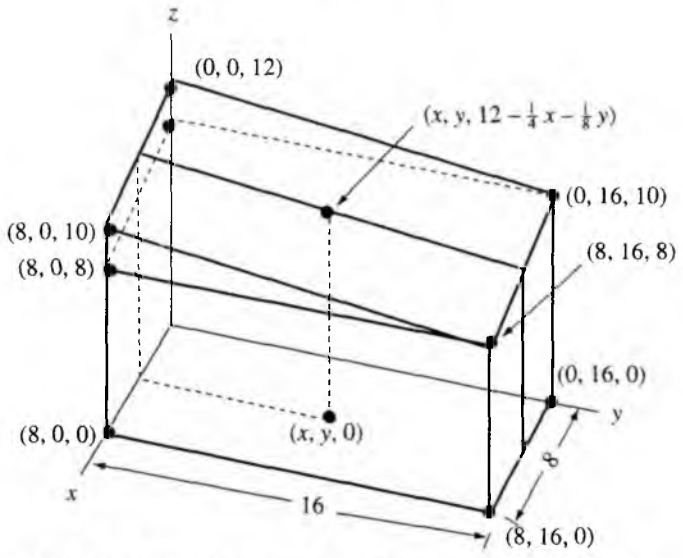


Figura 15.23 Volumen del edificio como integral triple.

Ejemplo 3 Formular una integral iterada para calcular la masa del cono sólido limitado por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 3$, si la densidad está dada por $\delta(x, y, z) = z$.

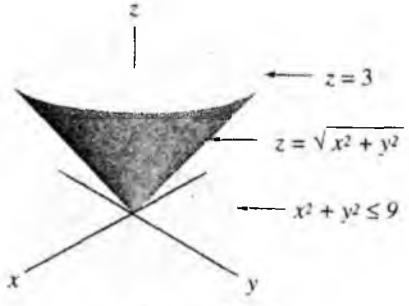


Figura 15.24

Solución El cono se muestra en la figura 15.24. Descomponemos el cono en pequeños cubos de volumen $\Delta V = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$, en los que la densidad es aproximadamente constante. La masa de cada cubo es aproximadamente $\delta(x, y, z) \, \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$. El hecho de acomodar los cubos en columnas verticales sobre el punto $(x, y, 0)$ comenzando en el cono a la altura $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y subiendo a $z = 3$, indica que la integral interior es

$$\int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^{3} \delta(x, y, z) \, dz = \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^{3} z \, dz.$$

Hay una columna para cada punto del plano xy en la sombra proyectada por el cono. Como el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ corta al plano horizontal $z = 3$ en el círculo $x^2 + y^2 = 9$, esto quiere decir que hay una columna

para toda (x, y) en la región $x^2 + y^2 \leq 9$. Al alinear las columnas en forma paralela al eje y resulta una rebanada de $y = -\sqrt{9 - y^2}$ a $y = \sqrt{9 - y^2}$, para cada valor fijo de x. Por lo tanto, los límites en la integral intermedia son

$$\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} z \, dz \, dy.$$

Por último, hay una rebanada para cada x entre -3 y 3, así que la integral que buscamos es

$$\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} z \, dz \, dy \, dx.$$

Observe que para establecer los límites en las dos integrales exteriores seguimos el mismo procedimiento que al establecer los límites para una doble integral sobre la región $x^2 + y^2 \leq 9$.

Como se ilustra en el ejemplo anterior, para una región W contenida entre dos superficies, los límites interiores corresponden a estas superficies. Los límites medio y exterior aseguran que se integra sobre la "sombra" de W en el plano xy.

Límites sobre integrales triples

- Los límites para la integral exterior son constantes.
- En los límites para la integral media sólo interviene una variable (la de la integral exterior).
- En los límites para la integral interior intervienen dos variables (las de las dos integrales exteriores).

Problemas para la sección 15.3

En los problemas del 1 al 4, encuentre las integrales triples de las funciones dadas sobre las regiones dadas.

1. $f(x, y, z) = x^2 + 5y^2 - z$, W es la caja rectangular $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 1$, $2 \leq z \leq 3$.
2. $f(x, y, z) = \operatorname{sen} x \cos(y + z)$, W es el cubo $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, $0 \leq z \leq \pi$.
3. $h(x, y, z) = ax + by + cz$, W es la caja rectangular $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$.
4. $f(x, y, z) = e^{-x-y-z}$, W es la caja rectangular con vértices en $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, y $(0, 0, c)$.

Para los problemas del 5 al 11 describa o trace la región de integración para las integrales triples. Si los límites no tienen sentido, diga por qué.

5. $\int_0^3 \int_0^{3-x/2} \int_0^{6-x-2y} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$

6. $\int_0^1 \int_0^x \int_0^x f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$

7. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^x f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$

8. $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{0} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$

9. $\int_1^3 \int_1^{x+y} \int_0^{y} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$.

10. $\int_0^1 \int_0^{2-x} \int_0^{3} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$

11. $\int_{-1}^{1} \int^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

12. Encuentre el volumen de la pirámide con base en el plano $z = -6$ y lados formados por los tres planos $y = 0$, $y - x = 4$ y $2x + y + z = 4$.

13. Encuentre la masa del sólido limitado por el plano xy, el plano yz, el plano xz y el plano $(x/3) + (y/2) + (z/6) = 1$, si la densidad del sólido está dada por $\delta(x, y, z) = x + y$.

14. Encuentre el valor promedio de la suma de los cuadrados de tres números x, y, z, donde cada número está entre 0 y 2.

15. Formule, pero no evalúe, una integral iterada para el volumen del sólido formado por las intersecciones de los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $y^2 + z^2 = 1$.

El movimiento de un objeto sólido se puede analizar considerando la masa como concentrada en un solo punto, el *centro de masa*. Si el objeto tiene densidad $\rho(x, y, z)$ en el punto (x, y, z) y ocupa una región W, entonces las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del centro de masa están dadas por

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_W x\rho dV \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\int_W y\rho dV \qquad \bar{z} = \frac{1}{m}\int_W z\rho dV$$

donde $m = \int_W \rho\, dV$ es la masa total del cuerpo. Utilice estas definiciones para los problemas 16 y 17.

16. Un sólido está limitado abajo por el cuadrado $z = 0$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ y arriba por la superficie $z = x + y + 1$. Encuentre la masa total y las coordenadas del centro de masa si la densidad es 1 gm/cm^3 y x, y, z se miden en centímetros.

17. Encuentre el centro de masa del tetraedro que está acotado por los planos x, y y z y el plano $x + y/2 + z/3 = 1$. Suponga que la densidad es 1 gm/cm^3.

El *momento de inercia* de un cuerpo sólido, alrededor de un eje en el espacio, indica la aceleración angular alrededor de este eje para un momento de torsión (fuerza que tuerce al cuerpo). Los momentos de inercia de un cuerpo de densidad constante y masa m, que ocupa una región W de volumen V, alrededor de los ejes coordenados están definidos por

$$I_x = \frac{m}{V}\int_W (y^2 + z^2)\, dV \qquad I_y = \frac{m}{V}\int_W (x^2 + z^2)\, dV \qquad I_z = \frac{m}{V}\int_W (x^2 + y^2)\, dV$$

Utilice estas definiciones para los problemas 18, 19 y 20.

18. Encuentre el momento de inercia alrededor del eje z del sólido rectangular de masa m dado por $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3$.

19. Encuentre el momento de inercia alrededor del eje x del sólido rectangular $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$ y $-c \le z \le c$ de masa m.

20. Denotemos por a, b y c los momentos de inercia de un objeto sólido homogéneo alrededor de los ejes x, y y z, respectivamente. Explique por qué $a + b > c$.

15.4 INTEGRACIÓN NUMÉRICA: EL MÉTODO DE MONTECARLO

Existen muchas integrales definidas de una variable donde el integrando no tiene antiderivada elemental. Un ejemplo conocido es $\int_0^1 e^{-x^2} dx$. Existen también integrales dobles y triples insolubles. Se pueden aproximar por sumas de Riemann o por una variante de la regla de Simpson (véase el problema 10). En esta sección damos un método opcional que recibe el nombre de método de Montecarlo (por el centro turístico).

Ejemplo de una variable

Consideremos la integral $\int_0^1 x^2\,dx$, cuyo valor, según sabemos, es 1/3. Ahora lo aproximaremos en forma probabilística. Graficamos la función $y = x^2$ en el cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ y lanzamos dardos al cuadrado. Esperamos que algunos dardos se claven arriba de la curva y otros abajo. La fracción de los dardos que se claven abajo de la curva es un estimado de la proporción entre el área bajo la curva y el área del cuadrado. Ésta es la base del método de Montecarlo.

Ejemplo 1 Aproximar la integral $\int_0^1 x^2\,dx$ usando el método de Montecarlo.

Solución Si seleccionamos al azar puntos del cuadrado unitario de la figura 15.25, esperamos que la relación entre el número de puntos de la región R, por ejemplo, N_R, y el número total de puntos, N, aproxime la integral:

$$\frac{N_R}{N} \approx \frac{\int_0^1 x^2\,dx}{\text{Área del cuadrado unitario}} = \int_0^1 x^2\,dx$$

Como estamos seleccionando los puntos al azar no podemos esperar obtener la misma proporción todo el tiempo, pero conforme aumenta el número de puntos, la aproximación debe mejorar. La tabla 15.9 muestra los valores de N_R/N para seis intentos diferentes cada uno con $N = 50$ puntos. Éstos, y todos los demás intentos subsecuentes, se obtuvieron usando un programa de computadora para generar puntos al azar en la región y contando cuántos cayeron dentro de R.

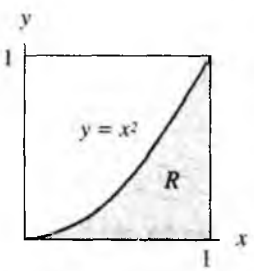


Figura 15.25 Región cuya área es $\int_0^1 x^2\,dx$ como fracción del cuadrado unitario.

TABLA 15.9 *Seis intentos, cada uno con $N = 50$ puntos*

$N = 50$	1	2	3	4	5	6
N_R / N	0.2	0.24	0.52	0.36	0.38	0.28

Estas aproximaciones son particularmente buenas. Su promedio es 0.33, que tiene dos dígitos de precisión. Si se repite este proceso otra vez para $N = 50$ se obtienen los resultados de la tabla 15.10.

TABLA 15.10 *Seis intentos más para $N = 50$ puntos*

$N = 50$	1	2	3	4	5	6
N_R / N	0.44	0.42	0.28	0.34	0.28	0.32

Observe que el promedio de éstos es 0.347, que no es tan cercano como el verdadero valor de 1/3 de antes, pero recuerde que éste es un proceso aleatorio. Cada vez que se repita esperamos un resultado diferente. Para continuar con este ejemplo, ahora aproximamos $\int_0^1 x^2\,dx$ tomando valores cada vez mayores de N, por ejemplo $N = 10$, 100, 1000 y 10 000. Los resultados de un experimento de computadora aparecen en la tabla 15.11, pero si realizamos un experimento semejante es probable que los resultados sean ligeramente diferentes. De cualquier modo, es evidente que conforme N aumenta, la relación se acerca más al valor exacto de 1/3.

TABLA 15.11 *Valor de N_R / N a medida que N aumenta*

N	10	100	1000	10000
N_R / N	0.2000	0.3400	0.3250	0.3343

La base del método de Montecarlo es la generación de números aleatorios. Por fortuna, casi todos los lenguajes de programación de computadoras cuentan con un generador de números aleatorios. Dos números aleatorios cualesquiera, x y y, entre 0 y 1, dan un punto (x, y) en el cuadrado unitario. Entonces uno se cerciora de si $y \leq x^2$. Si esto es cierto, el punto está en la región bajo la parábola. Suponemos que es igualmente probable que se escoja cada punto, lo cual hace posible que calculemos el área de la región bajo la parábola por el siguiente método.

Método de Montecarlo para calcular una integral

Supongamos que la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ está dada por el área de una región, R. Encierre la región en un rectángulo de área A. Si se escogen al azar N puntos de A y N_R de ellos caen en la región R, entonces esperamos que

$$\frac{N_R}{N} \approx \frac{\text{Área } (R)}{\text{Área } (A)} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\text{Área } (A)}.$$

Un ejemplo de dos variables

Se puede ampliar la idea del método de Montecarlo para evaluar integrales de más de una variable.

Ejemplo 2 Utilizar un método de Montecarlo para aproximar la integral doble

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Solución Esta integral expresa el volumen de la región W arriba del cuadrado unitario y abajo de la gráfica de $z = e^{-(x^2+y^2)}$. Como el volumen que estamos considerando está contenido en el cubo C dado por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, y $0 \leq z \leq 1$, contamos puntos de la forma (x, y, z) que estén en el cubo y satisfagan la condición

$$0 \leq z \leq e^{-(x^2+y^2)}.$$

Si N_R de los N puntos escogidos al azar satisfacen esta condición, entonces, como $\text{Vol}(C) = 1$, tenemos

$$\frac{N_R}{N} \approx \frac{\text{Vol}(W)}{\text{Vol } (C)} = \text{Vol}(W) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

TABLA 15.12 *Diez intentos, cada uno con* $N = 100$

$N = 100$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N_R / N	0.54	0.60	0.57	0.60	0.51	0.53	0.59	0.56	0.56	0.57

La tabla 15.12 muestra el valor de N_R / N para diez intentos de $N = 100$ puntos cada uno. El promedio de los diez valores N_R / N es 0.563. Tomamos esto como un valor aproximado de la integral. Al tomar $N = 10\,000$ resulta

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{-(x^2 + y^2)}\, dx\, dy \approx \frac{N_R}{N} \approx 0.5654.$$

Esto es consistente con la estimación hecha en el ejemplo 2 de la página 228.

Cuando se use el método de Montecarlo, es importante seleccionar una pequeña caja C que contenga totalmente a la región W. Por intuición, cuanto mejor sea el ajuste entre los dos volúmenes, se necesitan menos puntos aleatorios para obtener una aproximación razonable. De hecho, el problema más grande con el método de Montecarlo es encontrar una caja rectangular suficientemente pequeña que encierre el volumen.

Problemas para la sección 15.4

Para resolver los problemas del 1 al 9 necesita una computadora o calculadora que genere números aleatorios.

1. Utilice un método de Montecarlo para aproximar la integral $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$. Explique geométricamente por qué su respuesta indica una aproximación para $\pi/4$.
2. Utilice un método de Montecarlo para aproximar la integral $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$.
3. Aproxime la integral $\int_0^1 \int_0^1 = e^{-xy}\, dx\, dy$ a cuatro lugares decimales.
4. Aproxime la integral $\int_0^1 \int_0^1 = xy^{xy}\, dx\, dy$ a dos lugares decimales.
5. Aproxime la integral $\int_0^\pi \int_0^2 = x \operatorname{seny}\, dx\, dy$ y compare su resultado a la respuesta exacta.
6. Explique por qué el método de Montecarlo no sirve para aproximar la integral $\int_0^1 \int_0^1 = x^{-y}\, dx\, dy$.

En el método de Montecarlo, descrito en el texto, generamos tercias de números aleatorios y evaluamos la función en los primeros dos números para calcular una integral doble. Aquí está otro método de Montecarlo que exige sólo pares de números aleatorios. Recuerde que

$$\text{Valor promedio de } f(x, y) \text{ en } R = \frac{1}{\text{Área } (R)} \int_R f(x, y)\, dx\, dy.$$

Puede calcularse el valor promedio de f si se escogen N puntos, (x_i, y_i), al azar en R, se suman los valores de f en aquellos puntos y se divide entre N, con lo que resulta

$$A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i).$$

De esta manera, obtenemos la aproximación

$$\int_R f\, dA \approx \text{Área } (R) \cdot A$$

En los problemas 7, 8 y 9 utilice este método para aproximar las integrales a dos lugares decimales de precisión.

7. La integral del problema 3. 8. La integral del problema 4. 9. La integral del problema 5.

10. A continuación, se presenta una manera de emplear dos veces la regla de Simpson para aproximar una integral definida. Supongamos que la integral es $\int_1^5 \int_2^6 = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$. Utilice la regla de Simpson con $\Delta y = 1$ para aproximar la integral interior cuando x permanece fija en 1. Repita para $x = 1.5,2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5$. Ahora tenemos aproximaciones para la integral interior en nueve valores diferentes de x. Utilice otra vez la regla de Simpson con $\Delta x = 1$, usando los nueve valores diferentes de la integral interior para aproximar la integral exterior (y, por lo tanto, toda la integral doble).

15.5 INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

Integración en coordenadas polares

Este capítulo se inició colocando una cuadrícula rectangular sobre el mapa de densidad de población, para calcular la población total usando una suma de Riemann. Hay ocasiones, sin embargo, en que una retícula polar es más conveniente. En el apéndice G se incluye un repaso de las coordenadas polares.

Ejemplo 1 Un biólogo que estudia la población de insectos que hay alrededor de un lago circular divide la zona en sectores polares, como en la figura 15.26. La densidad de población de cada sector se muestra en millones por km cuadrado. Calcular la población total de insectos que hay alrededor del lago.

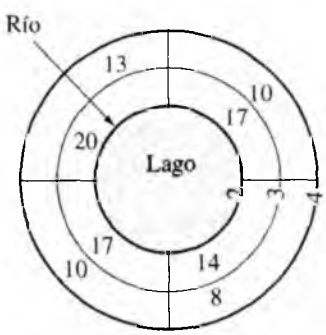


Figura 15.26 Lago infestado de insectos mostrando la densidad de población de insectos por sector.

Solución Para obtener nuestro cálculo multiplicamos la densidad de población de cada sector por el área de ese sector. A diferencia de los rectángulos de una cuadrícula rectangular, los sectores en esta retícula no tienen todos la misma área. Los sectores interiores tienen área de

$$\frac{1}{4}(\pi 3^2 - \pi 2^2) = \frac{5\pi}{4} \approx 3.93 \text{ km}^2,$$

y los sectores exteriores, de

$$\frac{1}{4}(\pi 4^2 - \pi 3^2) = \frac{7\pi}{4} \approx 5.50 \text{ km}^2,$$

así que calculamos

$$\begin{aligned} \text{Población} &\approx (20)\,(3.93) + (17)(3.93) + (14)(3.93) + (17)(3.93) + \\ &\quad (13)(5.50) + (10)(5.50) + (8)(5.50) + (10)(5.50) \\ &\approx 493 \text{ millones de insectos} \end{aligned}$$

¿Qué es *dA* en coordenadas polares?

En el ejemplo anterior se empleó una retícula polar en lugar de una rectangular; esta última se traza con líneas verticales y horizontales correspondientes a $x = k$ (una constante) y $y = l$ (otra constante), respectivamente. En coordenadas polares, si se hace $r = k$ resulta un círculo de radio k con centro en el origen y si se hace $q = l$ se obtiene un rayo que emana desde el origen (a un ángulo l con el eje x). Con estos círculos y rayos se traza una retícula polar. La figura 15.27 muestra una subdivisión de la región polar $a \le r \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$, usando n subdivisiones en cada dirección. Este rectángulo curvo es la clase de región que está representada naturalmente en coordenadas polares.

En general, dividir R como se muestra en la figura 15.27, produce una suma de Riemann:

$$\sum_{i,\,j} f(r_i, q_j)\,\Delta A.$$

Sin embargo, calcular el área ΔA es más complicado en coordenadas polares que en coordenadas cartesianas. La figura 15.28 muestra ΔA. Si Δr y $\Delta\theta$ son pequeñas, la región sombreada es aproximadamente un rectángulo con lados $r\,\Delta\theta$ y Δr, así que

$$\Delta A \approx r\Delta\theta\Delta r.$$

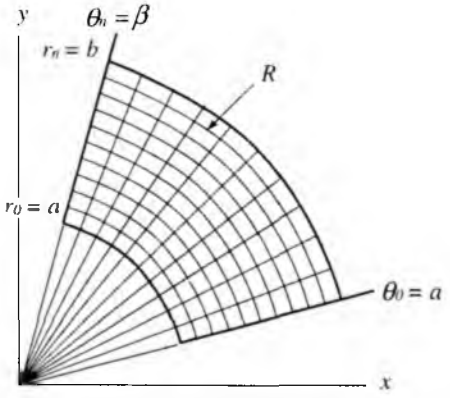


Figura 15.27 División de una región usando retícula polar.

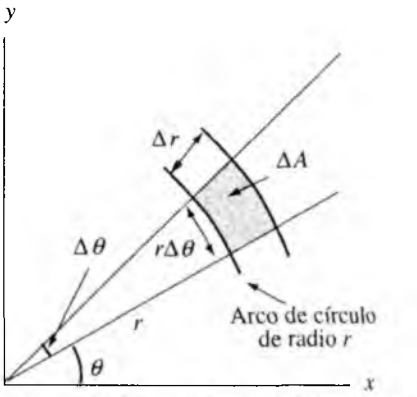


Figura 15.28 Cálculo del área ΔA en coordenadas polares.

Por lo tanto, la suma de Riemann es aproximadamente

$$\sum_{i,\,j} f(r_i, \theta_j)\, r_i\, \Delta\theta\, \Delta r.$$

Si tomamos el límite a medida que Δr y $\Delta\theta$ se aproximan a 0, obtenemos

$$\int_R f\,dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

Al calcular integrales en coordenadas polares, hagamos $dA = r\,dr\,d\theta$, o bien, $dA = r\,d\theta\,dr$.

Ejemplo 2 Calcular la integral de $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)^{3/2}$ sobre la región R que se muestra en la figura 15.29.

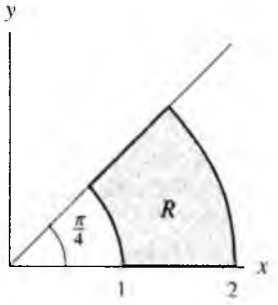


Figura 15.29 Integrar f sobre la región polar.

Solución La región R está descrita por las desigualdades $1 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi/4$. En coordenadas polares, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, de modo que podemos escribir f como

$$f(x, y) = \frac{1}{(r^2)^{3/2}} = \frac{1}{r^3}.$$

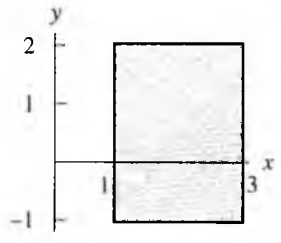
Entonces,

$$\int_R f\,dA = \int_0^{\pi/4} \int_1^2 \frac{1}{r^3}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \left(\int_1^2 r^{-2}\, dr \right) d\theta$$

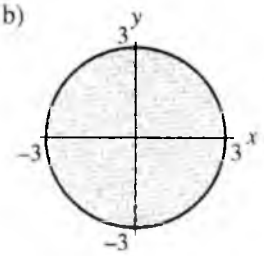
$$= \int_0^{\pi/4} \left| -\frac{1}{r} \right|_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\, d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

Ejemplo 3 Para cada región de la figura 15.30, diga si conviene integrar usando coordenadas polares o cartesianas. Con base en su forma, escribir una integral iterada de una función ordinaria $f(x, y)$ sobre la región.

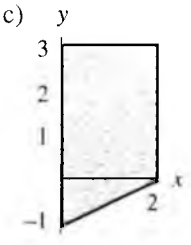
a)



b)



c)



d)

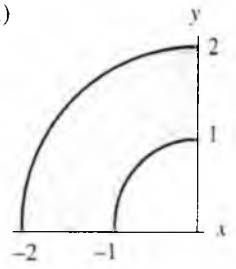


Figura 15.30

Solución a) Como se trata de una región rectangular, las coordenadas cartesianas serán seguramente la mejor opción. El rectángulo está descrito por las desigualdades $1 \le x \le 3$ y $-1 \le y \le 2$, así que la integral es

$$\int_{-1}^{2} \int_{1}^{3} f(x, y)\, dx\, dy.$$

b) Un círculo se describe mejor en coordenadas polares. El radio es 3, así que r varía entre 0 y 3, y para describir todo el círculo, θ va de 0 a 2π. La integral es

$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 f(r\cos\theta, y \operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

c) La frontera inferior de este trapezoide es la recta $y = (x/2) - 1$ y la superior la recta $y = 3$, así que usamos coordenadas cartesianas. Si integramos primero con respecto a y, el límite inferior para la integral es $(x/2) - 1$ y el límite superior es 3. Los límites en x son $x = 0$ y $x = 2$. Por lo tanto la integral es

$$\int_0^2 \int_{(x/2)-1}^3 f(x, y)\, dy\, dx.$$

d) Ésta es otra región polar: es una parte de un anillo en que r va de 1 a 2. Como está en el segundo cuadrante, θ va de $\pi/2$ a π. La integral es

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

Problemas para la sección 15.5

Para cada una de las regiones R de los problemas del 1 al 4, escriba $\int_R f\, dA$ como integral iterada en coordenadas polares.

1.

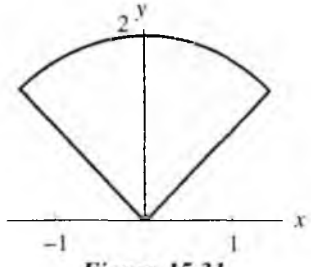


Figura 15.31

2.

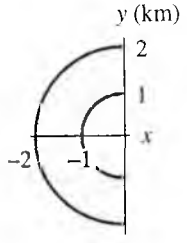


Figura 15.32

3.

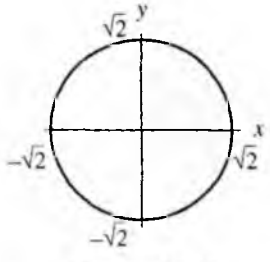


Figura 15.33

4.

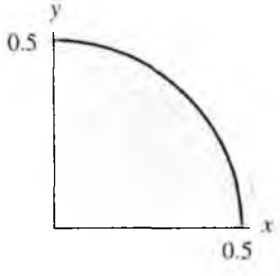


Figura 15.34

Trace la región sobre la que se calculan las integrales de los problemas del 5 al 11.

5. $\int_0^{2\pi} \int_1^2 f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta.$

6. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta.$

7. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \int_0^1 f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta.$

8. $\int_3^4 \int_{3\pi/4}^{3\pi/2} f(r, \theta)\, r\, d\theta\, dr.$

9. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos\theta} f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta.$

10. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2/\operatorname{sen}\theta} f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta.$

11. $\int_0^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(r, \theta)\, r\, d\theta\, dr.$

12. Evalúe $\int_R \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\, dA$, donde R es el disco de radio 2 con centro en el origen.

13. Evalúe $\int_R (x^2 - y^2)\, dA$, donde R es la región del primer cuadrante entre los círculos de radio 1 y radio 2.

14. Considere la integral $\int_0^3 \int_{x/3}^1 f(x, y)\, dy\, dx$.
    a) Trace la región R sobre la que se realiza la integración.
    b) Reescriba la integral con el orden de integración invertido.
    c) Reescriba la integral en coordenadas polares.

Convierta las integrales de los problemas 15, 16 y 17 a coordenadas polares y evalúe.

15. $\int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\, dy\, dx$ 16. $\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} xy\, dx\, dy$ 17. $\int_0^3 \int_{-x}^{x} \frac{x}{y^2}\, dy\, dx$

18. Encuentre el volumen de la región entre $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ y el plano xy.

19. Un cono de helado puede modelarse por la región limitada por el hemisferio $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Encuentre su volumen.

20. Un disco de 5 cm de radio tiene densidad de 10 g/cm^2 en su centro, de 0 en su borde, y su densidad es una función lineal de la distancia desde el centro. Encuentre la masa del disco.

21. Una ciudad frente al océano rodea una bahía como se muestra en la figura 15.35. La densidad de población de la ciudad (en miles de personas por km cuadrado) está dada por la función $\delta(r, \theta)$, donde r y θ son coordenadas polares con respecto a los ejes x y y mostrados, y las distancias indicadas en el eje y están en kilómetros.

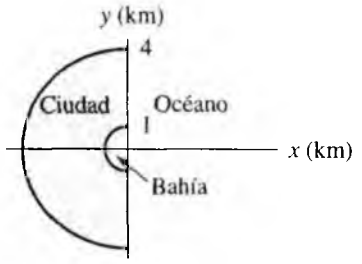


Figura 15.35

    a) Formule una integral iterada en coordenadas polares para obtener la población total de la ciudad.
    b) La densidad de población disminuye cuanto más se aleja de la orilla de la bahía; también disminuye cuanto más lejos se viva del mar. ¿Cuál de las siguientes funciones describe mejor esta situación?
       i) $\delta(r, \theta) = (4 - r)(2 + \cos\theta)$ ii) $\delta(r, \theta) = (4 - r)(2 + \operatorname{sen}\theta)$
       iii) $\delta(r, \theta) = (r + 4)(2 + \cos\theta)$
    c) Calcule la población usando sus respuestas a los incisos a y b.

22. El muelle de un reloj está de costado sobre una mesa; está hecho de un fleje de acero enrollado cuya altura es 0.2 pulgadas sobre la mesa. El borde interior es la espiral $r = 0.25 + 0.4\theta$, donde $0 \le \theta \le \pi/4$ (de modo que la espiral realiza dos vueltas completas). El borde exterior está dado por $r = 0.26 + 0.04\theta$. Encuentre el volumen del resorte.

15.6 INTEGRALES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

Algunas integrales dobles son más fáciles de evaluar en coordenadas polares y no en cartesianas. De igual manera, algunas integrales triples son más fáciles en coordenadas que no son cartesianas.

Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas de un punto (x, y, z) en el espacio se obtienen representando las coordenadas x y y en coordenadas polares, y haciendo que la coordenada z sea la coordenada z del sistema de coordenadas cartesiano (véase Fig. 15.36).

Relación entre coordenadas cartesianas y cilíndricas

Cada punto en el espacio puede representarse usando $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta,$$
$$z = z.$$

Al igual que con coordenadas polares en el plano, observe que $x^2 + y^2 = r^2$.

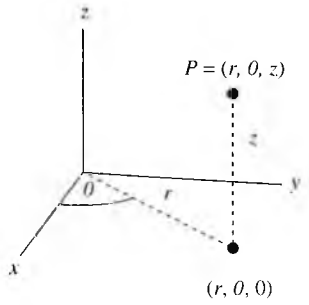


Figura 15.36 Coordenadas cilíndricas: (r, θ, z).

Una manera útil de visualizar las coordenadas cilíndricas es trazar las superficies obtenidas haciendo una de las coordenadas igual a una constante. Véanse las figuras 15.37 a la 15.39.

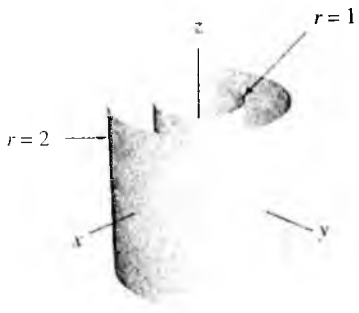


Figura 15.37 Las superficies $r = 1$ y $r = 2$.

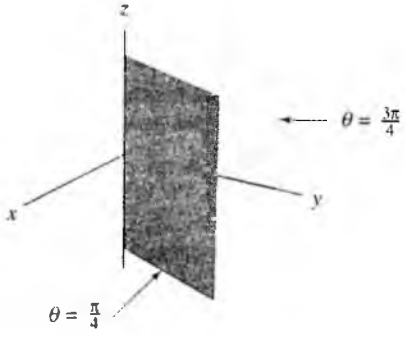


Figura 15.38 Las superficies $\theta = \pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$.

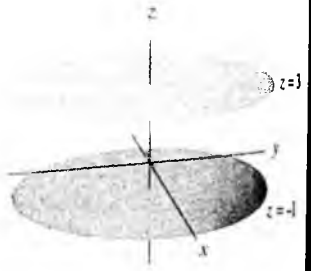


Figura 15.39 Las superficies $z = -1$ y $z = 3$.

Al hacer $r = c$ (donde c es una constante) se obtiene un cilindro alrededor del eje z cuyo radio es c. Al hacer $\theta = c$ resulta un semiplano perpendicular al plano xy, con un borde a lo largo del eje z, haciendo un ángulo c con el eje x. Al hacer $z = c$ se obtiene un plano horizontal a $|c|$ unidades del plano xy. Estas superficies reciben el nombre de *superficies fundamentales.*

Las regiones que se pueden describir más fácilmente en coordenadas cilíndricas son aquéllas cuyas fronteras son tales superficies fundamentales. (Por ejemplo, cilindros verticales, o partes de cilindros verticales en forma de cuña.)

Ejemplo 1 Describir, en coordenadas cilíndricas, una rebanada de queso cortada de un cilindro de 4 cm de altura y 6 cm de radio; la rebanada subtiende un ángulo de $\pi/6$ en el centro (véase Fig. 15.40).

Solución La rebanada está descrita por las desigualdades $0 \le r \le 6$, y $0 \le z \le 4$, y $0 \le \theta \le \pi/6$.

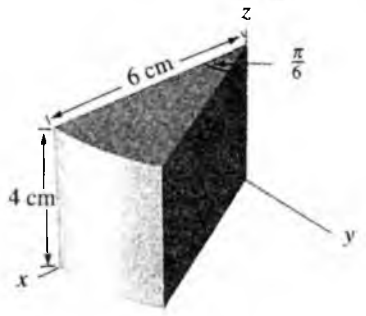


Figura 15.40 Una rebanada de queso.

Integración en coordenadas cilíndricas

Para integrar en coordenadas polares, teníamos que expresar el elemento de área dA en términos de coordenadas polares: $dA = r\,dr\,d\theta$. Para evaluar una integral triple $\int_w f\,dV$ en coordenadas cilíndricas necesitamos expresar el elemento de volumen dV en coordenadas cilíndricas.

Considere el elemento de volumen ΔV que se muestra en la figura 15.41; es una rebanada limitada por superficies fundamentales. El área de la base es $\Delta A \approx r\Delta r\Delta\theta$. Como la altura es Δz, el elemento de volumen está dado aproximadamente por $\Delta V \approx r\Delta r\Delta\theta\,\Delta z$.

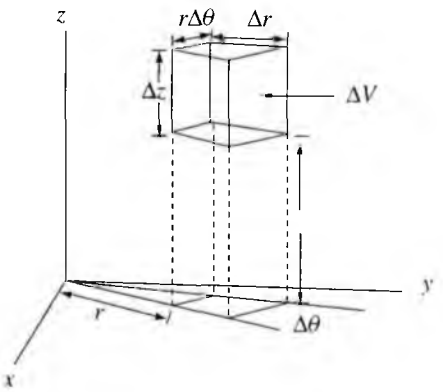


Figura 15.41 Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas.

Al calcular integrales en coordenadas cilíndricas, haga $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$. Otros órdenes de integración también son posibles.

Ejemplo 2 Encontrar la masa de la rebanada de queso del ejemplo 1, si su densidad es 1.2 g/cm^3.

Solución Si la rebanada es W, su masa es

$$\int_W 1.2\,dV.$$

En coordenadas cilíndricas, esta integral es

$$\int_0^4 \int_0^{\pi/6} \int_0^6 1.2\,r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^4 \int_0^{\pi/6} 0.6r^2 \Big|_0^6 d\theta\,dz = 21.6 \int_0^4 \int_0^{\pi/6} d\theta\,dz$$

$$= 21.6\,(\frac{\pi}{6})4 \approx 45.24 \text{ gramos.}$$

Ejemplo 3 Un tanque de agua en forma de semiesfera tiene radio a; su base es su cara plana. Encontrar el volumen, V, de agua del tanque como función de h, que es la profundidad del agua.

Solución En coordenadas cartesianas, una esfera de radio a tiene la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (véase Fig. 15.42). En coordenadas cilíndricas, $r^2 = x^2 + y^2$, y esto se convierte en

$$r^2 + z^2 = a^2.$$

Por lo tanto, si queremos describir la cantidad de agua del tanque en coordenadas cilíndricas, dejamos que r varíe entre 0 y $\sqrt{a^2 - z^2}$, θ varíe entre 0 y 2π, y z varíe entre 0 y h, y resulta

$$\text{Volumen de agua} = \int_W dV = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} r\,dr\,dz\,d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{a^2-z^2}} dz\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{1}{2}(a^2 - z^2)\,dz\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(a^2 z - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_{z=0}^{z=h} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(a^2 h - \frac{h^3}{3}\right) d\theta = \pi\left(a^2 h - \frac{h^3}{3}\right).$$



Figura 15.42 Tanque de agua semiesférico con radio a y agua a una profundidad h.

Al hacer $r = c$ (donde c es una constante) se obtiene un cilindro alrededor del eje z cuyo radio es c. Al hacer $\theta = c$ resulta un semiplano perpendicular al plano xy, con un borde a lo largo del eje z, haciendo un ángulo c con el eje x. Al hacer $z = c$ se obtiene un plano horizontal a $|c|$ unidades del plano xy. Estas superficies reciben el nombre de *superficies fundamentales.*

Las regiones que se pueden describir más fácilmente en coordenadas cilíndricas son aquéllas cuyas fronteras son tales superficies fundamentales. (Por ejemplo, cilindros verticales, o partes de cilindros verticales en forma de cuña.)

Ejemplo 1 Describir, en coordenadas cilíndricas, una rebanada de queso cortada de un cilindro de 4 cm de altura y 6 cm de radio; la rebanada subtiende un ángulo de $\pi/6$ en el centro (véase Fig. 15.40).

Solución La rebanada está descrita por las desigualdades $0 \le r \le 6$, y $0 \le z \le 4$, y $0 \le \theta \le \pi/6$.

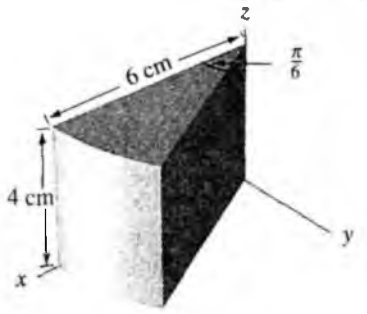


Figura 15.40 Una rebanada de queso.

Integración en coordenadas cilíndricas

Para integrar en coordenadas polares, teníamos que expresar el elemento de área dA en términos de coordenadas polares: $dA = r\,dr\,d\theta$. Para evaluar una integral triple $\int_w f\,dV$ en coordenadas cilíndricas necesitamos expresar el elemento de volumen dV en coordenadas cilíndricas.

Considere el elemento de volumen ΔV que se muestra en la figura 15.41; es una rebanada limitada por superficies fundamentales. El área de la base es $\Delta A \approx r\Delta r\Delta\theta$. Como la altura es Δz, el elemento de volumen está dado aproximadamente por $\Delta V \approx r\Delta r\Delta\theta\,\Delta z$.

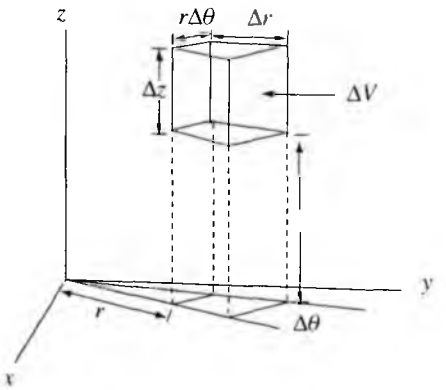


Figura 15.41 Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas

Al calcular integrales en coordenadas cilíndricas, haga $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$. Otros órdenes de integración también son posibles.

Ejemplo 2 Encontrar la masa de la rebanada de queso del ejemplo 1, si su densidad es 1.2 g/cm^3.

Solución Si la rebanada es W, su masa es

$$\int_W 1.2\,dV.$$

En coordenadas cilíndricas, esta integral es

$$\int_0^4 \int_0^{\pi/6} \int_0^6 1.2\,r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^4 \int_0^{\pi/6} 0.6r^2 \Big|_0^6 d\theta\,dz = 21.6 \int_0^4 \int_0^{\pi/6} d\theta\,dz$$

$$= 21.6\,(\tfrac{\pi}{6})4 \approx 45.24 \text{ gramos.}$$

Ejemplo 3 Un tanque de agua en forma de semiesfera tiene radio a; su base es su cara plana. Encontrar el volumen, V, de agua del tanque como función de h, que es la profundidad del agua.

Solución En coordenadas cartesianas, una esfera de radio a tiene la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (véase Fig. 15.42). En coordenadas cilíndricas, $r^2 = x^2 + y^2$, y esto se convierte en

$$r^2 + z^2 = a^2.$$

Por lo tanto, si queremos describir la cantidad de agua del tanque en coordenadas cilíndricas, dejamos que r varíe entre 0 y $\sqrt{a^2 - z^2}$, θ varíe entre 0 y 2π, y z varíe entre 0 y h, y resulta

$$\text{Volumen de agua} = \int_W dV = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} r\,dr\,dz\,d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{a^2 - z^2}} dz\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{1}{2}(a^2 - z^2)\,dz\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(a^2 z - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_{z=0}^{z=h} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(a^2 h - \frac{h^3}{3}\right) d\theta = \pi\left(a^2 h - \frac{h^3}{3}\right).$$



Figura 15.42 Tanque de agua semiesférico con radio a y agua a una profundidad h.

Coordenadas esféricas

En la figura 15.43, el punto P tiene coordenadas (x, y, z) en el sistema de coordenadas cartesianas. Se definen coordenadas esféricas, ρ, ϕ y θ para P como sigue: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es la distancia de P desde el origen; ϕ es el ángulo entre el eje z positivo y la recta que pasa por el origen y el punto P; y θ es la misma que en coordenadas cilíndricas.

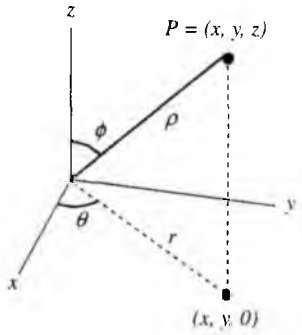


Figura 15.43 Coordenadas esféricas.

En coordenadas cilíndricas,

$$x = r\cos\theta, \qquad \text{y} \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad \text{y} \qquad z = z.$$

De la figura 15.43 tenemos $z = \rho\cos\phi$ y $r = \rho\,\text{sen}\,\phi$, dando la siguiente relación:

Relación entre coordenadas cartesianas y esféricas

Cada punto en tres dimensiones está representado usando $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \phi \le \pi$ y $0 \le \theta \le 2\pi$.

$$\begin{aligned} x &= \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta \\ y &= \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta \\ z &= \rho\cos\phi \end{aligned}$$

Además, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Este sistema de coordenadas es útil cuando hay simetría esférica con respecto al origen, ya sea en la región de integración o en el integrando. Las superficies fundamentales en coordenadas esféricas son $\rho = k$ (una constante), que es una esfera de radio k con centro en el origen, $\theta = k$ (una constante), que es el semiplano con un borde a lo largo del eje z, y $\phi = k$ (una constante), que es un cono si $k \neq \pi/2$ y el plano xy si $k = \pi/2$ (véanse Figs. 15.44 a 15.46).

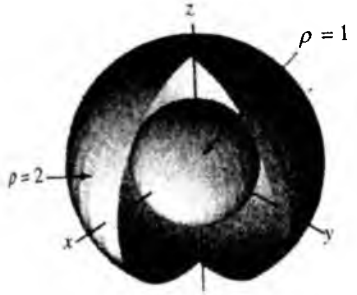


Figura 15.44 Las superficies $\rho = 1$ y $\rho = 2$.

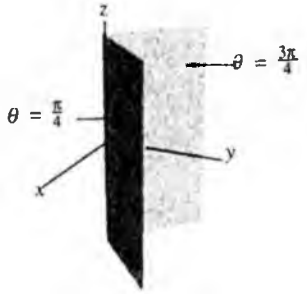


Figura 15.45 Las superficies $\theta = \pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$.

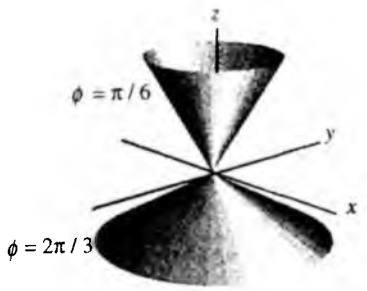


Figura 15.46 Las superficies $\phi = \pi/3$ y $\phi = 2\pi/3$.

Integración en coordenadas esféricas

Para usar coordenadas esféricas en integrales triples necesitamos expresar el elemento de volumen, dV, en coordenadas esféricas. De la figura 15.47, vemos que el elemento de volumen puede aproximarse por una caja con bordes curvos. Un borde tiene longitud $\Delta\rho$. El borde paralelo al plano xy es un arco de círculo hecho al hacer girar el radio cilíndrico r ($= \rho \operatorname{sen} \phi$) un ángulo $\Delta\theta$, y por tanto tiene longitud $\rho \operatorname{sen} \phi\, \Delta\theta$. El lado restante se obtiene al hacer girar el radio ρ un ángulo $\Delta\phi$, y, en consecuencia, tiene longitud $\rho\, \Delta\phi$. Por consiguiente, $\Delta V \approx \Delta\rho\, (\rho\, \Delta\phi)(\rho \operatorname{sen} \phi\, \Delta\theta) = \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, \Delta\rho\, \Delta\phi\, \Delta\theta$.

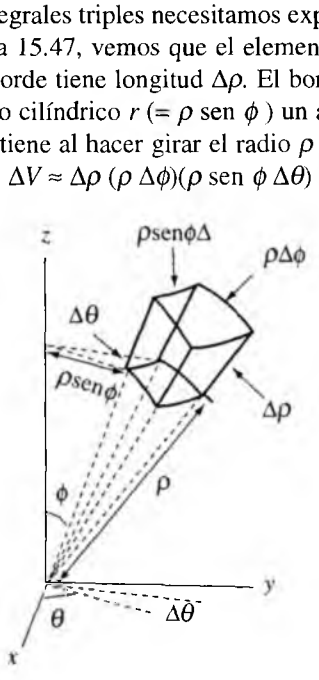


Figura 15.47 Elemento de volumen en coordenadas esféricas.

De esta manera,

> **Cuando se calculen integrales en coordenadas esféricas, haga** $dV = \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$. También son **posibles otros órdenes de integración.**

Ejemplo 4 **Utilizar coordenadas esféricas para derivar la fórmula para el volumen de una esfera sólida de radio** a.

Solución **En coordenadas esféricas, una esfera de radio** a está descrita por las desigualdades $0 \le \rho \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$ y $0 \le \phi \le \pi$. **Observe que** θ **recorre todo el círculo, en tanto que** ϕ sólo va de 0 a π. Encontramos **el volumen por integración de la función de densidad constante 1 sobre la esfera:**

$$\text{Volumen} = \int_R 1\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\; d\rho d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{3} a^3 \operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta$$

$$= \frac{1}{3}a^3 \int_0^{2\pi} -\cos\phi \Big|_0^{\pi} d\theta = \frac{2}{3}a^3 \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

Ejemplo 5 **Encontrar la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por una semiesfera sólida de radio** a y densidad constante δ **en una masa unitaria ubicada en el centro de la base de la semiesfera.**

Solución Suponga que la base de la semiesfera se apoya sobre el plano xy con centro en el origen (véase Fig. 15.48). La ley de Newton de gravitación establece que la fuerza entre dos masas m_1 y m_2 separadas por una distancia r es $F = Gm_1m_2/r^2$. En este ejemplo, la simetría muestra que la componente neta de la fuerza sobre la partícula en el origen, debida a la semiesfera, está sólo en la dirección z. Cualquier fuerza en la dirección x o y desde alguna parte de la semiesfera quedará cancelada por la fuerza desde la parte diametralmente opuesta a la primera. Para calcular la componente neta z de la fuerza gravitacional, imaginemos una pequeña parte de la esfera con volumen ΔV, ubicada en las coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ). Esta parte tiene masa $\delta\,\Delta V$, y ejerce una fuerza de magnitud F sobre la unidad de masa en el origen. La componente z de esta fuerza está dada por su proyección sobre el eje z, que, según podemos ver de la figura, es $F\cos\phi$. La distancia desde la masa $\delta\,\Delta V$ a la unidad de masa en el origen es la coordenada esférica ρ. Por lo tanto, la componente z de la fuerza debida al pedacito ΔV es

$$\text{Componente } z \text{ de la fuerza} = \frac{G\,(\delta \Delta V)\,(1)}{\rho^2}\cos\phi.$$

Si se suman las contribuciones de las pequeñas partes, obtenemos una fuerza vertical con magnitud

$$F = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a}\left(\frac{G\delta}{\rho^2}\right)(\cos\varnothing)\,\rho^2\,\text{sen}\,\varnothing\,d\rho\,d\varnothing\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} G\delta\,(\cos\varnothing\,\text{sen}\,\varnothing)\,\rho\Big|_{\rho=0}^{\rho=a} d\varnothing d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} G\delta a\cos\varnothing\,\text{sen}\,\varnothing\,d\varnothing\,d\theta = \int_0^{2\pi} G\delta a\left(-\frac{(\cos\varnothing)^2}{2}\right)\Big|_{\varnothing=0}^{\varnothing=\pi/2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} G\delta a\left(\frac{1}{2}\right)d\theta = G\delta a\pi.$$

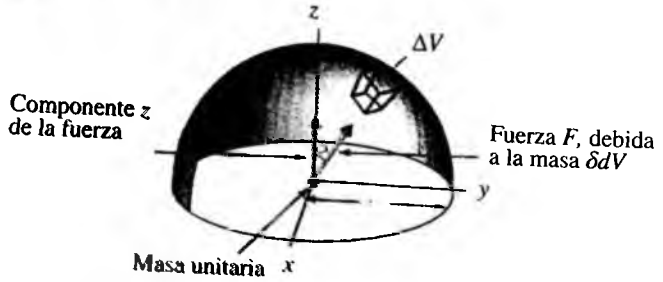


Figura 15.48 **Fuerza gravitacional de un hemisferio sobre una masa en el origen.**

Problemas para la sección 15.6

En los problemas 1 y 2, evalúe las integrales triples en coordenadas cilíndricas.

1. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, W es la región $0 \le r \le 4$, $\pi/4 \le \theta \le 3\pi/4$, $-1 \le z \le 1$.
2. $f(x, y, z) = \text{sen}(x^2 + y^2)$, W es el cilindro sólido con altura 4 y con base de radio 1 con centro en el eje z en $z = -1$.

En los problemas 3 y 4, evalúe las integrales triples en coordenadas esféricas.

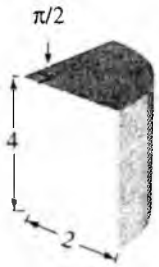
3. $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ sobre la mitad inferior de la esfera de radio 5 con centro en el origen.
4. $f(\rho, \theta, \phi) = \text{sen}\,\phi$, sobre la región $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le \pi/4$, $1 \le \rho \le 2$.

Para los problemas del 5 al 9, escoja un conjunto de ejes coordenados y luego formule la integral de tres variables en un sistema conveniente de coordenadas para integrar una función de densidad δ sobre la región dada.

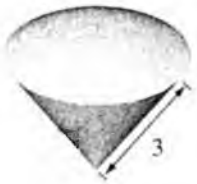
5.



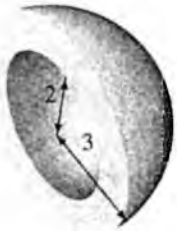
6.



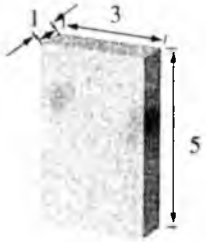
7. Una parte de una esfera; el ángulo en el centro es $\pi/3$.



8.



9.



10. Trace la región R sobre la que se realiza la integración:

$$\int_0^{\pi/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 f(\rho, \phi, \theta)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Evalúe las integrales de los problemas 11 y 12.

11. $$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{1-x^2-z^2}} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\, dy\, dz\, dx$$

12. $$\int_0^1 \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}\, dy\, dx\, dz$$

Sin efectuar la integración, diga si cada una de las integrales de los problemas 13 y 14 es positiva, negativa o cero. Dé razones para su decisión.

13. W_1 es la bola unitaria, $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.
    a) $\int_{W_1} \operatorname{sen} \phi \, dV$ b) $\int_{W_1} \cos \phi \, dV$

14. W_2 es la mitad superior de la bola unitaria, $0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
    a) $\int_{W_2} (z^2 - z)\, dV$ b) $\int_{W_2} (-xz)\, dV$

15. Escriba una integral triple que represente el volumen de una rebanada del pastel cilíndrico de altura 2 y radio 5, entre los planos $\theta = \pi/6$ y $\theta = \pi/3$. Evalúe esta integral.

16. Encuentre la masa M de la región sólida W dada en coordenadas esféricas por

$$W = \{(\rho, \phi, \theta): 0 \le \rho \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \pi/4\}$$

si la densidad, $\delta(P)$, en cualquier punto P está dada por la distancia de P al origen.

17. Una nube esférica de gas de 3 km de radio es más densa en el centro que hacia su borde. La densidad, D, del gas a una distancia ρ km del centro está dada por $D(\rho) = 3 - \rho$. Escriba una integral que represente la masa total de la nube de gas, y evalúela.
18. Encuentre el volumen que resulta de taladrar un agujero cilíndrico de radio R, de lado a lado, en una esfera de radio a, donde $0 < R < a$, pasando por el centro de la esfera y a lo largo del polo.
19. Utilice coordenadas apropiadas para encontrar la distancia promedio al origen de los puntos en la región de un cono de helado limitado por la semiesfera $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. [Sugerencia: El volumen de esta región está calculado en el problema 19 de la página 257.]
20. Calcule la fuerza de gravedad ejercida por un cilindro sólido de radio R, altura H, y densidad constante d sobre una unidad de masa situada en el centro de la base del cilindro.

Para los problemas del 21 al 24, utilice la definición de centro de masa dada en la página 249.

21. Sea C un cono sólido con altura y radio 1 y contenido entre las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 1$. Si C tiene densidad de masa constante de 1 g/cm^3, encuentre la coordenada z del centro de masa de C.
22. Suponga que la densidad del cono C del problema 21 está dada por $\rho(z) = z^2$ g/cm^3. Encuentre
    a) La masa de C b) La coordenada z del centro de masa C.
23. Para $a > 0$, considere la familia de sólidos limitados abajo por el paraboloide $z = a(x^2 + y^2)$ y arriba por el plano $z = 1$. Si todos los sólidos tienen densidad de masa constante de 1 g/cm^3, demuestre que la coordenada z del centro de masa es 2/3 y por lo tanto es independiente del parámetro a.
24. Encuentre la ubicación del centro de masa de una semiesfera de radio a y densidad b g/cm^3.

Para los problemas 25 y 26, utilice la definición de momento de inercia dada en la página 249.

25. El momento de inercia de una bola homogénea sólida B, de masa 1 y radio a con centro en el origen, es el mismo alrededor de cualquiera de los ejes coordenados (debido a la simetría de la bola). Es más fácil evaluar la suma de las tres integrales que intervienen en el cálculo del momento de inercia alrededor de cada uno de los ejes que calcularlos de manera individual. Encuentre la suma de los momentos de inercia alrededor de los ejes x, y y z y así encuentre los momentos de inercia individuales.
26. Encuentre el momento de inercia alrededor del eje z del sólido "cono gordo de helado" dado en coordenadas esféricas por $0 \le \rho \le a, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{3}$ y $0 \le \theta \le 2\pi$. Suponga que el sólido es homogéneo con masa m.

15.7 APLICACIONES DE LA INTEGRACIÓN A LA PROBABILIDAD

Para representar la manera en que cantidades tales como la estatura o el peso están distribuidas en una población, utilizamos una función de densidad. En el apéndice F viene un repaso a las funciones de densidad de una variable. Para estudiar dos o más cantidades al mismo tiempo y ver cómo están relacionadas, empleamos una función de densidad de varias variables.

Funciones de densidad

Distribución de peso y estatura en madres encintas

La tabla 15.13 muestra la distribución de peso y estatura en un estudio de madres encintas. El histograma de la figura 15.49 está construido de manera tal que el volumen de cada barra representa el

valor porcentual del rango correspondiente de peso y estatura. Por ejemplo, el área de la base de la barra que representa las madres que pesaron entre 60 y 70 kg y midieron de 160 a 165 cm de estatura, es de 10 kg · 5 cm = 50 kg cm. El volumen de esta barra es 12%, así que su altura es 12%/50 kg cm = 0.24%/kg cm. Observe que las unidades del eje vertical son porcentaje/ kg cm. Por lo tanto, los volúmenes indicados en el histograma están en unidades de %. El volumen total es 100% = 1.

TABLA 15.13 *Distribución de peso y estatura en un estudio de madres encintas*

	45-50 kg	50-60 kg	60-70 kg	70-80 kg	80-105 kg	Totales por estatura
150-155 cm	2	4	4	2	1	13
155-160 cm	0	12	8	2	1	23
160-165 cm	1	7	12	4	3	27
165-170 cm	0	8	12	6	2	28
170-180 cm	0	1	3	4	1	9
Totales por peso	3	32	39	18	8	100

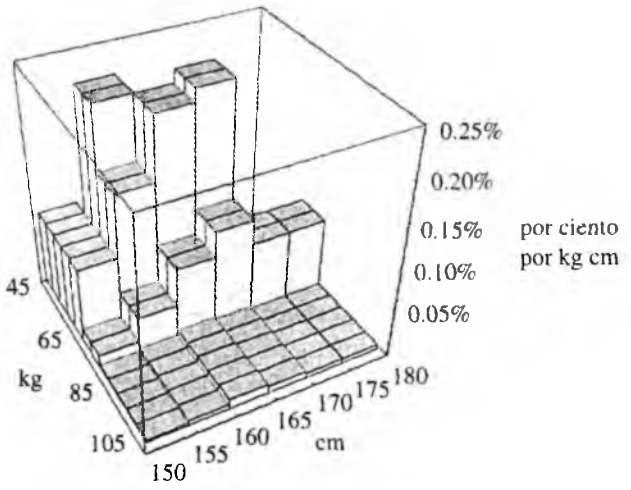


Figura 15.49 Histograma que representa los datos de la tabla 15.13.

Ejemplo 1 Encontrar el porcentaje de madres en el estudio con estatura entre 170 y 180 cm.

Solución Sumamos los porcentajes, en sentido horizontal, de la hilera correspondiente a los límites de estatura entre 170 y 180 cm; esto equivale a sumar los volúmenes de los sólidos rectangulares correspondientes del histograma.

$$\text{Porcentaje de madres} = 0 + 1 + 3 + 4 + 1 = 9\%.$$

Alisamiento del histograma

Si tenemos grupos de menor peso y estatura (y una muestra más grande), podemos dibujar un histograma más liso y obtener mejores cálculos. En el límite, sustituimos el histograma con una superficie lisa, de manera tal que el volumen bajo la superficie sobre un rectángulo es el porcentaje de madres en ese rectángulo. Definimos un *función de densidad*, $p\ (w, h)$, como la función cuya gráfica es la superficie lisa. Tiene la propiedad de que

$$\begin{array}{l}\text{Fracción de muestra con}\\ \text{peso entre } a \text{ y } b \text{ y}\\ \text{estatura entre } c \text{ y } d\end{array} = \begin{array}{l}\text{Volumen bajo la gráfica de } p\\ \text{sobre el rectángulo}\\ a \le w \le b,\ c \le h \le d\end{array} = \int_a^b \int_c^d p\,(w, h)\,dh\,dw.$$

Funciones de densidad mixtas

Generalizamos esta idea para representar dos características cualesquiera, x, y y, distribuidas en una población.

Una función $p\,(x, y)$ se llama **función de densidad mixta** para x y y si

$$\begin{array}{l}\text{Fracción de la población con}\\ x \text{ entre } a \text{ y } b \text{ y}\\ y \text{ entre } c \text{ y } d\end{array} = \begin{array}{l}\text{Volumen bajo la gráfica de } p\\ \text{arriba del rectángulo}\\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\end{array} = \int_a^b \int_c^d p\,(x, y)\,dy\,dx$$

donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p\,(x, y)\,dy\,dx = 1 \quad \text{y} \quad p\,(x, y) \ge 0 \text{ para toda } x \text{ y } y.$$

Una función de densidad mixta no necesita ser continua, como en el ejemplo 2 a continuación. Además, como en el ejemplo 4, las integrales que intervienen pueden ser impropias y deben ser calculadas por métodos semejantes a los empleados para integrales impropias de una variable.

Ejemplo 2 Sea $p(x, y)$ definida en el cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ por $p(x, y) = x + y$; sea $p(x, y) = 0$ si (x, y) está fuera de este cuadrado. Verificar que p sea una función de densidad mixta. En términos de la distribución de x y y en la población, ¿qué significa que $p(x, y) = 0$ fuera del cuadrado?

Solución Primero, tenemos $p\,(x, y) \ge 0$ para toda x y y. Para verificar que p es una función de densidad mixta, verificamos que el volumen total bajo la gráfica sea 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^1 (x + y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = 1$$

El hecho de que $p\,(x, y) = 0$ fuera del cuadrado significa que las variables x y y nunca toman valores fuera del intervalo $[0, 1]$, esto es, el valor de x y de y para cualquier individuo de la población siempre está entre 0 y 1.

Ejemplo 3 Suponga que dos variables x y y están distribuidas en una población según la función de densidad del ejemplo 2. Encontrar la fracción de la población con $x \le 1/2$, la fracción con $y \le 1/2$ y la fracción con $x \le 1/2$ y $y \le 1/2$.

Solución La fracción con $x \le 1/2$ es el volumen bajo la gráfica a la izquierda de la recta $x = 1/2$:

$$\int_0^{1/2}\int_0^1 (x+y)\,dy\,dx = \int_0^{1/2}\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 dx = \int_0^{1/2}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{8}+\frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

Como la función es simétrica en x y y, la fracción con $y \le 1/2$ es también 3/8. Finalmente, la fracción con $x \le 1/2$ y $y \le 1/2$ es

$$\int_0^{1/2}\int_0^{1/2} (x+y)\,dy\,dx = \int_0^{1/2}\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1/2} dx = \int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x\right)\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{16}+\frac{1}{16} = \frac{1}{8}.$$

Recuerde que una función de densidad de una variable $p(x)$ es una función tal que $p(x) \ge 0$ para toda x, y $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$ (véase apéndice F).

Ejemplo 4 Sean p_1 y p_2 funciones de densidad de una variable para x y y, respectivamente. Verificar que $p(x, y) = p_1(x)p_2(y)$ es una función de densidad mixta.

Solución Como p_1 y p_2 son funciones de densidad, son no negativas en todas partes. Por lo tanto, su producto $p_1(x)p_2(x) = p(x, y)$ es no negativo en todas partes. Ahora debemos comprobar que el volumen bajo la gráfica de p sea 1. Como $\int_{-\infty}^{\infty} p(y)\,dy = 1$ y $\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\,dx = 1$, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)p_2(y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} p_2(y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\,(1)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\,dx = 1.$$

Probabilidad y funciones de densidad

¿Cuál es la probabilidad de que una madre encinta pese de 60 a 70 kg y mida de 155 a 160 cm de estatura? La tabla 15.13 muestra que 8% de las madres pertenecen a este grupo, así que la probabilidad de que una madre escogida al azar caiga en este grupo es de 0.08.

Probabilidad de que una madre tenga peso entre a y b y estatura entre c y d	=	Volumen bajo la gráfica de p arriba del rectángulo $a \le w \le b,\ c \le h \le d$	=	$\int_a^b \int_c^d p(w, h)\,dh\,dw.$

Para una función de densidad mixta $p(x, y)$, la probabilidad de que x caiga en un intervalo de ancho Δx alrededor de x_0 y y caiga en un intervalo de ancho Δy alrededor de y_0, es aproximadamente $p(x_0, y_0)\,\Delta x\,\Delta y$. Por lo tanto, p recibe con frecuencia el nombre de *función de densidad de probabilidad*.

Ejemplo 5 Una máquina de una fábrica está ajustada para producir componentes de 10 cm de largo y 5 cm de diámetro. En realidad, hay una ligera variación de un componente a otro. Un componente es útil si su longitud y diámetro se desvían de los valores correctos en menos de 0.1 cm. Si la longitud es x cm y el diámetro es y cm, la función de densidad de probabilidad para la variación en x y y es

$$p(x, y) = \frac{50\sqrt{2}}{\pi} e^{-100(x-10)^2} e^{-50(y-5)^2}.$$

¿Cuál es la probabilidad de que un componente sea utilizable? (Véase Fig. 15.50.)



Figura 15.50 La función de densidad $p(x, y) = \frac{50\sqrt{2}}{\pi} e^{-100(x-10)^2} e^{-50(y-5)^2}$

Solución Sabemos que

$$\begin{array}{r}\text{Probabilidad de que } x \text{ y } y \text{ satisfagan} \\ x_0 - \Delta x \le x \le x_0 + \Delta x \\ y_0 - \Delta y \le y \le y_0 + \Delta y\end{array} = \frac{50\sqrt{2}}{\pi} \int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} \int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} e^{-100(x-10)^2} e^{-50(y-5)^2}\, dx\, dy.$$

Por lo tanto,

$$\begin{array}{r}\text{Probabilidad de que el} \\ \text{componente sea utilizable}\end{array} = \frac{50\sqrt{2}}{\pi} \int_{4.9}^{5.1} \int_{9.9}^{10.1} e^{-100(x-10)^2} e^{-50(y-5)^2}\, dx\, dy$$

La doble integral debe evaluarse numéricamente. Esto resulta en

$$\begin{array}{r}\text{Probabilidad de que el} \\ \text{componente sea utilizable}\end{array} = \frac{50\sqrt{2}}{\pi}(0.02556) = 0.57530.$$

Por lo tanto, existe 57.5% de probabilidad de que el componente sea utilizable.

Dependencia e independencia de variables

Si estudiamos la distribución de estatura y peso en una población, esperamos ver una relación entre ellas. Si todo lo demás es igual, es más probable que las personas altas pesen más que las bajas. Por otra parte, si estudiamos la distribución de estatura e ingreso anual, no esperamos ver algo parecido a una relación; las personas altas y bajas probablemente ganan lo mismo, en promedio.

¿Cómo puede determinarse la dependencia a partir de la función de densidad mixta?

Veamos cómo la dependencia entre peso y estatura aparece en la información de la tabla 15.13. Fijémonos en la columna correspondiente a madres encintas que pesan de 70 a 80 kg. Este grupo es 18% de toda la muestra. El subconjunto de este grupo con estatura entre 170 y 180 cm es 4% de toda la muestra. Por lo tanto, la probabilidad de que una mujer del grupo de este peso mida entre 170 y 180 cm es

$$\frac{\text{Probabilidad de que la estatura sea 170-180 cm y el peso 70-80 kg}}{\text{Probabilidad de que el peso sea 70-80 kg}} = \frac{4}{18} = 0.22.$$

Ahora veamos un grupo más liviano, el de mujeres que pesan de 60 a 70 kg. Este grupo representa el 39% del total y el subconjunto con estatura de 170-180 cm es 3% del total. Por lo tanto, la probabilidad de que una mujer de este grupo mida 170-180 cm es

$$\frac{\text{Probabilidad de que la estatura sea 170-180 cm y el peso 60-70 kg}}{\text{Probabilidad de que el peso sea 60-70 kg}} = \frac{3}{39} = 0.08.$$

Ésta es una probabilidad más baja que para el grupo de 70-80 kg. Esto se debe a que es menos probable que una mujer más liviana sea más alta que una más pesada. En esta situación, decimos que las dos variables w y h son *dependientes,* porque en cierta medida dependen una de otra.

Probabilidad condicional

Podemos generalizar estas ideas a cualquier función de densidad mixta. Deseamos calcular la probabilidad de que y caiga dentro de ciertos límites, dado que x está dentro de ciertos límites.

Si $p\,(x, y)$ es una función de densidad de probabilidad, definimos la **probabilidad condicional** como

$$\begin{array}{c}\text{Probabilidad}\\ \text{condicional}\\ \text{de que } a \le x \le b\\ \text{dado que } c \le y \le d\end{array} = \frac{\begin{array}{c}\text{Probabilidad de que}\\ a \le x \le b \text{ y } c \le y \le d\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Probabilidad de que}\\ c \le y \le d\end{array}} = \frac{\displaystyle\int_a^b \int_c^d p\,(x, y)\,dy\,dx.}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_c^d p\,(x, y)\,dy\,dx.}$$

Ejemplo 6 Para la función de densidad de probabilidad del ejemplo 5, calcular la probabilidad de que la longitud sea entre 9.9 y 10.1 pulgadas, dado que el diámetro está entre

a) 4.9 y 5.1 cm b) 5.3 y 5.5 cm

Solución a) Tenemos que

$$\begin{aligned}&\text{Probabilidad de que } 9.9 \le x \le 10.1\\ &\quad\text{dado que } 4.9 \le y \le 5.1\end{aligned} = \frac{\text{Probabilidad de que } 9.9 \le x \le 10.1 \text{ y } 4.9 \le y \le 5.1}{\text{Probabilidad de que } 4.9 \le y \le 5.1}$$

$$= \frac{\dfrac{50\sqrt{2}}{\pi}\displaystyle\int_{9.9}^{10.1}\int_{4.9}^{5.1} e^{-100(x-10)^2}\,e^{-50(y-5)^2}\,dy\,dx}{\dfrac{50\sqrt{2}}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{4.9}^{5.1} e^{-100(x-10)^2}\,e^{-50(y-5)^2}\,dy\,dx}$$

$$= \frac{0.57}{0.68} \approx 0.84.$$

b) De igual manera, encontramos que

$$\begin{aligned}\text{Probabilidad de que } 9.9 \le x \le 10.1 \\ \text{dado que } 5.3 \le y \le 5.5\end{aligned} = \frac{\text{Probabilidad de que } 9.9 \le x \le 10.1 \text{ y } 5.3 \le y \le 5.5}{\text{Probabilidad de que } 5.3 \le y \le 5.5}$$

$$= \frac{\dfrac{50\sqrt{2}}{\pi}\displaystyle\int_{9.9}^{10.1}\int_{5.3}^{5.5} e^{-100(x-10)^2} e^{-50(y-5)^2}\,dy\,dx}{\dfrac{50\sqrt{2}}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{5.3}^{5.5} e^{-100(x-10)^2} e^{-50(y-5)^2}\,dy\,dx}$$

$$\approx \frac{0.00114}{0.00135} \approx 0.84.$$

Veamos los denominadores de las relaciones empleadas para calcular las probabilidades condicionales. Observe que es mucho menos probable que $5.3 \le y \le 5.5$ a que $4.9 \le y \le 5.1$ (una probabilidad de 0.00135 en contra de 0.68). Sin embargo, la probabilidad para que la longitud x caiga en el margen entre $9.9 \le x \le 10.1$ es la misma en ambos casos, o sea alrededor de 0.84. Por lo tanto, es evidente que la variación en la longitud es independiente de la variación en el diámetro. Decimos que las variables x y y son *independientes.*

Ejemplo 7 Para la función de densidad del ejemplo 2, encontrar la probabilidad de que $x \le 1/2$ dado que $y \le 1/2$.

Solución Tenemos que

$$\begin{aligned}\text{Probabilidad de que} \\ x \le \tfrac{1}{2} \text{ dada } y \le \tfrac{1}{2}\end{aligned} = \frac{\text{Probabilidad de que } x \le \frac{1}{2} \text{ y } y \le \frac{1}{2}}{\text{Probabilidad de que } y \le \frac{1}{2}} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3}$$

Como $1/3 < 3/8$, vemos que tener $y \le 1/2$ hace menos probable que $x \le 1/2$. En este caso las variables no parecen ser independientes.

¿Cómo puede saberse si dos variables son independientes?

Se dice que dos eventos son independientes si la probabilidad de que ambos ocurran es el producto de las probabilidades de que ocurrieran individualmente. Por ejemplo, si se tiran dos dados, la probabilidad de un doble cuatro es $(1/6) \cdot (1/6) = 1/36$. Esto es porque la cara que aparezca en el primer dado es independiente de la cara que aparezca en el segundo, y la probabilidad de que salga un cuatro en cualquiera de los dados es 1/6. Utilizamos esta idea para encontrar la función de distribución de probabilidad mixta para dos características x y y que varían de manera independiente en una población.

Supongamos que x tiene función de densidad $p_1(x)$ y y tiene función de densidad $p_2(y)$. Si x y y son independientes, entonces esperamos que

$$\begin{aligned}\text{Probabilidad de que} \\ x_0 \le x \le x_0 + \Delta x \\ \text{y } y_0 \le y \le y_0 + \Delta y\end{aligned} = \begin{aligned}&\text{Probabilidad de que} \\ &x_0 \le x \le x_0 + \Delta x\end{aligned} \quad \begin{aligned}&\text{Probabilidad de que} \\ &y_0 \le y \le y_0 + \Delta y\end{aligned}$$

$$\approx (p_1(x_0)\,\Delta x) \cdot (p_2(y_0)\,\Delta y)$$

$$= p_1(x_0)p_2(y_0)\,\Delta x\,\Delta y.$$

Por otra parte, si $p(x, y)$ es la función de densidad mixta para x y y,

$$\begin{aligned}\text{Probabilidad de que } x_0 \le x \le x_0 + \Delta x \text{ y } y_0 \le y \le y_0 + \Delta y &= \text{Volumen bajo la gráfica de } p \text{ arriba de } x_0 \le x \le x_0 + \Delta x,\ y_0 \le y \le y_0 + \Delta y \\ &\approx (p(x_0, y_0)\,\Delta x\,\Delta y.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$p_1(x_0)p_2(y_0)\Delta x\,\Delta y \approx p(x_0, y_0)\,\Delta x\,\Delta y.$$

Al dividir entre $\Delta x\,\Delta y$, llegamos a la conclusión de que:

> Si x tiene densidad de probabilidad $p_1(x)$ y y tiene densidad de probabilidad $p_2(y)$, y si x y y son independientes, entonces la densidad mixta para x y y es $p(x, y) = p_1(x)p_2(y)$.

Y recíprocamente, si la función de densidad mixta $p(x, y)$ se puede escribir como producto de las funciones de densidad de una variable $p_1(x)$ y $p_2(y)$, entonces

$$\begin{aligned}\text{Probabilidad de que } a \le x \le b \text{ y } c \le y \le d &= \int_a^b \int_c^d p_1(x)\,p_2(y)\,dy\,dx \\ &= \int_a^b p_1(x)\left(\int_c^d p_2(y)\,dy\right)dx \\ &= \int_a^b p_1(x)\,dx \cdot (\text{probabilidad de que } c \le y \le d) \\ &= \text{Probabilidad de que } a \le x \le b \cdot \text{probabilidad de que } c \le y \le d.\end{aligned}$$

Por esto las variables son independientes y, en consecuencia, concluimos que:

> Si la función de densidad mixta p de x y y puede expresarse como un producto $p(x, y) = p_1(x)p_2(y)$, donde p_1 y p_2 son funciones de densidad, entonces x y y son independientes.

La función de densidad de probabilidad *normal* de una variable con media μ y desviación estándar σ está definida por

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

La función de densidad normal aparece con frecuencia en aplicaciones y es una de las funciones de densidad de probabilidad de más amplio uso.

Ejemplo 8 Demostrar que la longitud y diámetro de las componentes del ejemplo 5 son independientes.

Solución La función de densidad conjunta se puede escribir como

$$\frac{50\sqrt{2}}{\pi}\,e^{-100(x-10)^2}\,e^{-50(y-5)^2} = \left(\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-10)^2/(2\left(\frac{1}{10\sqrt{2}}\right)^2)}\right)\left(\frac{10}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-(y-5)^2/(2\left(\frac{1}{10}\right)^2)}\right),$$

que es el producto de una distribución normal en x con media 10 y desviación estándar $1/(10\sqrt{2})$ y un distribución normal en y con media 5 y desviación estándar 1/10.

Problemas para la sección 15.7

1. Si x y y tienen función de densidad mixta

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y) & \text{para } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que a) $x > 1/3$. b) $x < (1/3) + y$.

2. La tabla 15.14 contiene algunos valores de la función de densidad mixta para dos variables x y y. Suponemos que x puede tomar valores de 1, 2, 3 y 4 y que y puede tomar valores de 1, 2 y 3.
   a) Explique por qué esta tabla define una función de densidad mixta.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que $x = 2$?
   c) Encuentre la probabilidad de que $y \le 2$.
   d) Encuentre la probabilidad de que $x \le 3$ y $y \le 2$.

TABLA 15.14

x \ y	1	2	3
1	0.3	0.2	0.1
2	0.2	0.1	0
3	0.1	0	0
4	0	0	0

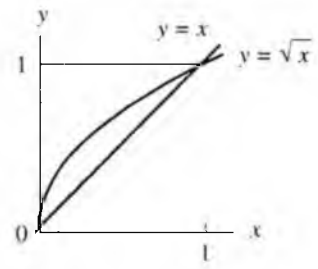


Figura 15.51

3. Suponga que la función de densidad mixta para x, y está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy & \text{para } 0 \le x \le y \le 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   a) Determine el valor de k.
   b) Encuentre la probabilidad de que (x, y) esté en la región sombreada de la figura 15.51.

4. Una función de densidad mixta está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} kx^2 & \text{para } 0 \le x \le 2 \text{ y } 0 \le y \le 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   a) Encuentre el valor de la constante k.
   b) Encuentre la probabilidad de que un punto (x, y) satisfaga $x + y \le 2$.
   c) Encuentre la probabilidad de que un punto (x, y) satisfaga $x \le 1$ y $y \le 1/2$.

5. Una compañía aseguradora de servicios médicos necesita saber qué proporción de sus pólizas les costará mucho dinero porque las personas aseguradas tienen más de 65 años y están enfermas. Para calcular esta proporción, la compañía define un *índice de incapacidad, x,* con $0 \le x \le 1$, donde $x = 0$ representa perfecta salud y $x = 1$ representa incapacidad total. Además, la compañía utiliza una función de densidad $f(x, y)$, definida de manera tal que la cantidad

$$f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y$$

aproxima la fracción de población con índice de incapacidad entre x y $x + \Delta x$, y con edad entre y y $y + \Delta y$. La compañía sabe por experiencia que una póliza ya no cubre su costo si la persona asegurada tiene más de 65 años y un índice de incapacidad mayor de 0.8. Escriba una expresión para encontrar la fracción de las pólizas de la compañía en poder de personas que satisfacen estos criterios.

6. Suponga que se selecciona un punto al azar de la región S del plano xy que contiene todos los puntos (x, y) tales que $-1 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$ y $x - y \ge 0$ (al azar quiere decir que la función de densidad es constante sobre S).
   a) Determine la función de densidad mixta para x y y.
   b) Si T es un subconjunto de S con área a, entonces encuentre la probabilidad de que un punto (x, y) esté en T.

7. Encuentre la densidad conjunta de x y y, donde x y y son independientes, x tiene una distribución normal con media 5 y desviación estándar 1/10, y y tiene una distribución normal con media 15 y desviación estándar 1/6.

8. La probabilidad de que una sustancia radiactiva se desintegre en el tiempo t es modelada por la función de densidad

$$p(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

para $t \ge 0$, y $p(t) = 0$ para $t < 0$. La constante positiva λ depende del material, y recibe el nombre de tasa de desintegración.
   a) Verifique que p sea una función de densidad.
   b) Considere dos materiales con tasas de desintegración λ y μ, que se desintegran independientemente uno de otro. Escriba la función de densidad mixta para la probabilidad de que el primer material se desintegre en el tiempo t y el segundo en el tiempo s.
   c) Encuentre la probabilidad de que la primera sustancia se desintegre antes que la segunda.

9. Suponga que la figura 15.52 representa un campo de béisbol, con las bases en (1, 0), (1, 1), (0, 1) y la placa del *home* en (0, 0). El límite exterior de los jardines es una parte de círculo alrededor del origen, con radio 4. Siempre que un bateador golpea una pelota podemos registrar el lugar del campo (es decir, en el plano) donde un jugador atrapa la pelota.

   Sea $p(r, \theta)$ una función en el plano que indica la densidad de la distribución de esos lugares. Escriba una expresión que represente la probabilidad de que un *hit* sea atrapado en
   a) El jardín derecho (región R) b) El jardín central (región C).

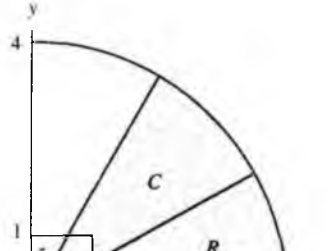


Figura 15.52

15.8 NOTAS ACERCA DEL CAMBIO DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL MÚLTIPLE

En las secciones anteriores usamos coordenadas polares, cilíndricas y esféricas para simplificar integrales iteradas; en esta sección estudiamos cambios de variables más generales. En el proceso, veremos de dónde sale el factor extra de r cuando cambiamos de coordenadas cartesianas a polares, y el factor $\rho^2 \operatorname{sen} \phi$ cuando cambiamos de coordenadas cartesianas a esféricas.

Repaso de cambio polar de variables

Considere la integral $\int_R (x + y)\, dA$ donde R es la región del primer cuadrante limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 16$ y los ejes x y y. Al escribir la integral en coordenadas cartesianas y polares tenemos

$$\int_R (x + y)\, dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16 - x^2}} (x + y)\, dy\, dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^4 (r \cos\theta + r \operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

Ésta es una integral sobre el rectángulo en el espacio $r\theta$ dado por $0 \le r \le 4$, $0 \le \theta \le \pi/2$. La conversión de coordenadas polares a cartesianas cambia este rectángulo en un cuarto de disco. La figura 15.53 muestra la forma en que un rectángulo típico (sombreado) del plano $r\theta$, con lados de longitud Δr y $\Delta\theta$, corresponde a un rectángulo curvo del plano xy con lados de longitud Δr y $r\Delta\theta$. La r extra se hace necesaria debido a la correspondencia entre r,θ y x,y no sólo encorva las rectas $r = 1, 2, 3, \ldots$ en círculos, sino que también alarga las rectas alrededor de círculos cada vez más grandes.

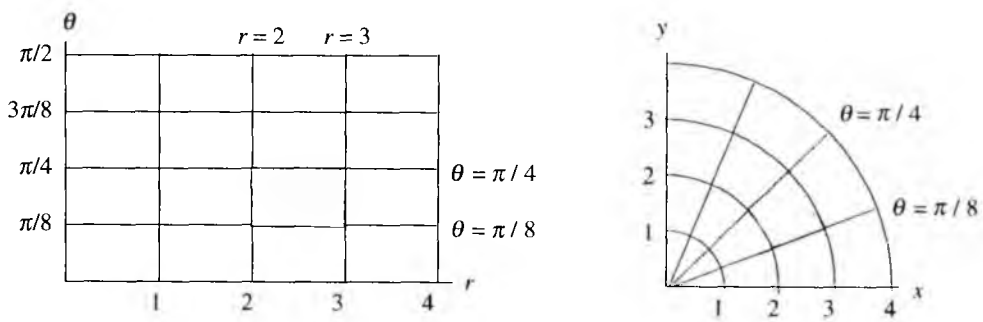


Figura 15.53 Cuadrícula del plano $r\theta$ y la correspondiente cuadrícula curva del plano xy.

Cambio general de variables

Consideremos ahora un cambio general de variable, donde las coordenadas x, y están relacionadas a las coordenadas s,t por las funciones diferenciables

$$x = x(s, t) \qquad y = y(s, t)$$

Así como una región rectangular del plano $r\theta$ corresponde a una región circular del plano xy, una región rectangular, T, del plano st corresponde a una región curvada, R, del plano xy. Suponemos que el cambio de coordenadas es uno a uno, es decir, que cada punto de R corresponde a un punto de T.

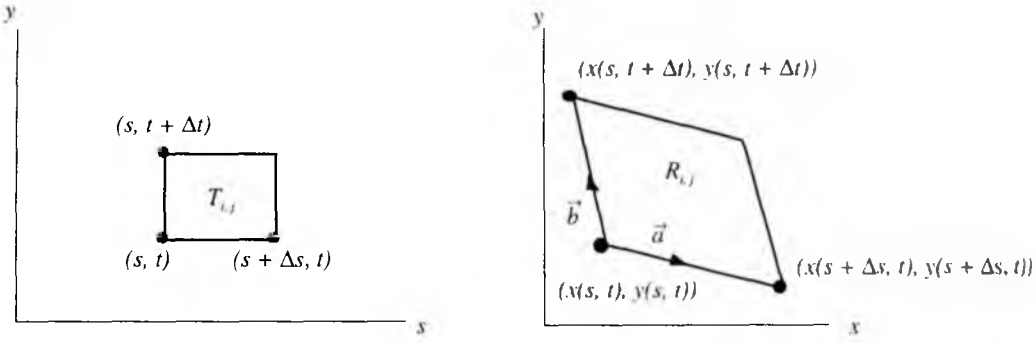


Figura 15.54 Un rectángulo T_{ij} del plano st y la correspondiente región R_{ij} del plano xy.

Dividimos T en pequeños rectángulos T_{ij} con lados de longitud Δs y Δt (véase Fig. 15.54). La parte correspondiente R_{ij} del plano xy es un cuadrilátero con lados curvos. Si escogemos Δs y Δt muy pequeños, entonces por linealidad local, R_{ij} es aproximadamente un paralelogramo.

Recuerde del capítulo 12 que el área del paralelogramo con lados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$. Por lo tanto, es necesario expresar los lados de R_{ij} como vectores. El lado de R_{ij} correspondiente al lado inferior de T_{ij} tiene extremos en $(x(s,t), y(s,t))$ y $(x(s + \Delta s,t), y(s + \Delta s,t))$, así que en forma vectorial dicho lado mide

$$\vec{a} = (x(s + \Delta s, t) - x(s, t))\vec{i} + (y(s + \Delta s, t) - y(s, t))\vec{j} + 0\vec{k} \approx \left(\frac{\partial x}{\partial s}\Delta s\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\Delta s\right)\vec{j} + 0\vec{k}.$$

De igual manera, el lado de R_{ij} correspondiente al borde izquierdo de T_{ij} está dado por

$$\vec{b} \approx \left(\frac{\partial x}{\partial s}\Delta t\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\Delta t\right)\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Al calcular el producto cruz tenemos

$$\text{Área } R_{ij} \approx \|\vec{a} \times \vec{b}\| \approx \left|\left(\frac{\partial x}{\partial s}\Delta s\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\Delta t\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial t}\Delta t\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}\Delta s\right)\right|$$

$$= \left|\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right| \Delta s \Delta t.$$

Si se usa notación de determinantes, definimos el *jacobiano*, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$, como sigue

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$$

Por lo tanto, puede escribirse

$$\text{Área } R_{ij} \approx \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}\right| \Delta s\, \Delta t$$

Para calcular $\int_R f(x + y)\, dA$, donde f es una función continua, nos fijamos en la suma de Riemann obtenida al dividir la región R en pequeñas regiones curvadas R_{ij} y resulta

$$\int_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \cdot \text{Área de } R_{i,j} \approx \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \right| \Delta s\, \Delta t.$$

Cada punto (x_i, y_j) corresponde a un punto (s_i, t_j), así que la suma puede escribirse en términos de s y t:

$$\sum_{i,j} f(x, y)\, dA = \int_T f(x(s_i, t_j), y(s_i, t_j)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \right| ds\, dt.$$

Ésta es una suma de Riemann en términos de s y t, así que a medida que Δs y Δt se aproximan a 0, tenemos

$$\int_R f(x, y)\, dA = \int_T f(x(s, t), y(s, t)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \right| ds\, dt.$$

Para convertir una integral de coordenadas x, y a s, t hacemos tres cambios:

1. Sustituir x y y en el integrando en términos de s y t.
2. Cambiar la región xy de R en una región st de T.
3. Introducir el valor absoluto del jacobiano, $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}$, que representa el cambio del elemento de área.

Ejemplo 1 Verificar que el jacobiano $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$ para coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$.

Solución

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -r \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta = r.$$

Ejemplo 2 Encontrar el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución Sea $x = as$, $y = bt$. Entonces la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ del plano xy corresponde al círculo $s^2 + t^2 = 1$ del plano st. El jacobiano es $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$. Por lo tanto, si hacemos que R sea la elipse del plano xy y T el círculo unitario del plano st, tenemos

$$\text{Área de elipse } xy = \int_R 1\, dA = \int_T 1 ab\, ds\, dt = ab \int_T ds\, dt = ab \cdot \text{Área de círculo } st = \pi ab.$$

Cambio de variables en integrales triples

Para integrales triples existe una fórmula similar. Supongamos que las funciones diferenciables

$$x = x(s, t, u), \quad y = y(s, t, u), \quad z = z(s, t, u)$$

definen un cambio de variables de una región S en el espacio stu a una región W en el espacio xyz. Entonces, el jacobiano de este cambio de variables está dado por el determinante

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, t, u)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix}.$$

Así como el jacobiano en dos dimensiones indica el cambio del elemento de área, el jacobiano en tres dimensiones representa el cambio del elemento de volumen. Por lo tanto, tenemos

$$\int_w f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_s f\,(x(s, t, u), y\,(s, t, u), z(s, t, u)) \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, t, u)}\right| ds\, dt\, du.$$

El problema 3 que está al final de esta sección pide verificar que el jacobiano del cambio de variables a coordenadas esféricas es $\rho^2 \operatorname{sen} \phi$. El siguiente ejemplo generaliza el ejemplo 2 a elipsoides.

Ejemplo 3 Encontrar el volumen del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Solución Sea $x = as$, $y = bt$, $z = cu$. El jacobiano resulta ser abc. El elipsoide xyz corresponde a la esfera stu: $s^2 + t^2 + u^2 = 1$. Por lo tanto, como en el ejemplo 2,

$$\text{Volumen de elipsoide } xyz = abc \cdot \text{volumen de esfera } stu = abc\,\frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Problemas para la sección 15.8

1. Encuentre la región R del plano xy correspondiente a la región $T = \{(s,t) \mid 0 \le s \le 3, 0 \le t \le 2\}$ bajo el cambio de variables $x = 2s - 3t$, $y = s - 2t$. Compruebe que
$$\int_R dx\, dy = \int_T \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}\right| ds\, dt.$$
2. Encuentre la región R del plano xy correspondiente a la región $T = \{(s,t) \mid 0 \le s \le 2, s \le t \le 2\}$ bajo el cambio de variables $x = s^2$, $y = t$. Compruebe que
$$\int_R dx\, dy = \int_T \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}\right| ds\, dt.$$
3. Calcule el jacobiano para el cambio de variables en coordenadas esféricas:
$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$, $z = \rho \cos \phi$.
4. Para el cambio de variables $x = 3s - 4t$, $y = 5s + 2t$, demuestre que
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \cdot \frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)} = 1$$
5. Utilice el cambio de variables $x = 2s + t$, $y = s - t$ para calcular la integral $\int_R (x + y)\, dA$, donde R es el paralelogramo formado por (0, 0), (3, −3), (5, −2) y (2, 1).
6. Utilice el cambio de variables $x = \frac{1}{2}s$, $y = \frac{1}{3}t$ para calcular la integral $\int_R (x^2 + y^2)\, dA$, donde R es la región limitada por la curva $4x^2 + 9y^2 = 36$.

7. Utilice el cambio de variables $s = xy$, $t = xy^2$ para calcular $\int_R xy^2\, dA$, donde R es la región limitada por $xy = 1$, $xy = 4$, $xy^2 = 1$, $xy^2 = 4$.

8. Evalúe la integral $\int_R \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy$ donde R es el triángulo limitado por $x + y = 1$, $x = 0$ y $y = 0$.

PROBLEMAS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO QUINCE

1. La figura 15.55 muestra contornos del promedio anual de precipitación pluvial (en pulgadas) en América del Sur.[6] Cada cuadro de la cuadrícula mide 500 millas por lado. Calcule el volumen total de lluvia que cae en un año en la región considerada.
2. La figura 15.56 indica isotermas para temperaturas mínimas en invierno en Washington, DC.[7] Los cuadros de la cuadrícula miden una milla por lado. Encuentre la temperatura mínima promedio sobre toda la ciudad (la ciudad es la región sombreada).

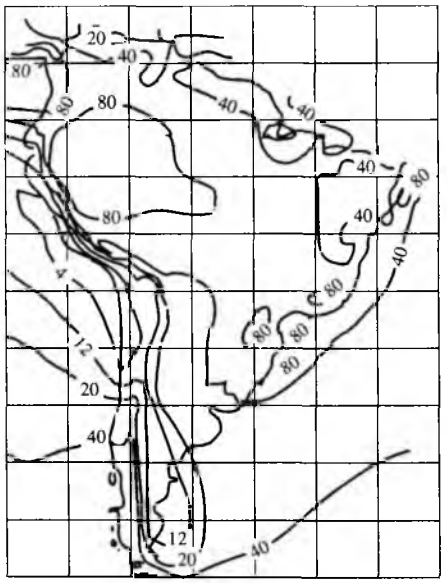


Figura 15.55

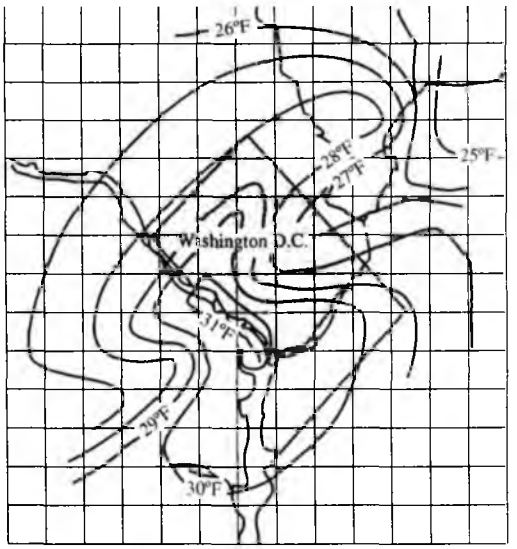


Figura 15.56

Trace las regiones sobre las que se realizan las integrales de los problemas del 3 al 6.

3. $\int_1^4 \int_{-\sqrt{y}}^{y} f(x, y)\, dx\, dy$

4. $\int_0^1 \int_0^{\operatorname{sen}^{-1} y} f(x, y)\, dx\, dy$

5. $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy\, dx$

6. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} f(x, y)\, dx\, dy$

Calcule exactamente las integrales de los problemas del 7 al 12. (En las respuestas puede haber e, π, $\sqrt{2}$, etcétera.)

[6] De *Modern Physical Geography,* Alan H. Strahler y Arthur H. Strahler, 4a. ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 1992, pág. 144.

[7] De *Physical Geography of the Global Environment,* H. J. de Blij y Peter O. Muller, John Wiley & Sons, Nueva York, 1993, pág. 220.

7. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^2 (y+z)^7 \, dx \, dy \, dz$

8. $\int_0^1 \int_3^4 (\operatorname{sen}(2-y)) \cos(3x-7) \, dx \, dy$

9. $\int_0^{10} \int_0^{0.1} xe^{xy} \, dy \, dx$

10. $\int_0^1 \int_0^x (\operatorname{sen}^3 x)(\cos x)(\cos y) \, dx \, dy$

11. $\int_3^4 \int_0^1 x^2 y \cos(xy) \, dy \, dx$

12. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy \, dx$

13. Escriba $\int_R f(x, y) \, dA$ como integral iterada si R es la región de la figura 15.57.

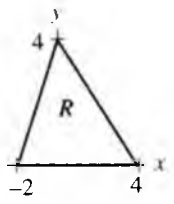


Figura 15.57

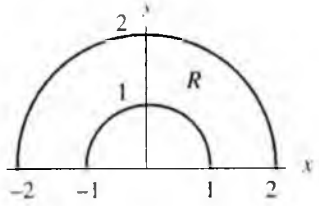


Figura 15.58

14. Evalúe $\int_R \sqrt{x^2+y^2} \, dA$ donde R es la región de la figura 15.58.

15. Formule $\int_R f \, dV$ como integral iterada en todos los seis órdenes posibles de integración, donde R es el hemisferio limitado por la mitad superior de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano xy.

Evalúe las integrales de los problemas 16, 17 y 18 cambiándolas a coordenadas cilíndricas o esféricas como convenga.

16. $\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_1^{4-x^2-y^2} \frac{1}{z^2} \, dz \, dy \, dx$

17. $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-z^2}}^{\sqrt{9-z^2}} \int_{-\sqrt{9-y^2-z^2}}^{\sqrt{9-y^2-x^2}} x^2 \, dx \, dy \, dz$

18. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} (z + \sqrt{x^2+y^2}) \, dz \, dy \, dx$

19. Si $W = \{(x, y, z) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \ 0 \le z \le 4\}$ evalúe la integral $\int_W \frac{z}{(x^2+y^2)^{3/2}} dV$.

20. Escriba una integral que represente la masa de una esfera de radio 3 si la densidad de la esfera en cualquier punto es el doble de la distancia de ese punto al centro de la esfera.

21. Un bosque junto a un camino tiene la forma de la figura 15.59. La densidad de población de conejos es proporcional a la distancia desde el camino. Es 0 en el camino, y de 10 conejos por milla cuadrada en la orilla opuesta del bosque. Encuentre la población total de conejos del bosque.

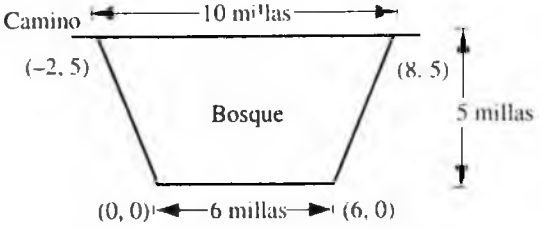


Figura 15.59

Para los problemas 22 y 23 utilice la definición de momento de inercia de la pág. 249.

22. Considere un ladrillo rectangular de longitud 5, ancho 3 y altura 1, y densidad uniforme 1. Calcule el momento de inercia alrededor de cada uno de los tres ejes que pasan por el centro del ladrillo, perpendicular a cada uno de los lados.

23. Calcule el momento de inercia de una pelota de radio R alrededor de un eje que pasa por su centro. Suponga que la pelota tiene densidad constante de 1.

24. En este problema hay que derivar una de las fórmulas notables de las matemáticas, a saber:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\ .$$

a) Cambie la siguiente integral doble a coordenadas polares y evalúela.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

b) Explique por qué

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

c) Explique por qué las respuestas a los incisos a y b dan la fórmula que buscamos.

25. Una partícula de masa m se coloca en el centro de una de las bases de un cascarón cilíndrico circular de radio interior r_1, radio exterior r_2, altura h, y densidad constante δ. Encuentre la fuerza de atracción gravitacional ejercida por el cilindro sobre la partícula.

26. Encuentre el área de la media luna con arcos de círculo como bordes y las dimensiones que se indican en la figura 15.60.

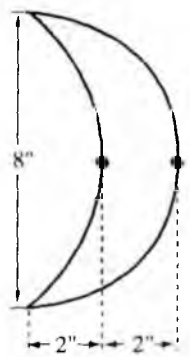


Figura 15.60

27. Encuentre el área de los marcos metálicos con uno o cuatro huecos que se muestran en la figura 15.61. Empiece con coordenadas cartesianas x, y alineadas a lo largo de un lado. Considere coordenadas inclinadas $u = x - y$, $v = y$ en las que el marco queda "enderezado". [Sugerencia: Primero describa la forma del recorte en el plano uv; en seguida calcule su área en el plano uv y, por último, mediante jacobianos, calcule su área en el plano xy.]

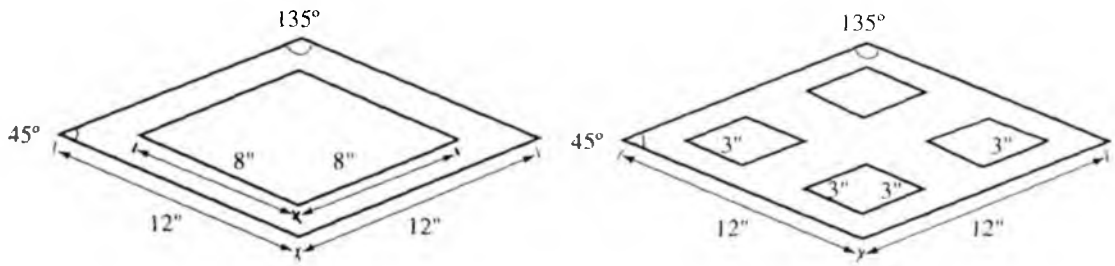


Figura 15.61

28. Un río sigue la trayectoria $y = f(x)$ donde x y y están en kilómetros. Cerca del mar, se ensancha en una laguna, luego se estrecha otra vez en la desembocadura. Véase Fig. 15.62. En el punto (x, y), la profundidad, $d(x, y)$ de la laguna está dada por

$$d(x, y) = 40 - 160(y - f(x))^2 - 40x^2 \text{ metros}$$

La laguna misma está descrita por $d(x, y) \geq 0$. ¿Cuál es el volumen de la laguna en metros cúbicos? [Sugerencia: Utilice nuevas coordenadas $u = x/2$, $v = y - f(x)$ y jacobianos.]

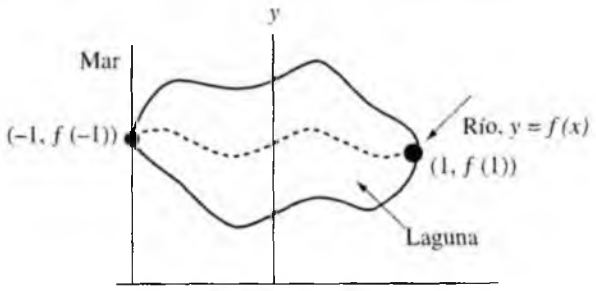


Figura 15.62

CAPÍTULO DIECISÉIS

CURVAS Y SUPERFICIES PARAMETRIZADAS

En el cálculo de una variable estudiamos el movimiento de una partícula a lo largo de una línea. Por ejemplo, representamos el movimiento de un objeto, lanzado al aire hacia arriba, mediante una sola función, $h(t)$, que es la altura del objeto sobre el suelo en el instante t.

Para estudiar el movimiento de una partícula en el espacio, debemos expresar todas las coordenadas de la partícula en términos de t, de lo que resulta $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ si el movimiento es en tres dimensiones. Esto se llama *representación paramétrica* de la trayectoria de movimiento, que es una curva; la representación paramétrica permite encontrar la velocidad y aceleración de la partícula. Además, utilizamos la parametrización para estudiar superficies en el espacio tridimensional.

16.1 CURVAS PARAMETRIZADAS

¿Cómo se representa un movimiento?

Para representar el movimiento de una partícula en el plano xy empleamos dos ecuaciones, una para la coordenada x de la partícula, $x = f(t)$, y otra para la coordenada y, $y = g(t)$. Entonces, en el tiempo t, la partícula está en el punto $(f(t), g(t))$. La ecuación para x describe el movimiento de derecha a izquierda; la ecuación para y describe el movimiento de arriba hacia abajo. Las dos ecuaciones para x y y se llaman *ecuaciones paramétricas* con *parámetro* t.

Ejemplo 1 Describir el movimiento de la partícula cuyas coordenadas en el tiempo t son $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$.

Solución Como $(\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2 = 1$, tenemos $x^2 + y^2 = 1$. Esto es, en cualquier instante t la partícula está en el punto (x, y) en algún lugar del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$. Graficamos los puntos en diferentes instantes para ver cómo se mueve la partícula en el círculo (véanse Fig. 16.1 y tabla 16.1). La partícula se desplaza a una velocidad uniforme, y completa una vuelta alrededor del círculo, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, cada 2π unidades de tiempo. Observe la forma en que la coordenada x pasa repetidamente en un sentido y en otro desde -1 a 1, en tanto que la coordenada y sube y baja repetidamente de -1 a 1. Los dos movimientos se combinan para trazar un círculo.

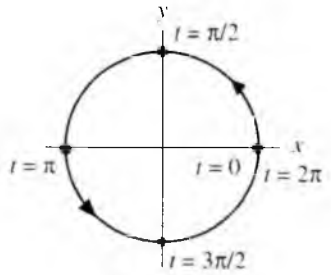


Figura 16.1 El círculo parametrizado por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$.

TABLA 16.1 *Puntos del círculo con* $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$

t	x	y
0	1	0
$\pi/2$	0	1
π	-1	0
$3\pi/2$	0	-1
2π	1	0

Ejemplo 2 La figura 16.2 muestra las gráficas de dos funciones, $f(t)$ y $g(t)$. Describir el movimiento de la partícula cuyas coordenadas en el tiempo t son $x = f(t)$, $y = g(t)$.

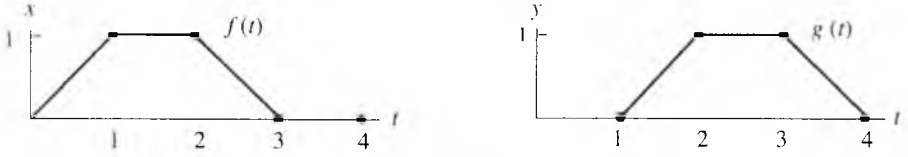


Figura 16.2 Gráficas de $x = f(t)$ y $y = g(t)$ usadas para trazar la trayectoria $(f(t), g(t))$ en la figura 16.3.

Solución Entre los tiempos $t = 0$ y $t = 1$, la coordenada x pasa de 0 a 1, en tanto que la coordenada y permanece fija en 0. De este modo, la partícula se desplaza a lo largo del eje x de (0, 0) a (1, 0). Luego, entre los tiempos $t = 1$ y $t = 2$, la coordenada x permanece fija en $x = 1$ en tanto que la coordenada y pasa de 0 a 1. Entonces, la partícula se desplaza a lo largo de la línea vertical de (1, 0) a (1, 1). Del mismo modo, entre los tiempos $t = 2$ y $t = 3$, se desplaza horizontalmente de regreso a (0, 1), y entre los tiempos $t = 3$ y $t = 4$ desciende por el eje y a (0, 0). De este modo, traza el cuadrado de la figura 16.3.

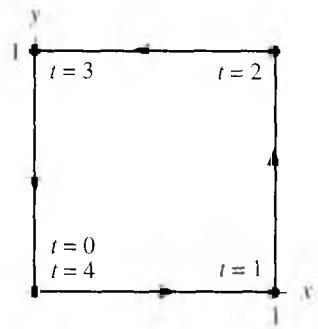


Figura 16.3 El cuadrado parametrizado por $(f(t), g(t))$.

Diferentes movimientos a lo largo de la misma trayectoria

Ejemplo 3 Describir el movimiento de la partícula cuyas coordenadas x y y en el tiempo t están dadas por las ecuaciones

$$x = \cos 3t, \quad y = \operatorname{sen} 3t.$$

Solución Como $(\cos 3t)^2 + (\operatorname{sen} 3t)^2 = 1$, tenemos $x^2 + y^2 = 1$, resultando un movimiento alrededor del círculo unitario; pero si graficamos los puntos en tiempos diferentes, vemos que en este caso la partícula se mueve tres veces más rápido que en el ejemplo 1 de la página 284 (véanse Fig. 16.4 y tabla 16.2).

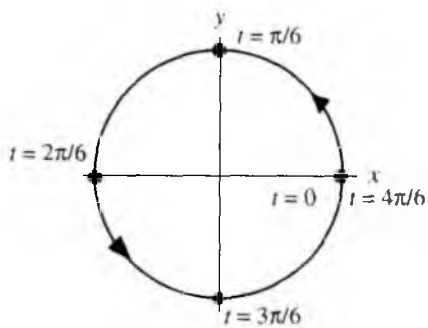


Figura 16.4 El círculo parametrizado por $x = \cos 3t$, $y = \operatorname{sen} 3t$.

TABLA 16.2 *Puntos del círculo con $x = \cos 3t$, $y = \operatorname{sen} 3t$*

t	x	y
0	1	0
$\pi/6$	0	1
$2\pi/6$	−1	0
$3\pi/6$	0	−1
$4\pi/6$	1	0

El ejemplo 3 se obtiene del ejemplo 1 al sustituir t por $3t$, lo que recibe el nombre de *cambio de parámetro*. Si hacemos un cambio de parámetro, la partícula traza la misma curva (o una parte de ella) pero a una velocidad diferente o en una dirección diferente. La sección 16.2 muestra la manera de calcular la velocidad de una partícula en movimiento.

Ejemplo 4 Describir el movimiento de la partícula cuyas coordenadas x y y en el tiempo t son

$$x = \cos(e^{-t^2}), \quad y = \operatorname{sen}(e^{-t^2}).$$

Solución Al igual que en los ejemplos 1 y 3, tenemos que $x^2 + y^2 = 1$, de manera que el movimiento ocurre en el círculo unitario. Conforme el tiempo t pasa de $-\infty$ (hace mucho tiempo) a 0 (el presente) y al ∞ (dentro de mucho tiempo), e^{-t^2} pasa de casi 0 a 1 y regresa a casi 0. Por lo tanto, $(x, y) = (\cos(e^{-t^2}), \operatorname{sen}(e^{-t^2}))$ pasa de casi (1, 0) a (cos 1, sen 1) y regresa a casi (1, 0). En realidad, la partícula no llega al punto (1, 0) (véanse Fig. 16.5 y tabla 16.3).

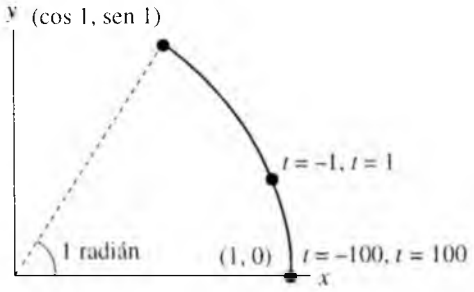


Figura 16.5 El círculo parametrizado por $x = \cos(e^{-t^2})$, $y = \operatorname{sen}(e^{-t^2})$.

TABLA 16.3 *Puntos en círculo con* $x = \cos(e^{-t^2})$, $y = \operatorname{sen}(e^{-t^2})$

t	x	y
−100	~1	~0
−1	0.93	0.36
0	0.54	0.84
1	0.93	0.36
100	~1	~0

Representaciones paramétricas de curvas en el plano

A veces nos interesa más la curva trazada por la partícula que el movimiento mismo. En ese caso las ecuaciones paramétricas reciben el nombre de *parametrización* de la curva. Como puede verse al comparar los ejemplos 1 y 3, dos parametrizaciones diferentes pueden describir la misma curva en dos dimensiones. Aun cuando el parámetro, que por lo general se denota por t, puede no tener significado físico, es todavía útil considerarlo como tiempo.

Ejemplo 5 Dar una parametrización del semicírculo de radio 1 que se muestra en la figura 16.6.

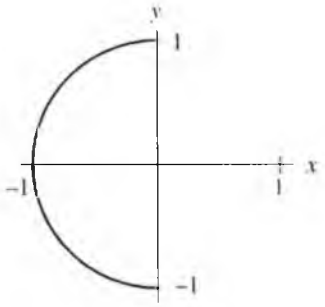


Figura 16.6 Encuentre una parametrización de este semicírculo.

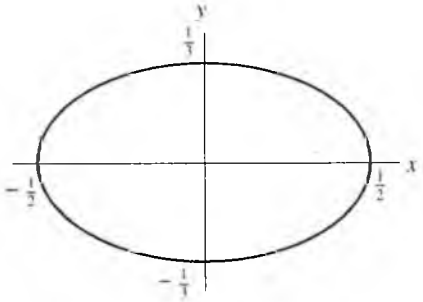


Figura 16.7 Encuentre una parametrización de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 1$.

Solución Podemos usar las ecuaciones $x = \cos t$ y y sen t para el movimiento en sentido contrario al de las manecillas del reloj en un círculo, del ejemplo 1 de la página 284. La partícula pasa por (0, 1) en $t = \pi/2$, se desplaza en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj alrededor del círculo, y llega a (0, −1) en $t = 3\pi/2$. Por lo tanto, una parametrización es

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}.$$

Ejemplo 6 Dar una parametrización de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 1$ que se muestra en la figura 16.7.

Solución Como $(2x)^2 + (3y)^2 = 1$, adaptamos la parametrización del círculo del ejemplo 1. Al sustituir x por $2x$ y y por $3y$ resultan las ecuaciones $2x = \cos t$, $3y = \operatorname{sen} t$. Una parametrización de la elipse es entonces

$$x = \frac{1}{2}\cos t, \qquad y = \frac{1}{3}\operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Por lo general, necesitamos que la parametrización de una curva recorra la curva de un extremo al otro sin repasar parte alguna. Esto es diferente de la parametrización del movimiento de una partícula, donde, por ejemplo, una partícula puede desplazarse muchas veces alrededor del mismo círculo.

Parametrización de la gráfica de una función

La gráfica de cualquier función $y = f(x)$ puede parametrizarse si se logra que el parámetro t sea x:

$$x = t, \qquad y = f(t).$$

Ejemplo 7 Dar ecuaciones paramétricas para la curva $y = x^3 - x$. ¿En qué dirección traza la curva esta parametrización?

Solución Sea $x = t$, $y = t^3 - t$. Entonces, $y = t^3 - t = x^3 - x$. Como $x = t$, la coordenada de x se desplaza de izquierda a derecha conforme el tiempo aumenta, de modo que la partícula traza la curva $y = x^3 - x$ de izquierda a derecha.

Curvas dadas paramétricamente

Algunas curvas complicadas pueden graficarse más fácilmente si se emplean ecuaciones paramétricas; el siguiente es un ejemplo de tales curvas.

Ejemplo 8 Suponga que t es el tiempo en segundos. Dibuje la curva trazada por la partícula cuyo movimiento está dado por

$$x = \cos 3t, \qquad y = \operatorname{sen} 5t.$$

Solución La coordenada x oscila hacia adelante y hacia atrás entre 1 y -1, completando 3 oscilaciones cada 2π segundos. La coordenada y oscila hacia arriba y hacia abajo entre 1 y -1, completando 5 oscilaciones cada 2π segundos. Como las coordenadas en x y en y regresan a sus valores originales cada 2π segundos, la curva se vuelve a trazar cada 2π segundos. El resultado es una curva llamada figura de Lissajous (véase Fig. 16.8). Los problemas del 35 al 38 se refieren a figuras de Lissajous con $x = \cos at$, $y = \operatorname{sen} bt$ para otros valores de a y b.

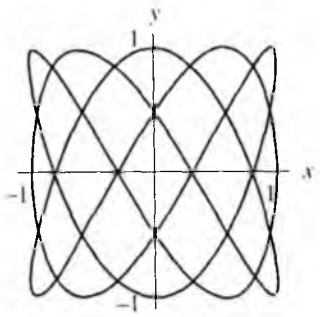


Figura 16.8 Una figura de Lissajous: $x = \cos 3t$, $y = \operatorname{sen} 5t$.

Ecuaciones paramétricas en tres dimensiones

Para describir paramétricamente un movimiento en el espacio tridimensional, necesitamos una tercera ecuación que proporcione z en términos de t.

Ejemplo 9 Describir verbalmente el movimiento dado paramétricamente por

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = t.$$

Solución Las coordenadas x y y de la partícula son las mismas que en el ejemplo 1, que produce movimiento circular en el plano xy, en tanto que la coordenada z aumenta de manera constante. De este modo, la partícula traza una espiral ascendente, como un resorte helicoidal (véase Fig. 16.9). Esta curva se llama *hélice.*

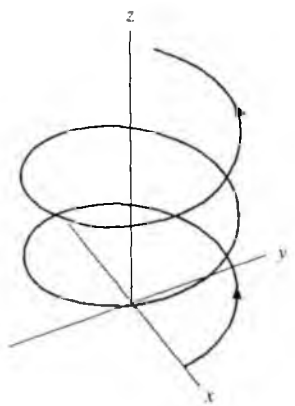


Figura 16.9 La hélice $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$.

Ejemplo10 Encontrar ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto (1, 5, 7) y es paralela al vector $2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Solución Imaginemos una partícula en el punto (1, 5, 7) en el tiempo $t = 0$ que efectúa un desplazamiento de $2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ por cada unidad de tiempo, t. Cuando $t = 0$, $x = 1$ y x aumenta en dos unidades por cada unidad de tiempo. Así, en el tiempo t, la coordenada x de la partícula está dada por

$$x = 1 + 2t.$$

Análogamente, la coordenada y comienza en $y = 5$ y aumenta a razón de 3 unidades por cada unidad de tiempo; la coordenada z, en $z = 7$ y aumenta en cuatro unidades por cada unidad de tiempo. Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$x = 1 + 2t, \quad y = 5 + 3t, \quad z = 7 + 4t.$$

El ejemplo anterior puede generalizarse así:

Las ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y es paralela al vector $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ son

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

Observe que la parametrización obtenida antes para una recta expresa las coordenadas x, y y z como funciones lineales del parámetro t.

Ejemplo 11 a) Describir verbalmente la curva dada por estas ecuaciones paramétricas:

$$x = 3 + t, \quad y = 2t, \quad z = 1 - t.$$

b) Encontrar ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los puntos $(1, 2, -1)$ y $(3, 3, 4)$.

Solución a) La curva es una recta que pasa por el punto $(3, 0, 1)$ y es paralela al vector $\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

b) La recta es paralela al vector de desplazamiento entre los puntos $P = (1, 2, -1)$ y $Q = (3, 3, 4)$.

$$\vec{PQ} = (3 - 1)\vec{i} + (3 - 2)\vec{j} + (4 - (-1))\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}.$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas son

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + t, \quad z = -1 + 5t.$$

Observe que las ecuaciones $x = 3 + 2t$, $y = 3 + t$, $z = 4 + 5t$ representan a la misma recta.

¿Dónde atraviesa una curva a una superficie?

Las ecuaciones paramétricas para una curva permiten encontrar en dónde la curva interseca una superficie dada.

Ejemplo 12 Encontrar los puntos donde la recta $x = t$, $y = 2t$, $z = 1 + t$ atraviesa la esfera de radio 10 con centro en el origen.

Solución La ecuación para la esfera de radio 10 y centro en el origen es

$$x^2 + y^2 + z^2 = 100.$$

Para encontrar los puntos de intersección de la línea y la esfera, se sustituyen las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación de la esfera, de lo cual resulta

$$t^2 + 4t^2 + (1 + t)^2 = 100,$$

o bien

$$6t^2 + 2t - 99 = 0,$$

que tiene sus dos soluciones en aproximadamente $t = -4.23$ y $t = 3.90$. Si se utiliza la ecuación paramétrica para la recta, $(x, y, z) = (t, 2t, 1+t)$, vemos que ésta corta la esfera en los dos puntos

$$(x, y, z) = (-4.23, 2(-4.23), 1 + (-4.23)) = (-4.23, -8.46, -3.23),$$

y

$$(x, y, z) = (3.90, 2(3.90), 1 + 3.90) = (3.90, 7.80, 4.90),$$

Problemas para la sección 16.1

Para los problemas del 1 al 4, describa el movimiento de una partícula cuya posición en el tiempo t es $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde las gráficas de f y g son como se muestra.

1.

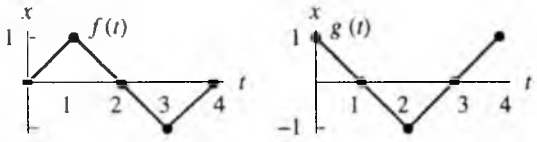


Figura 16.10

2.

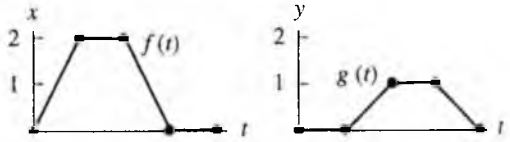


Figura 16.11

3.

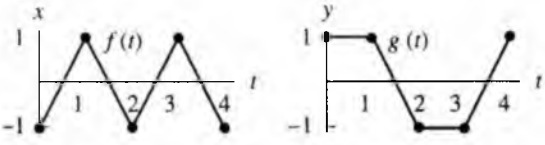


Figura 16.12

4.

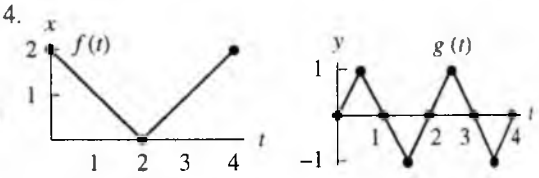


Figura 16.13

Los problemas del 5 al 10 dan parametrizaciones del círculo unitario, o de una parte del mismo. En cada caso, describa verbalmente cómo el movimiento dibuja el círculo, incluyendo cuándo y dónde la partícula se desplaza en el sentido de las manecillas del reloj y cuándo y dónde lo hace en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

5. $x = \cos t$, $y = -\text{sen } t$
6. $x = \text{sen } t$, $y = \cos t$
7. $x = \cos(t^2)$, $y = -\text{sen}(t^2)$
8. $x = \cos(t^3 - t)$, $y = \text{sen}(t^3 - t)$
9. $x = \cos(\ln t)$, $y = -\text{sen}(\ln t)$
4. $x = \cos(\cos t)$, $y = \text{sen}(\cos t)$
11. Describa las semejanzas y diferencias entre los movimientos en el plano dados por los siguientes tres pares de ecuaciones paramétricas:
    a) $x = t$, $y = t^2$ b) $x = t^2$, $y = t^4$ c) $x = t^3$, $y = t^6$.

Escriba una parametrización para cada curva del plano xy en los problemas del 12 al 18.

12. Un círculo de radio 3 con centro en el origen y trazado en el sentido de las manecillas del reloj.
13. Una línea vertical que pasa por el punto $(-2, -3)$.
14. Un círculo de radio 5 con centro en el punto $(2, 1)$ y trazado en sentido contrario de las manecillas del reloj.

15. Un círculo de radio 2 con centro en el origen, trazado en el sentido de las manecillas del reloj comenzando desde $(-2, 0)$ cuando $t = 0$.
16. La recta que pasa por los puntos $(2, -1)$ y $(1, 3)$.
17. Una elipse con centro en el origen y que cruza el eje x en ± 5 y el eje y en ± 7.
18. Una elipse con centro en el origen que cruza el eje x en ± 3 y el eje y en ± 7. Comience en el punto $(-3, 0)$ y trace la elipse en sentido contrario al de las manecillas del reloj.
19. Conforme t varía, las siguientes ecuaciones paramétricas trazan una recta en el plano

$$x = 2 + 3t, \quad y = 4 + 7t.$$

a) ¿Qué parte de la recta se obtiene al restringir t a números no negativos?
b) ¿Qué parte de la recta se obtiene si f se restringe a $-1 \le t \le 0$?
c) ¿Cómo debe restringirse t para dar la parte de la recta a la izquierda del eje y ?

20. Suponga que $a, b, c, d, m, n, p, q > 0$. Relacione cada pareja de las ecuaciones paramétricas siguientes con una de las rectas l_1, l_2, l_3, l_4 de la figura 16.14.

I. $\begin{cases} x = a + ct, \\ y = -b + dt. \end{cases}$ II. $\begin{cases} x = m + pt, \\ y = n - qt. \end{cases}$

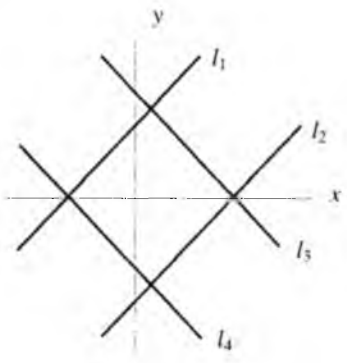


Figura 16.14

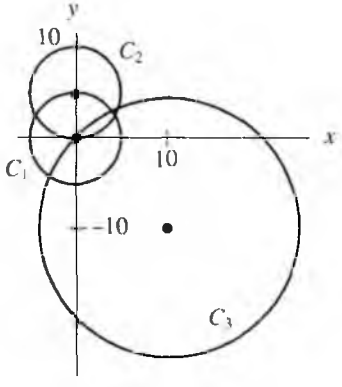


Figura 16.15

21. ¿Qué puede decirse sobre los valores de a, b y k si las ecuaciones

$$x = a + k \cos t, \quad y = b + k \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

trazan cada uno de los círculos de la figura 16.15? a) C_1 b) C_2 c) C_3

22. Describa verbalmente la curva representada por las ecuaciones paramétricas

$$x = 3 + t^2, \quad y = 5 - t^3, \quad z = 7 + 2t^3.$$

Escriba una parametrización en tres dimensiones para cada una de las curvas de los problemas 23 y 24.

23. El círculo de radio 2 en el plano xz, con centro en el origen.
24. El círculo de radio 3 con centro en el punto $(0, 0, 2)$ y paralelo al plano xy.

Para los problemas del 25 al 29, encuentre ecuaciones paramétricas para la recta dada.

25. La recta que pasa por los puntos $(2, 3, -1)$ y $(5, 2, 0)$.
26. La recta que apunta en la dirección del vector $3\vec{j} - 3\vec{j} + \vec{k}$ y pasa por el punto $(1, 2, 3)$
27. La recta paralela al eje z que pasa por el punto $(1, 0, 0)$.
28. La recta de intersección de los planos $x - y + z = 3$ y $2x + y - z = 5$.

29. La recta perpendicular a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto (1, 2, 5).
30. ¿Se intersecan las líneas de los problemas 25 y 26?
31. ¿Es visible el punto (–3, –4, 2) desde el punto (4, 5, 0), si hay una bola opaca de radio 1 con centro en el origen?
32. Demuestre que las ecuaciones

$$x = 3 + t, \quad y = 2t, \quad z = 1 - t$$

satisfacen las ecuaciones $x + y + 3z = 6$ y $x - y - z = 2$. ¿Qué indica esto a cerca de la curva parametrizada por estas ecuaciones?

33. Dos partículas viajan a través del espacio. En el tiempo t la primera partícula está en el punto $(-1 + t, 4 - t, -1 + 2t)$ y la segunda partícula está en $(-7 + 2t, -6 + 2t, -1 + t)$.
    a) Describa las dos trayectorias.
    b) ¿Chocan las dos partículas? Si es así, diga cuándo y dónde.
    c) ¿Se cruzan las trayectorias de las dos partículas? Si es así, diga dónde.
34. Imagine una luz que brilla sobre la hélice del ejemplo 9 en la pág. 288 desde un punto muy abajo de cada uno de los ejes. Trace la sombra que proyecta la hélice sobre cada uno de los planos coordenados: xy, xz y yz.

Grafique las figuras Lissajous en los problemas 35 al 38 usando una calculadora o una computadora.

35. $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} 5t$
36. $x = \cos 3t, \quad y = \operatorname{sen} 7t$
37. $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} 4t$
38. $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} \sqrt{3t}$

39. El movimiento a lo largo de una línea recta está dado por una sola ecuación, por ejemplo $x = t^3 - t$, donde x es distancia a lo largo de la línea. Es difícil ver el movimiento con ayuda de una gráfica, porque sólo traza la línea en x, como en la figura 16.16. Para visualizar el movimiento, introducimos una coordenada y y la dejamos aumentar lentamente, de ello resulta la figura 16.17. Intente lo siguiente en calculadora o computadora. Sea $y = t$. Ahora grafique las ecuaciones paramétricas $x = t^3 - t$, $y = t$ para $-3 \le t \le 3$, por ejemplo. ¿Qué indica la gráfica de la figura 16.17 sobre el movimiento de la partícula?

Figura 16.16

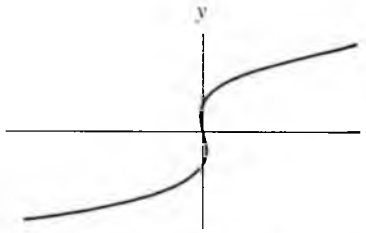


Figura 16.17

Para los problemas 40, 41 y 42 grafique el movimiento a lo largo de la línea x por el método del problema 39. ¿Qué indica cada gráfica sobre el movimiento de la partícula?

40. $x = \cos t, \quad -10 \le t \le 10$
41. $x = t^4 - 2t^2 + 3t - 7, \quad -3 \le t \le 2$
42. $x = t \operatorname{In} t, \quad 0.01 \le t \le 10$

16.2 MOVIMIENTO, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

En esta sección escribimos ecuaciones paramétricas mediante vectores de posición, lo que permite calcular la velocidad y aceleración de una partícula que se desplaza en dos o en tres dimensiones.

Vectores de posición y curvas parametrizadas como funciones vectoriales

Recuerde que un punto en el plano con coordenadas (x, y) se puede representar por el vector de posición $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ que se muestra en la figura 16.18. Análogamente, en tres dimensiones escribimos $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (véase Fig. 16.19).

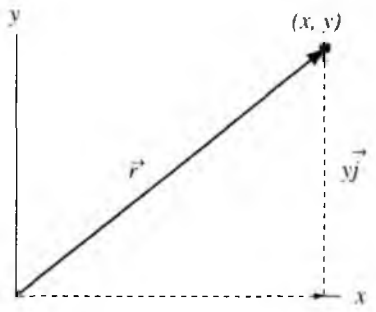


Figura 16.18 Vector de posición $\vec{r}$ del punto (x, y).

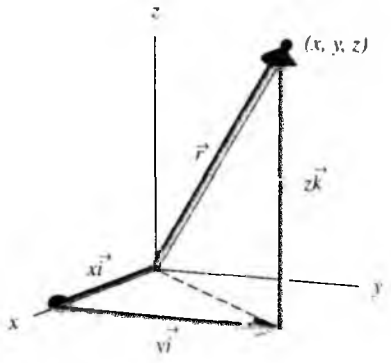


Figura 16.19 Vector de posición $\vec{r}$ del punto (x,y,z).

Las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ pueden escribirse como una sola ecuación vectorial

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

denominada *parametrización*. Según varía el parámetro t, el punto con el vector de posición $\vec{r}(t)$ traza una curva en tres dimensiones. Por ejemplo, el movimiento circular

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t \text{ se puede escribir como } \vec{r} = (\cos t)\vec{i} + (\operatorname{sen} t)\vec{j}$$

y la hélice

$$x = \cos t, \ y = \operatorname{sen} t, \ z = t \text{ se puede escribir como } \vec{r} = (\cos t)\vec{i} + (\operatorname{sen} t)\vec{j} + t\vec{k}$$

Véase la figura 16.20.

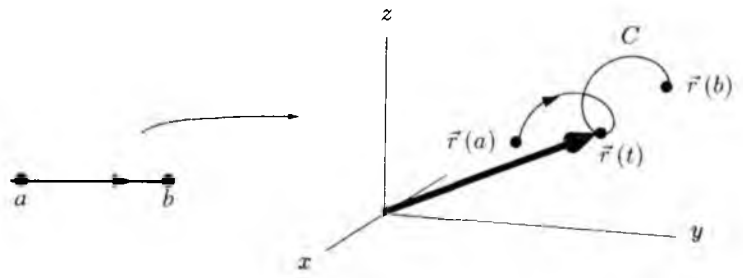


Figura 16.20 La parametrización envía el intervalo $a \le t \le b$, a la curva C, en tres dimensiones.

Ejemplo 1 Encuentre una parametrización para el círculo de radio $\frac{1}{2}$ con centro en el punto $(-1, 2)$.

Solución El círculo de radio 1 con centro en el origen está parametrizado por la función vectorial.

$$\vec{r}_1(t) = \cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

El punto $(-1, 2)$ tiene el vector de posición $\vec{r}0 = -\vec{i} + 2\vec{j}$. El vector de posición $\vec{r}(t)$, de un punto sobre el círculo de radio $\frac{1}{2}$ con centro en $(-1, 2)$ se encuentra al sumar $\frac{1}{2}\vec{r}_1$ a $\vec{r}_0$. (Véanse Figs. 16.21 y 16.22.) De esta manera,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{r}_1(t) = -\vec{i} + 2\vec{j} + \frac{1}{2}(\cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}) = (-1 + \frac{1}{2}\cos t)\,\vec{i} + (2 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t)\,\vec{j},$$

o, lo que es lo mismo,

$$x = -1 + \frac{1}{2}\cos t, \qquad y = 2 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

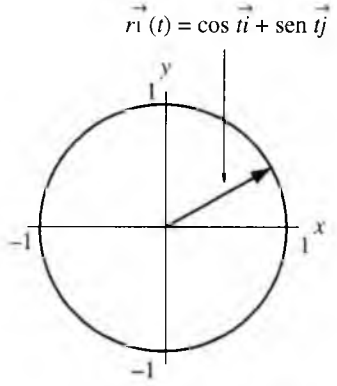


Figura 16.21 El círculo $x^2 + y^2 = 1$ parametrizado por $\vec{r}_1(t) = \cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}$.

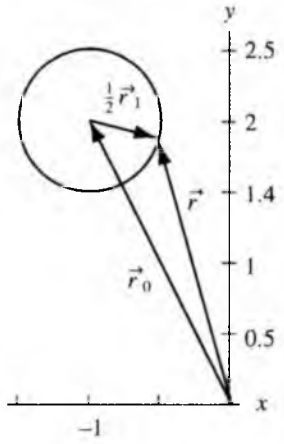


Figura 16.22 El círculo de radio $\frac{1}{2}$ y centro $(-1, 2)$ parametrizado por $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{r}_1(t)$.

Ecuación paramétrica de una recta

Considere una línea recta en la dirección de un vector $\vec{v}$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) con vector de posición $\vec{r}_0$. Se comienza en $\vec{r}_0$ y se avanza hacia arriba y hacia abajo sobre la línea, sumando diferentes múltiplos de $\vec{v}$ a $\vec{r}_0$ (véase Fig. 16.23).

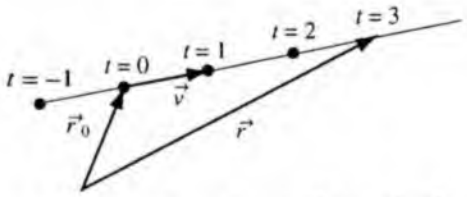


Figura 16.23 La recta $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v}$.

Así, todo punto de la recta se puede escribir como $\vec{r}_0 + t\vec{v}$, y de ahí lo siguiente:

Ecuación paramétrica de una recta

La recta que pasa por el punto con vector de posición $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ en la dirección del vector $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ tiene ecuación paramétrica

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v}.$$

Ejemplo 2 Encontrar la ecuación paramétrica para
a) La recta que pasa por los puntos (2, −1, 3) y (−1, 5, 4).
b) El segmento de recta de (2, −1, 3) a (−1, 5, 4).

Solución a) La recta pasa por (2, −1, 3) y es paralela al vector de desplazamiento $\vec{v} = -3\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$ del punto (2, −1, 3) al (−1, 5, 4). Por lo tanto, la ecuación paramétrica es

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} + t(-3\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}).$$

b) En la parametrización del inciso a, $t = 0$ corresponde al punto (2, −1, 3) y $t = 1$, al punto (−1, 5, 4). De este modo, la parametrización del segmento es

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} + t(-3\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}), \quad 0 \le t \le 1.$$

El vector de velocidad

La velocidad de una partícula en movimiento se puede representar mediante un vector con las siguientes propiedades:

El **vector de velocidad** de un objeto en movimiento es un vector $\vec{v}$ tal que:

- La magnitud de $\vec{v}$ es la velocidad del objeto.
- La dirección de $\vec{v}$ es la dirección del movimiento.

Por lo tanto, la velocidad del objeto es $\|\vec{v}\|$ y el vector velocidad es tangente a la trayectoria del objeto.

Ejemplo 3 Un niño está sentado en una rueda de la fortuna de 10 metros de diámetro que completa una revolución cada 2 minutos. Encuentre la velocidad del niño y dibuje vectores de velocidad en dos tiempos diferentes.

Solución El niño se desplaza a velocidad constante alrededor de un círculo de 5 metros de radio y completa una revolución cada 2 minutos. Una revolución alrededor de un círculo de radio 5 es una distancia de 10π, así que la velocidad del niño es $10\pi/2 = 5\pi \approx 15.7$ m/min. En consecuencia, la magnitud del vector velocidad es 15.7 m/min. La dirección de movimiento es tangente al círculo y, por lo tanto, perpendicular al radio en ese punto. La figura 16.24 muestra la dirección del vector en dos tiempos diferentes.

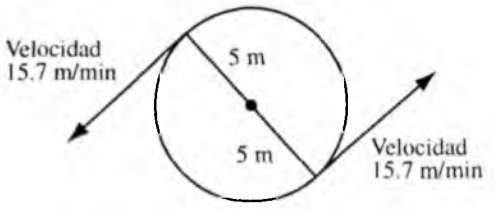


Figura 16.24 Vectores de velocidad de un niño en una rueda de la fortuna (observe que los vectores estarían en dirección opuesta si se ven desde el otro lado).

Cálculo de la velocidad

Encontramos la velocidad, como en el cálculo de una variable, al tomar un límite. Si el vector de posición de la partícula es $\vec{r}(t)$ en el tiempo t, entonces el vector de desplazamiento entre sus posiciones en los tiempos t y $t + \Delta t$ es $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ (véase Fig. 16.25). En este intervalo,

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

En el límite, a medida que Δt tiende a cero, tenemos la velocidad instantánea en el tiempo t:

El **vector de velocidad,** $\vec{v}(t)$, de un objeto en movimiento con vector de posición $\vec{r}(t)$ en el tiempo t es

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

siempre que exista dicho límite. Se utiliza la notación $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'(t)$.

Observe que la dirección del vector de velocidad $\vec{r}\,'(t)$ de la figura 16.25 es aproximadamente la del vector $\Delta\vec{r}$ y que la aproximación mejora a medida que $\Delta t \to 0$.

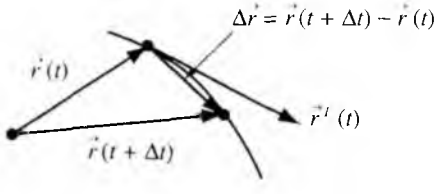


Figura 16.25 El cambio, $\Delta\vec{r}$, en el vector de posición para una partícula que se mueve en una curva y el vector de velocidad $\vec{v} = \vec{r}\,'(t)$

Las componentes del vector de velocidad

Si representamos paramétricamente una curva por medio de $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, entonces su vector de posición puede escribirse como $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$. Podemos ahora calcular el vector de velocidad:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}, \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(f(t+\Delta t)\vec{i} + g(t+\Delta t)\vec{j} + h(t+\Delta t)\vec{k}) - (f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k})}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}\vec{i} + \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}\vec{j} + \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t}\vec{k} \right) \\
&= f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k} \\
&= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos el siguiente resultado:

> Las **componentes del vector de velocidad** de una partícula en movimiento en el espacio, con vector de posición $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ en el tiempo t, están dadas por
>
> $$\vec{v}(t) = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Ejemplo 4 Encontrar las componentes del vector de velocidad para el niño de la rueda de la fortuna del ejemplo 3, usando un sistema coordenado con el origen en el centro de la rueda y de tal manera que la rotación ocurra en sentido contrario de las manecillas del reloj.

Solución La rueda de la fortuna mide 5 metros de radio y completa una revolución cada 2 minutos en sentido contrario de las manecillas del reloj. El movimiento está parametrizado por una ecuación de la forma

$$\vec{r}(t) = 5\cos(\omega t)\vec{i} + 5\operatorname{sen}(\omega t)\vec{j},$$

donde ω se escoge para hacer que el periodo sea 2 minutos. Como el periodo de $\cos(\omega t)$ y $\operatorname{sen}(\omega t)$ es $2\pi/\omega$, debemos tener

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2, \text{ así } \omega = \pi.$$

Por lo tanto, el movimiento está descrito por la ecuación

$$\vec{r}(t) = 5\cos(\pi t)\vec{i} + 5\operatorname{sen}(\pi t)\vec{j},$$

donde t está en minutos. La velocidad está dada por

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = -5\pi\operatorname{sen}(\pi t)\vec{i} + 5\pi\cos(\pi t)\vec{j}.$$

Para comprobar, calculamos la magnitud de $\vec{v}$,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-5\pi)^2\operatorname{sen}^2(\pi t) + (5\pi)^2\cos^2(\pi t)} = 5\pi\sqrt{\operatorname{sen}^2(\pi t) + \cos^2(\pi t)} = 5\pi \approx 15.7,$$

que concuerda con la velocidad que calculamos en el ejemplo 3. Para comprobar que la dirección es correcta, debemos demostrar que el vector $\vec{v}$ en cualquier tiempo t es perpendicular al vector de posición de la partícula en el tiempo t. Para hacer esto, calculamos el producto punto de $\vec{v}$ y $\vec{r}$:

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{r} &= (-5\pi\operatorname{sen}(\pi t)\vec{i} + 5\pi\cos(\pi t)\vec{j}) \cdot (5\cos(\pi t)\vec{i} + 5\operatorname{sen}(\pi t)\vec{j}) \\
&= -25\pi\operatorname{sen}(\pi t)\cos(\pi t) + 25\pi\cos(\pi t)\operatorname{sen}(\pi t) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto el vector de velocidad, $\vec{v}$, es perpendicular a $\vec{r}$ y en consecuencia es tangente al círculo (véase Fig. 16.26).

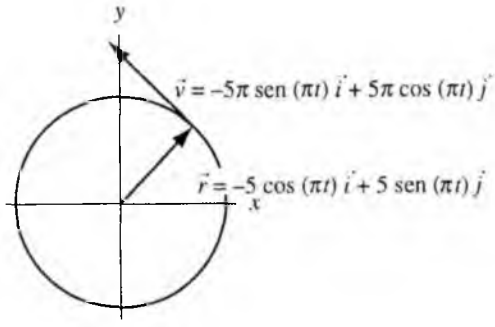


Figura 16.26 Velocidad y radio vector de movimiento alrededor de un círculo.

Vectores de velocidad y líneas tangentes

Como el vector de velocidad es tangente a la trayectoria de movimiento, puede utilizarse para encontrar ecuaciones paramétricas para la línea tangente, si la hay.

Ejemplo 5 Encontrar la línea tangente en el punto (1, 1, 2) a la curva definida por la ecuación paramétrica

$$\vec{r}\,(t) = t^2\vec{i} + t^3\vec{j} + 2t\vec{k}\,.$$

Solución En el tiempo $t = 1$ la partícula está en el punto (1, 1, 2) con vector de posición $r_0 = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. El vector de velocidad en el tiempo t es $\vec{r}\,'(t) = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 2\vec{k}$, así que en el tiempo $t = 1$ la velocidad es $\vec{v} = \vec{r}\,'(1) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. La línea tangente pasa por (1, 1, 2) en la dirección de $\vec{v}$, así que tiene la ecuación paramétrica

$$\vec{r}\,(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v} = (\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) + t\,(2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}).$$

El vector de aceleración

Así como la velocidad de una partícula que se desplaza en dos o tres dimensiones es una cantidad vectorial, también lo es la rapidez de cambio de la velocidad de la partícula, es decir su aceleración. La figura 16.27 muestra una partícula en el tiempo t con vector de velocidad $\vec{v}\,(t)$ y luego un poco después en el tiempo $t + \Delta t$. El vector $\Delta\vec{v} = \vec{v}\,(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$ es el cambio en velocidad y apunta aproximadamente en la dirección de la aceleración. Por lo tanto,

$$\text{Aceleración promedio} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

En el límite, a medida que $\Delta t \to 0$, tenemos la aceleración instantánea en el tiempo t:

El **vector de aceleración** de un objeto que se mueve con velocidad $\vec{v}(t)$ en el tiempo t es

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t},$$

si existe el límite. Usamos la notación $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r}''(t)$.

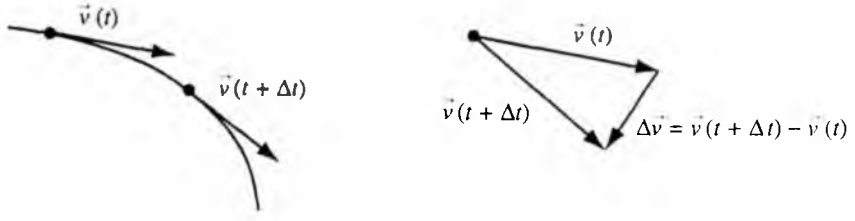


Figura 16.27 Cálculo de la diferencia entre dos vectores de velocidad.

Componentes del vector de aceleración

Si representamos paramétricamente una curva en el espacio mediante $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, podemos expresar la aceleración en componentes. El vector de velocidad $\vec{v}(t)$ está dado por

$$\vec{v}(t) = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}.$$

De la definición del vector de velocidad, tenemos

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Si empleamos el mismo método para calcular $d\vec{v} / dt$ como hicimos para calcular $d\vec{r} / dt$ en la página 297, obtenemos

Las **componentes del vector de aceleración,** $\vec{a}(t)$, en el tiempo t, de una partícula que se mueve en el espacio con vector de posición $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ en el tiempo t, están dadas por

$$\vec{a}(t) = f''(t)\vec{i} + g''(t)\vec{j} + h''(t)\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}.$$

Movimiento en un círculo y a lo largo de una línea

Ejemplo 6 Encontrar el vector de aceleración para el niño de la rueda de la fortuna de los ejemplos 3 y 4.

Solución El vector de posición del niño está dado por $\vec{r}(t) = 5 \cos(\pi t)\vec{i} + 5 \operatorname{sen}(\pi t)\vec{j}$. En el ejemplo 4 vimos que el vector de velocidad es

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = -5\pi \operatorname{sen}(\pi t)\vec{i} + 5\pi \cos(\pi t)\vec{j}.$$

Por lo tanto, el vector de aceleración es

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt}\vec{j} = -(5\pi)\cdot\pi\cos(\pi t)\vec{i} - (5\pi)\cdot\pi\,\text{sen}\,(\pi t)\vec{j}.$$

$$= 5\pi^2\cos(\pi t)\vec{i} - 5\pi^2\,\text{sen}\,(\pi t)\vec{j}$$

Observe que $\vec{a}(t) = -\pi^2\vec{r}(t)$. En consecuencia, el vector de aceleración es un múltiplo de $\vec{r}(t)$ y apunta hacia el origen.

El movimiento del niño de la rueda de la fortuna es un ejemplo de movimiento circular uniforme, cuyas propiedades se enuncian a continuación (véase problema 26).

Movimiento circular uniforme

Una partícula cuyo movimiento está descrito por

$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\vec{i} + R\,\text{sen}\,(\omega t)\vec{j}$$

- Se mueve en un círculo de radio R con periodo $2\pi/\omega$.
- La velocidad, $\vec{v}$, es tangente al círculo y además es constante $\|\vec{v}\| = \omega R$.
- La aceleración, $\vec{a}$, apunta hacia el centro del círculo con $\|\vec{a}\| = \|\vec{v}\|^2 / R$.

En el movimiento circular uniforme, el vector de aceleración refleja el hecho de que el vector de velocidad no cambia en magnitud, sólo en dirección. Ahora examinamos el movimiento en línea recta cuando el vector de velocidad siempre tiene la misma dirección, pero la magnitud cambia. Esperamos que el vector de aceleración apunte en la misma dirección que el vector de velocidad, si la velocidad es creciente, y en dirección opuesta al vector de velocidad si la velocidad es decreciente.

Ejemplo 7 Considerar el movimiento dado por la ecuación vectorial

$$\vec{r}(t) = 2\vec{i} + 6\vec{j} + (t^3 + t)(4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}).$$

Demostrar que éste es un movimiento en línea recta en la dirección del vector $4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ y relacionar el vector de aceleración al vector de velocidad.

Solución El vector de velocidad es

$$\vec{v} = (3t^2 + 1)(4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}).$$

Como $(3t^2 + 1)$ es un escalar positivo, el vector de velocidad $\vec{v}$ apunta en la dirección del vector $4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$. Además,

$$\text{Rapidez} = \|\vec{v}\| = (3t^2 + 1)\sqrt{4^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{26}\,(3t^2 + 1)$$

Observe que la velocidad es decreciente hasta que $t = 0$, luego comienza a aumentar. El vector de aceleración es

$$\vec{a} = 6t(4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}).$$

Para $t > 0$, el vector de aceleración apunta en la misma dirección que $4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, que es la misma dirección de $\vec{v}$. Esto tiene sentido porque el objeto está acelerando. Para $t < 0$, el vector de aceleración $6t(4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k})$ apunta en la dirección opuesta a $\vec{v}$ porque el objeto está reduciendo su velocidad.

La longitud de una curva

La velocidad de una partícula es la magnitud de su vector de velocidad:

$$\text{Velocidad} = \|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Igual que en una dimensión, podemos encontrar la distancia recorrida por una partícula a lo largo de una curva al integrar su velocidad. Así,

$$\text{Distancia recorrida} \int_a^b \|\vec{v}\,(t)\|\, dt.$$

Si la partícula nunca se detiene, ni invierte su dirección conforme se desplaza a lo largo de la curva, la distancia que recorre será la misma que la longitud de la curva. Esto sugiere la siguiente fórmula, que está justificada en el problema 33:

> Si la curva C está dada paramétricamente para $a \le t \le b$ por funciones suaves y si el vector de velocidad $\vec{v}$ no es $\vec{0}$ para $a < t < b$, entonces,
>
> $$\text{Longitud de } c = \int_a^b \|\vec{v}\,\|\, dt.$$

Ejemplo 8 Encontrar la circunferencia de la elipse dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = 2\cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Solución La circunferencia de esta curva está dada por una integral que debe calcularse numéricamente:

$$\text{Circunferencia} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2}\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt = 9.69$$

Como la elipse está inscrita en un círculo de radio 2 y circunscribe un círculo de radio 1, esperaríamos que la longitud de la elipse se encuentre entre $2\pi(2) \approx 12.57$ y $2\pi(1) \approx 6.28$, así que el valor de 9.69 es razonable.

Problemas para la sección 16.2

1. a) Explique cómo se sabe que la siguiente pareja de ecuaciones $\vec{r} = (2 + t)\vec{i} + (4 + 3t)\vec{j}$, $\vec{r} = (1 - 2t)\vec{i} + (1 - 6t)\vec{j}$ parametriza la misma recta.
   b) ¿Cuáles son la pendiente y la ordenada al origen de esta recta?

2. La ecuación $\vec{r} = 10\vec{k} + t(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$ parametriza una línea.
   a) Supongamos que uno se restringe a $t < 0$. ¿Qué parte de la línea obtenemos?
   b) Supongamos que uno se restringe a $0 \le t \le 1$. ¿Qué parte de la línea obtenemos?
3. a) Explique por qué la línea de intersección de dos planos debe ser paralela al producto cruz de un vector normal al primer plano y un vector normal al segundo.
   b) Encuentre un vector paralelo a la recta de intersección de los dos planos $x + 2y - 3z = 7$ y $3x - y + z = 0$.
   c) Encuentre ecuaciones paramétricas para la línea del inciso b.
4. Mediante incrementos de tiempo de 0.01, dé una tabla de valores cercanos a $t = 1$ para el vector de posición del movimiento circular

$$\vec{r}(t) = (\cos t)\vec{i} + (\operatorname{sen} t)\vec{j}.$$

   Utilice la tabla para aproximar el vector de velocidad, $\vec{v}$, en el tiempo $t = 1$. Demuestre que $\vec{v}$ es perpendicular al radio desde el origen en $t = 1$.
5. a) Trace la curva parametrizada $x = t \cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$ para $0 \le t \le 4\pi$.
   b) Utilice un cociente de diferencias para aproximar los vectores de velocidad $\vec{v}(t)$ para $t = 2$, 4 y 6.
   c) Calcule los vectores de velocidad $\vec{v}(t)$ para $t = 2$, 4 y 6, exactamente y trácelos sobre la gráfica de la curva.

Para los problemas del 6 al 9, encuentre el vector de velocidad $\vec{v}(t)$ para el movimiento dado de una partícula. También encuentre la rapidez $\|\vec{v}(t)\|$ y los tiempos, si los hay, cuando la partícula se detiene.

6. $x = t^2$, $y = t^3$
7. $x = \cos(t^2)$, $y = \operatorname{sen}(t^2)$
8. $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{sen} t$
9. $x = t^2 - 2t$, $y = t^3 - 3t$, $z = 3t^4 - 4t^3$
10. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la línea tangente en $t = 2$ para el problema 6.

Para los problemas del 11 al 14, encuentre los vectores de velocidad y aceleración para los movimientos dados.

11. $x = 3\cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$
12. $x = t$, $y = t^3 - t$
13. $x = 2 + 3t$, $y = 4 + t$, $z = 1 - t$
14. $x = 3\cos(t^2)$, $y = 3 \operatorname{sen}(t^2)$, $z = t^2$

Encuentre la longitud de las curvas en los problemas 15, 16 y 17.

15. $x = 3 + 5t$, $y = 1 + 4t$, $z = 3 - t$ para $1 \le t \le 2$. Explique su respuesta.
16. $x = \cos(e^t)$, $y = \operatorname{sen}(e^t)$ para $0 \le t \le 1$. Explique por qué es razonable su respuesta.
17. $x = \cos 3t$, $y = \operatorname{sen} 5t$ para $0 \le t \le 2\pi$.
18. Una partícula que pasa por el punto $P = (5, 4, -2)$ en el tiempo $t = 4$ avanza con velocidad constante $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$. Encuentre las ecuaciones paramétricas para su movimiento.
19. Una partícula que pasa por el punto $P = (5, 4, 3)$ en el tiempo $t = 7$ se mueve con velocidad constante $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Encuentre las ecuaciones para su posición en el tiempo t.
20. Un objeto que se mueve con velocidad constante en tres dimensiones (con coordenadas en metros) pasa por el punto (1, 1, 1), y cinco segundos más tarde por el punto (2, −1, 3). ¿Cuál es su vector de velocidad? ¿Cuál es su vector de aceleración?
21. La tabla 16.4 contiene las coordenadas x y y de una partícula en el plano en el tiempo t. Si se supone que la trayectoria es lisa, estime las siguientes cantidades:
   a) El vector velocidad y la velocidad en el tiempo $t = 2$.
   b) Los valores del tiempo, si los hay, cuando la partícula avanza paralelamente al eje y.
   c) Los valores del tiempo, si los hay, cuando la partícula se haya detenido.

TABLA 16.4

t	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
x	1	4	6	7	6	3	2	3	5
y	3	2	3	5	8	10	11	10	9

22. Considere el movimiento de la partícula dado por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^3 - 3t, \quad y = t^2 - 2t,$$

donde el eje y es vertical y el eje x es horizontal.
   a) ¿Se detiene alguna vez la partícula? Si es así, ¿cuándo y dónde?
   b) ¿Se desplaza alguna vez la partícula hacia arriba o hacia abajo? Si es así, ¿cuándo y dónde?
   c) ¿Se desplaza alguna vez la partícula horizontalmente hacia la derecha o la izquierda? Si es así, ¿cuándo y dónde?

23. Suponga que $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \operatorname{sen} t\vec{j} + 2t\vec{k}$ representa la posición de una partícula en una hélice, donde z es la altura de la partícula sobre el suelo.
   a) ¿Se desplaza hacia abajo la partícula? ¿Cuándo?
   b) ¿Cuándo llega la partícula a un punto a 10 unidades sobre el suelo?
   c) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando está 10 unidades sobre el suelo?
   d) Suponga que la partícula sale de la hélice y se desplaza a lo largo de una línea tangente a la espiral en este punto. Encuentre las ecuaciones paramétricas para esta línea tangente.

24. El señor Skywalker viaja a lo largo de la curva dada por

$$\vec{r}\,(t) = -2e^{3t}\vec{i} + 5\cos t\vec{j} - 3\operatorname{sen}(2t)\vec{k}.$$

Si los propulsores se apagan, su nave sigue de largo por una línea tangente a $\vec{r}(t)$. A punto de agotársele el combustible, observa que una estación de Xardon está abierta en el punto con coordenadas (1.5, 5, 3.5). Al calcular rápidamente su posición, apaga los propulsores en el instante $t = 0$. ¿Llegará a la estación Xardon? Explique.

25. Determine el vector de posición $\vec{r}(t)$ para un cohete que es lanzado desde el origen en el instante $t = 0$ segundos, llega a su punto más alto en $(x, y, z) = (1000, 3000, 10\,000)$, donde x, y, z se miden en metros, y después del lanzamiento está sometido sólo a la aceleración debida a la gravedad, de 9.8 m/s^2.

26. El movimiento de una partícula está dado por $\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\vec{i} + R\operatorname{sen}(\omega t)\vec{j}$, con $R > 0$, $\omega > 0$.
   a) Demuestre que la partícula se mueve en un círculo y ecuentre el radio, la dirección y el periodo.
   b) Determine el vector de velocidad de la partícula y su dirección y magnitud.
   c) ¿Cuál es la dirección y magnitud del vector de aceleración de la partícula?

27. Se hace girar una piedra atada a una cuerda a velocidad constante con periodo 2π segundos en un círculo horizontal con centro en el punto (0, 0, 8). Cuando $t = 0$, la piedra está en el punto (0, 5, 8); avanza en el sentido de las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba. Cuando la piedra está en el punto (5, 0, 8), la cuerda se revienta y se mueve bajo la acción de la gravedad.
   a) Parametrice la trayectoria circular de la piedra.
   b) Encuentre la velocidad y aceleración de la piedra en el momento antes de reventarse la cuerda.
   c) Escriba, pero no resuelva, las ecuaciones diferenciales (con condiciones iniciales) satisfechas por las coordenadas x, y, z dando la posición de la piedra después que ha salido del círculo.

28. Emily está de pie en la orilla de un carrusel, a 10 metros del centro. El carrusel completa una revolución cada 20 segundos. Cuando Emily pasa encima de un punto P en el suelo, deja caer una pelota desde una altura de 3 metros.
   a) ¿A qué velocidad se desplaza Emily?
   b) ¿Qué tan lejos de P llega la pelota al suelo? (La aceleración debida a la gravedad es 9.8 m/s^2.)
   c) ¿Qué tan lejos de Emily llega la pelota al suelo?

29. Un faro L está ubicado en una isla en medio de un lago, como se muestra en la figura 16.28. Considere el movimiento del punto donde el haz de luz desde L llega a la orilla del lago.
    a) Suponga que el haz de luz gira en sentido contrario a las manecillas de un reloj alrededor de L a una velocidad angular constante. ¿En cuál punto, A, B, C, D o E es mayor la rapidez del punto? ¿en cuál es menor?
    b) Repita el inciso a, suponiendo ahora que el haz de luz gira en sentido contrario a las manecillas del reloj de modo que barre áreas iguales del lago en tiempos iguales.
    c) ¿Qué sucede si se pone el faro en otros puntos del lago? ¿Puede la velocidad del punto en la orilla ser infinita para el inciso a?
    d) Suponga ahora que el lago es rectangular. ¿Qué le pasa al vector de velocidad en las esquinas? Para el inciso b, demuestre que la velocidad es constante a lo largo de cada lado (posiblemente una constante diferente en cada lado).

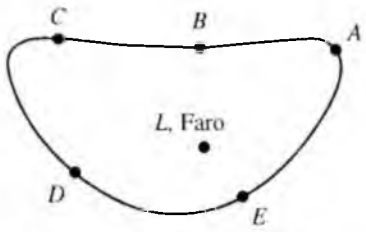


Figura 16.28 El faro en el lago.

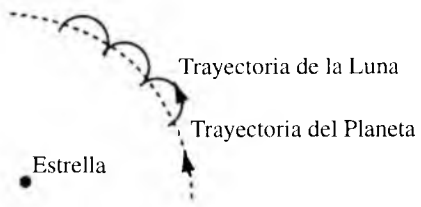


Figura 16.29

30. Un luna hipotética gira en órbita alrededor de un planeta que, a su vez, gira alrededor de una estrella. Suponga que las órbitas son circulares y que la luna gira 12 veces alrededor del planeta en el tiempo que tarda el planeta en dar una vuelta alrededor de la estrella. En este problema investigaremos si la luna podría detenerse en algún instante (véase Fig. 16.29).
    a) Suponga que el radio de la órbita de la luna alrededor del planeta es 1 unidad y que el radio de la órbita del planeta alrededor de la estrella es R unidades. Explique por qué el movimiento de la luna relativo a la estrella puede describirse por las ecuaciones paramétricas
    $$x = R\cos t + \cos(12t), \qquad y = R\,\text{sen}\, t + \text{sen}(12t).$$
    b) Encuentre el valor para R y t tal que la luna se detenga en relación a la estrella en el tiempo t.
    c) En una calculadora gráfica, trace la trayectoria de la luna para el valor de R obtenido en el inciso b. Experimente con otros valores de R.

31. Suponga que $F(x, y) = 1/(x^2 + y^2 + 1)$ indica la temperatura en el punto (x, y) en el plano. Una mariquita se desplaza a lo largo de una parábola, según las ecuaciones paramétricas
    $$x = t, \qquad y = t^2$$
    Encuentre la rapidez de cambio en la temperatura de la mariquita en el tiempo t.

32. Este problema generaliza el resultado del problema 31. Suponga que $F(x, y)$ indica la temperatura en cualquier punto (x, y) del plano y que una mariquita se desplaza en el plano con vector de posición en el tiempo t dado por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ y vector de velocidad $\vec{r}\,'(t)$. Utilice la regla de la cadena para demostrar que la rapidez de cambio en la temperatura de la mariquita en el tiempo t es grad $F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$.

33. En este problema justificamos la fórmula para la longitud de una curva dada en la página 301. Suponga que la curva C está dada por ecuaciones paramétricas lisas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ para $a \le t \le b$. Si se divide el intervalo del parámetro $a \le t \le b$ mediante los puntos $t_1, \ldots, t_{n-1}$ en

pequeños segmentos de longitud $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, obtenemos una división correspondiente de la curva C en pequeñas partes. Vea la figura 16.30, donde los puntos $P_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$ sobre la curva C corresponden a valores del parámetro de $t = t_i$. Sea C_i la porción de la curva C entre P_i y P_{i+1}.

a) Utilice linealidad local para demostrar que

$$\text{Longitud de } C_i \approx \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2 + z'(t_i)^2}\,\Delta t.$$

b) Utilice el inciso a y una suma de Riemann para explicar por qué

$$\text{Longitud de } C \approx \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt.$$

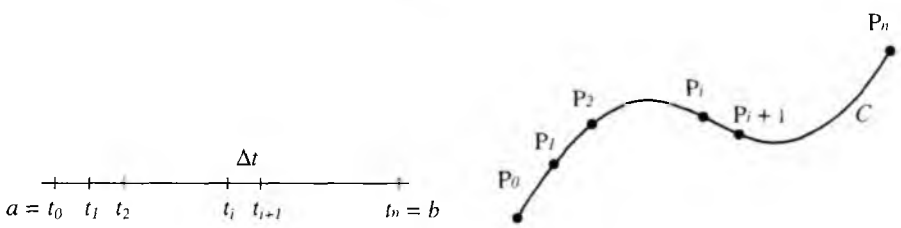


Figura 16.30 Una subdivisión del intervalo del parámetro y la subdivisión correspondiente de la curva C.

16.3 SUPERFICIES PARAMETRIZADAS

¿Cómo se parametriza una superficie?

En la sección 16.1 parametrizamos un círculo en dos dimensiones por medio de las ecuaciones

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t.$$

En tres dimensiones, el mismo círculo del plano xy tiene ecuaciones paramétricas

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = 0.$$

Añadimos la ecuación $z = 0$ para especificar que el círculo está en el plano xy. Si deseáramos un círculo en el plano $z = 3$, utilizaríamos las ecuaciones

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = 3.$$

Supongamos ahora que z varía libremente, al igual que t. Obtenemos círculos en todos los planos horizontales, formando el cilindro de la figura 16.31. De este modo, necesitamos dos parámetros, t y z, para parametrizar el cilindro.

Esto es cierto en general. Una curva, aun cuando pueda estar en dos o tres dimensiones, es en sí unidimensional; si nos desplazamos siguiendo la curva, sólo podemos ir hacia atrás y hacia adelante en una dirección. Por lo tanto, es suficiente un parámetro para trazar una curva.

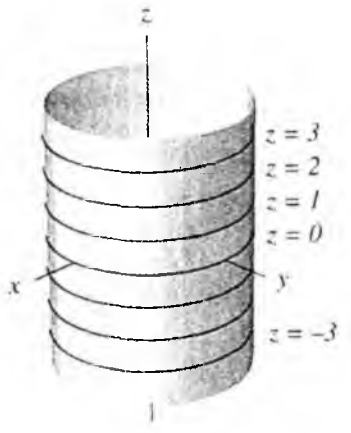


Figura 16.31 El cilindro
$x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ z = z.$

Una superficie es bidimensional; en cualquier punto dado hay dos direcciones independientes por las que podemos avanzar. Por ejemplo, en el cilindro podemos avanzar verticalmente, o girar horizontalmente alrededor del eje z. Así que necesitamos *dos* parámetros para describirlo. Podemos considerar los parámetros como las coordenadas de un mapa, la longitud y la latitud sobre la superficie de la Tierra, por ejemplo.

En el caso del cilindro nuestros parámetros son t y z, de modo que

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = z, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

La última ecuación, $z = z$, parece extraña, pero nos recuerda que estamos en tres dimensiones, no en dos, y que a la coordenada z se le permite variar libremente sobre nuestra superficie. En general, expresamos las coordenadas, (x, y, z), de un punto en una superficie S en términos de dos parámetros, s y t:

$$x = f_1(s, t), \quad y = f_2(s, t), \quad z = f_3(s, t).$$

Conforme varían los valores de s y t, el correspondiente punto (x, y, z) recorre la superficie S (véase Fig. 16.32). La función que envía el punto (s, t) al punto (x, y, z) se denomina *parametrización de la superficie.*

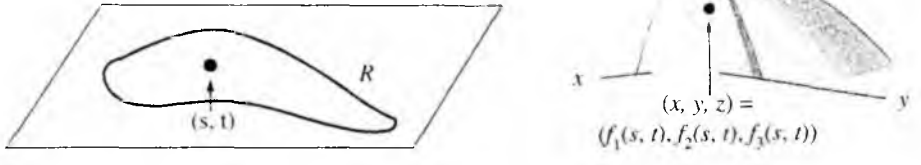


Figura 16.32 La parametrización envía cada punto (s, t) en la región R de los parámetros a un punto $(x, y, z) = (f_1(s, t), f_2(s, t), f_3(s, t))$ en la superficie S.

Uso de vectores de posición

Podemos utilizar el vector de posición $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ para combinar las tres ecuaciones paramétricas para una superficie en una sola ecuación vectorial. Por ejemplo, la parametrización del cilindro $x = \cos t$, $y = \text{sen } t$, $z = z$ se puede escribir como

$$\vec{r}\,(t, z) = \cos t\,\vec{i} + \text{sen } t\,\vec{j} + z\vec{k} \qquad 0 \le t < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

Para una superficie parametrizada general S, escribimos

$$\vec{r}\,(s, t) = f_1(s, t)\vec{i} + f_2(s, t)\vec{j} + f_3(s, t)\vec{k}.$$

Parametrización de una superficie de la forma $z = f(x, y)$

La gráfica de una función $z = f(x, y)$ se puede dar paramétricamente con sólo hacer que los parámetros s y t sean x y y:

$$x = s, \quad y = t, \quad z = f(s, t).$$

Ejemplo 1 Hacer una descripción paramétrica del hemisferio inferior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solución La superficie es la gráfica de la función $= -\sqrt{1 - y^2 - x^2}$ sobre la región $x^2 + y^2 \le 1$ en el plano. Entonces las ecuaciones paramétricas son $x = s$, $y = t$, $z = -\sqrt{1 - s^2 - t^2}$, donde los parámetros s y t varían dentro del círculo unitario.

En la práctica consideramos a x y y como parámetros en lugar de introducir nuevas variables s y t. De esta forma, podemos escribir $x = x$, $y = y$, $z = f(x, y)$.

Parametrización de un plano

Considérese un plano que contiene dos vectores no paralelos, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y un punto P_0 con vector de posición $\vec{r}_0$. Puede llegarse a cualquier punto del plano comenzando en P_0 y avanzando en forma paralela a $\vec{v}_1$ o a $\vec{v}_2$, sumando múltiplos de ellos a $\vec{r}_0$ (véase Fig. 16.33).

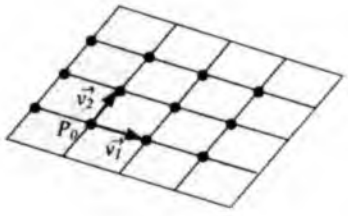


Figura 16.33 El plano $\vec{r}(s, t) = \vec{r}_0 + s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$ y algunos puntos correspondientes a varias opciones de s y t.

Como $s\vec{v}_1$ es paralelo a $\vec{v}_1$ y $t\vec{v}_2$ es paralelo a $\vec{v}_2$, tenemos el siguiente resultado:

Ecuaciones paramétricas para un plano

El plano que pasa por el punto con vector de posición $\vec{r}_0$ y que contiene los dos vectores no paralelos $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ tiene ecuación paramétrica

$$\vec{r}\,(s, t) = \vec{r}_0 + s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$$

Si $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$, y $\vec{v}_1 = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, y $\vec{v}_2 = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, entonces las ecuaciones paramétricas del plano pueden escribirse en la forma

$$x = x_0 + sa_1 + tb_1, \quad y = y_0 + sa_2 + tb_2, \quad z = z_0 + sa_3 + tb_3.$$

Observe que la parametrización del plano expresa las coordenadas x, y y z como funciones lineales de los parámetros s y t.

Ejemplo 2 Escribir una ecuación paramétrica para el plano que pasa por el punto $(2, -1, 3)$ y que contiene los vectores $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{v}_2 = \vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$.

Solución La ecuación paramétrica es

$$\vec{r}(s, t) = \vec{r}_0 + s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} + s(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) + t(\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k})$$
$$= (2 + 2s + t)\vec{i} + (-1 + 3s - 4t)\vec{j} + (3 - s + 5t)\vec{k},$$

o, en forma equivalente,

$$x = 2 + 2s + t, \quad y = -1 + 3s - 4t, \quad z = 3 - s + 5t.$$

Parametrizaciones usando coordenadas esféricas

Recuerde las coordenadas esféricas ρ, ϕ y θ introducidas en la página 261 del capítulo 15. En una esfera de radio $\rho = a$ podemos utilizar ϕ y θ como coordenadas, similares a latitud y longitud en la superficie de la Tierra (véase Fig. 16.34). Sin embargo, la latitud se mide desde el ecuador, en tanto que ϕ se mide desde el polo norte. Si el eje positivo de las x pasa por el meridiano de Greenwich, la longitud y θ son iguales para $0 \le \theta \le \pi$.

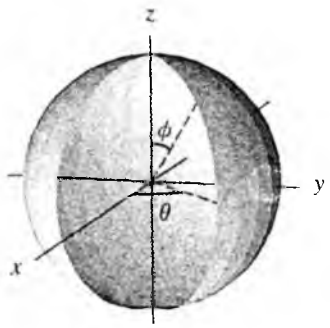


Figura 16.34 Parametrización de la esfera por ϕ y θ.

Ejemplo 3 Usted se encuentra en un punto sobre una esfera con $\phi = 3\pi/4$. ¿Está en el hemisferio norte o en el sur? Si ϕ disminuye, ¿se acerca o se aleja del ecuador?

Solución El ecuador tiene $\phi = \pi/2$. Como $3\pi/4 > \pi/2$, está en el hemisferio sur. Si ϕ disminuye, se acerca más al ecuador.

Ejemplo 4 En una esfera, una persona está de pie en un punto con coordenadas θ_0 y ϕ_0. El *antípoda* es el punto a otro lado de la esfera sobre una recta que pasa por la persona y por el centro. ¿Cuáles son las coordenadas θ y ϕ del antípoda?

Solución La figura 16.35 muestra que las coordenadas son $\theta = \pi + \theta_0$ si $\theta_0 < \pi$ o $\theta = \theta_0 - \pi$ si $\pi \leq \theta_0 \leq 2\pi$ y $\phi = \pi - \theta_0$. Observe que si la persona está en el ecuador, lo está también su antípoda.

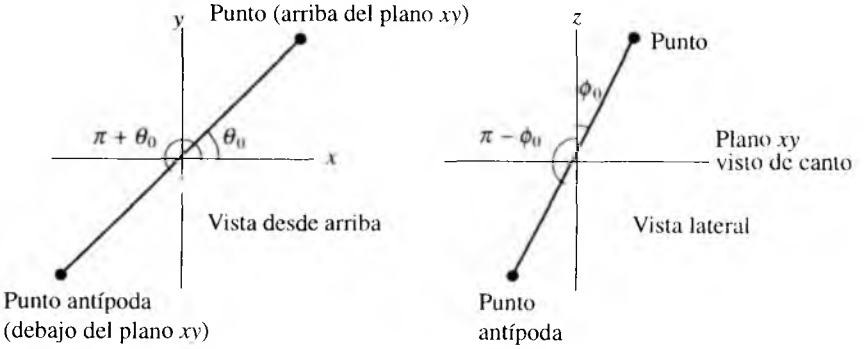


Figura 16.35 Dos vistas del sistema coordenado xyz que muestra las coordenadas de los puntos antípodas.

Parametrización de una esfera usando coordenadas esféricas

La esfera de radio 1 con centro en el origen se parametriza por

$$x = \text{sen } \phi \cos \theta, \qquad y = \text{sen } \phi \text{ sen } \theta, \qquad z = \cos \phi.$$

Donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$. (Véase Fig. 16.36).

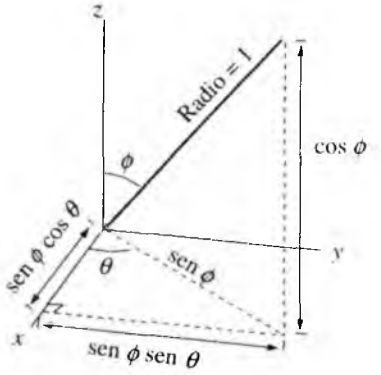


Figura 16.36 La relación entre x, y, z y ϕ, θ en una esfera de radio 1.

También podemos escribir estas ecuaciones en forma vectorial:

$$\vec{r}(\theta, \phi) = \text{sen } \phi \cos \theta \, \vec{i} + \text{sen } \phi \text{ sen } \theta \, \vec{j} + \cos \phi \, \vec{k}.$$

Como $x^2 + y^2 + z^2 = \text{sen}^2 \phi (\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta) + \cos^2 \phi = \text{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ esto verifica que el punto con vector de posición $\vec{r}(\theta, \phi)$ se encuentra en la esfera de radio 1. Observe que la coordenada z depende sólo del parámetro ϕ. Geométricamente, esto indica que todos los puntos de la misma latitud tienen la misma coordenada z.

Ejemplo 5 Encontrar ecuaciones paramétricas para las siguientes esferas:

a) Centro en el origen y radio 2.

b) Centro en el punto (2, −1, 3) y radio 2.

Solución a) Debemos multiplicar la distancia desde el origen por un factor de escala de 2. Así, tenemos

$$x = 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = 2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = 2 \cos \phi,$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$. En forma vectorial, esto se escribe

$$\vec{r}(\theta, \phi) = 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta \vec{i} + 2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \vec{j} + 2 \cos \phi \vec{k}.$$

b) Para desplazar el centro de la esfera desde el origen al punto (2, −1, 3), sumamos la parametrización del vector encontrada en el inciso a al vector de posición de (2, −1, 3) (véase Fig. 16.37). Esto da

$$\begin{aligned} \vec{r}(\theta, \phi) &= 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} + (2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta \vec{i} + 2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \vec{j} + 2 \cos \phi \vec{k}) \\ &= (2 + 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta)\vec{i} + (-1 + 2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta)\vec{j} + (3 + 2 \cos \phi)\vec{k}, \end{aligned}$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$. Opcionalmente,

$$x = 2 + 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = -1 + 2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = 3 + 2 \cos \phi.$$

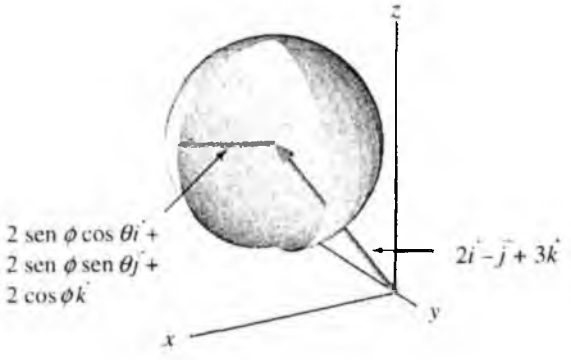


Figura 16.37 Esfera con centro en el punto (2, −1, 3) y radio 2.

Observe que el mismo punto puede tener más de un valor para θ o ϕ. Por ejemplo, los puntos con $\theta = 0$ también tienen $\theta = 2\pi$, a menos que restrinjamos θ a los límites entre $0 \leq \theta < 2\pi$. Asimismo, el polo norte, en $\phi = 0$, y el polo sur, en $\phi = \pi$, pueden tener cualquier valor de θ.

Parametrización de superficies de revolución

Muchas superficies tienen un eje de simetría rotacional y secciones transversales circulares perpendiculares a ese eje. Estas superficies se conocen como *superficies de revolución.*

Ejemplo 6 Encontrar una parametrización del cono cuya base es el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ en el plano xy y cuyo vértice está a una altura h sobre el plano xy (véase Fig. 16.38).

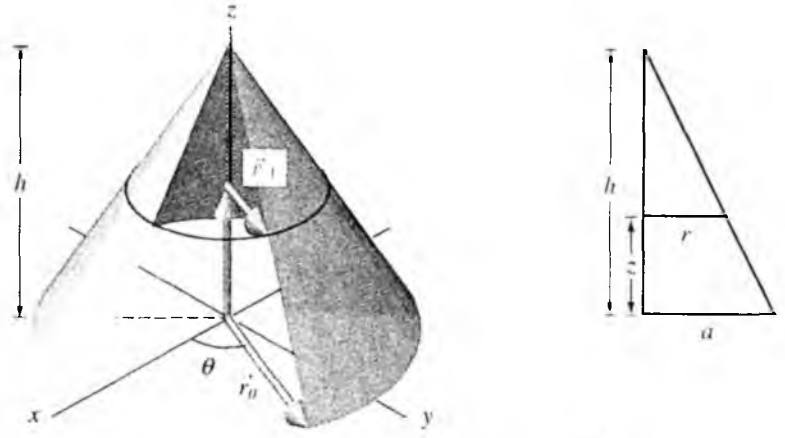


Figura 16.38 El cono cuya base es el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ en el plano xy y cuyo vértice está en el punto $(0, 0, h)$ y la sección transversal vertical del cono.

Solución Utilizamos coordenadas cilíndricas, r, θ, z (véase Fig. 16.38). En el plano xy, el radio vector, $\vec{r}_0$, del eje z a un punto en el cono en el plano xy es

$$\vec{r}_0 = a\cos\theta\vec{i} + a\,\text{sen}\,\theta\vec{j}.$$

Sobre el plano xy, el radio de la sección transversal circular, r, disminuye linealmente desde $r = a$ cuando $z = 0$ a $r = 0$ cuando $z = h$. De los triángulos semejantes de la figura 16.38,

$$\frac{a}{h} = \frac{r}{h - z}.$$

Al despejar r tenemos

$$r = \left(1 - \frac{z}{h}\right)a.$$

El radio vector horizontal, $\vec{r}_1$, a la altura z tiene componentes semejantes a $\vec{r}_0$, pero con a sustituida por r:

$$\vec{r}_1 = r\cos\theta\vec{i} + r\,sen\,\theta\vec{j} = \left(1 - \frac{z}{h}\right)a\cos\theta\vec{i} + \left(1 - \frac{z}{h}\right)a\,\text{sen}\,\theta\vec{j}.$$

A medida que θ pasa de 0 a 2π, el vector r_1 traza el círculo horizontal de la figura 16.38. Se obtiene el vector de posición, $\vec{r}$, de un punto del cono al sumar a $\vec{r}$ el vector $z\vec{k}$, así que

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + z\vec{k} = a\left(1 - \frac{z}{h}\right)\cos\theta\vec{i} + a\left(1 - \frac{z}{h}\right)\text{sen}\,\theta\vec{j} + z\vec{k}, \quad \text{para } 0 \le z \le h \text{ y } 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Estas ecuaciones se pueden escribir como

$$x = \left(1 - \frac{z}{h}\right)a\cos\theta, \qquad y = \left(1 - \frac{z}{h}\right)a\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = z.$$

Los parámetros son θ y z.

Ejemplo 7 Considerar el extremo acampanado de una trompeta. Un modelo para el radio $z = f(x)$ de la corneta (en cm) a una distancia x cm del extremo abierto grande está dado por la función

$$f(x) = \frac{6}{(x+1)^{0.7}}.$$

El extremo acampanado se obtiene al hacer girar la gráfica de f alrededor del eje x. Encontrar una parametrización para los primeros 24 cm del extremo acampanado (véase Fig. 16.39).



Figura 16.39 La sección acampanada de una trompeta obtenida por rotación de la gráfica de $z = f(x)$ alrededor del eje x.

Solución A una distancia x del extremo abierto grande de la corneta, la sección transversal paralela al plano yz es un círculo de radio $f(x)$, con centro en el eje x. Dicho círculo puede ser parametrizado por $y = f(x)\cos\theta$, $z = f(x)\operatorname{sen}\theta$. De esta forma tenemos la parametrización

$$x = x, \quad y = \left(\frac{6}{(x+1)^{0.7}}\right)\cos\theta, \quad y = \left(\frac{6}{(x+1)^{0.7}}\right)\operatorname{sen}\theta, \qquad 0 \le x \le 24, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Los parámetros son x y θ.

Curvas de parámetro

En una superficie parametrizada, la curva obtenida al hacer uno de los parámetros igual a una constante y dejar que el otro varíe se llama *curva de parámetro.* Si la superficie está parametrizada por

$$\vec{r}(s, t) = f_1(s, t)\vec{i} + f_2(s, t)\vec{j} + f_3(s, t)\vec{k},$$

existen dos familias de curvas de parámetro en la superficie, una familia con t constante y la otra con s constante.

Ejemplo 8 Considerar el cilindro vertical

$$x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad z = z.$$

a) Describir las dos curvas de parámetro que pasan por el punto (0, 1, 1).
b) Describir la familia de curvas de parámetro con t constante y la familia con z constante.

Solución a) Como el punto (0, 1, 1) corresponde a los valores de parámetro $t = \pi/2$ y $z = 1$, hay dos curvas de parámetro, una con $t = \pi/2$ y la otra con $z = 1$. La curva de parámetro con $t = \pi/2$ tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad z = z,$$

con parámetro z. Ésta es una recta que pasa por el punto (0, 1, 1) paralela al eje z.

La curva de parámetro con $z = 1$ tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad z = 1,$$

con parámetro t. Éste es un círculo unitario paralelo al plano xy, y una unidad arriba de éste, con centro en el eje z.

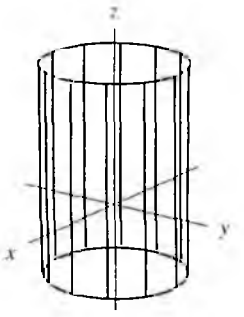


Figura 16.40 La familia de curvas de parámetro con $t = t_0$ para el cilindro $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = z$.

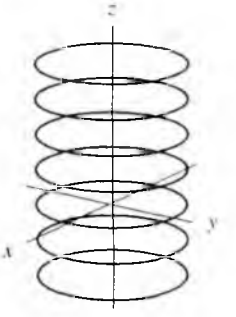


Figura 16.41 La familia de curvas de parámetro con $z = z_0$ para el cilindro $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = z$.

b) Primero, fije $t = t_0$ para t y haga que z varíe. Las curvas parametrizadas por z tienen ecuación

$$x = \cos t_0, \qquad y = \operatorname{sen} t_0, \qquad z = z.$$

Éstas son líneas verticales en el cilindro paralelas al eje z (véase Fig. 16.40).

La otra familia se obtiene al fijar $z = z_0$ y hacer variar t. Las curvas de esta familia están parametrizadas por t y tienen ecuación

$$x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad z = z_0.$$

Son círculos de radio 1 paralelos al plano xy con centro en el eje z (véase Fig. 16.41).

Ejemplo 9 Describir las familias de curvas de parámetro con $\theta = \theta_0$ y $\phi = \phi_0$ para la esfera

$$x = \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \qquad y = \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \qquad z = \cos \phi,$$

donde $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le \pi$.

Solución Como ϕ mide la latitud, la familia con ϕ constante está formada por círculos de latitud constante (véase Fig. 16.42). De manera similar, la familia con θ constante está formada por los meridianos (semicírculos) que unen los polos norte y sur (véase Fig. 16.43).

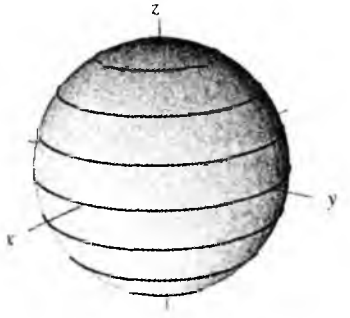


Figura 16.42 La familia de curvas de parámetro con $\phi = \phi_0$ para la esfera parametrizada por (θ, ϕ).

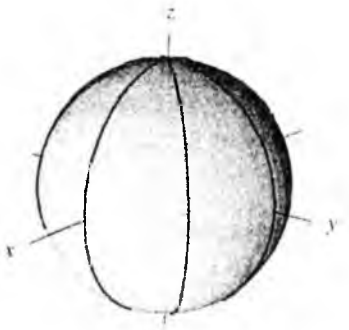


Figura 16.43 La familia de curvas de parámetro con $\theta = \theta_0$ para la esfera parametrizada por (θ, ϕ).

Ya nos hemos encontrado con curvas de parámetro. En las páginas 15, 16 y 17 de la sección 11.3, las secciones transversales con $x = a$ y $y = b$ en una superficie $z = f(x, y)$ son ejemplos de curvas de parámetro. Lo son también las líneas de la retícula en un dibujo computarizado de una superficie. Las pequeñas regiones que tienen forma semejante a un paralelogramo delimitado por pares de curvas de parámetro contiguas se llaman *rectángulos de parámetro.* Véase la figura 16.44.

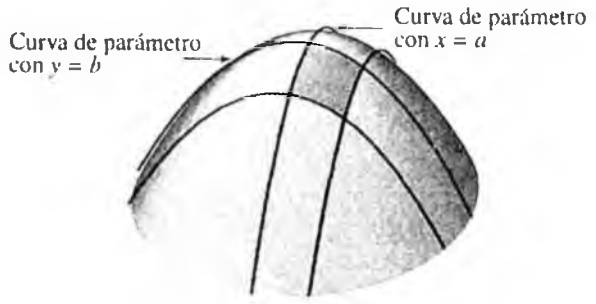


Figura 16.44 Curvas parametrizadas $x = a$ y $y = b$ en una superficie $z = f(x, y)$; la región sombreada es un rectángulo de parámetro.

Problemas para la sección 16.3

Describa verbalmente los objetos parametrizados por las ecuaciones de los problemas del 1 al 8.

1. $x = r \cos \theta \quad 0 \le r \le 5$
   $y = r \operatorname{sen} \theta \quad 0 \le \theta \le 2\pi$
   $z = 7$

2. $x = 5 \cos \theta \quad 0 \le \theta 2\pi$
   $y = 5 \operatorname{sen} \theta$
   $z = 7$

3. $x = 5 \cos \theta \quad 0 \le \theta \le 2\pi$
   $y = 5 \operatorname{sen} \theta \quad 0 \le z \le 7$
   $z = z$

4. $x = 5 \cos \theta \quad 0 \le \theta \le 2\pi$
   $y = 5 \operatorname{sen} \theta$
   $z = 5\theta$

5. $x = r \cos \theta \quad 0 \le \theta \le 5$
   $y = r \operatorname{sen} \theta \quad 0 \le \theta \le 2\pi$
   $z = r$

6. $x = 2z \cos \theta \quad 0 \le z \le 7$
   $y = 2z \operatorname{sen} \theta \quad 0 \le \theta \le 2\pi$
   $z = z$

7. $x = 3 \cos \theta \quad 0 \le \theta \le 2\pi$
   $y = 2 \operatorname{sen} \theta \quad 0 \le z \le 7$
   $z = z$

8. $x = x \quad -5 \le x \le 5$
   $y = x^2 \quad 0 \le z \le 7$
   $z = z$

9. Encuentre una parametrización de un cilindro circular de radio a cuyo eje está a lo largo del eje z de $z = 0$ a una altura $z = h$. Véase la figura 16.45.

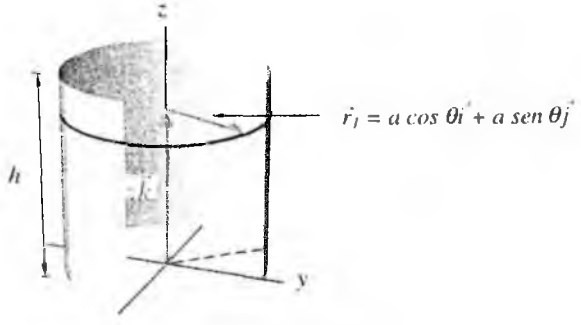


Figura 16.45

10. Una ciudad está descrita paramétricamente por la ecuación

$$\vec{r} = (x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}) + s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$$

donde $\vec{v}_1 = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ y $\vec{v}_2 = \vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$. Una manzana de la ciudad es un rectángulo determinado por $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. El este está en la dirección de $\vec{v}_1$ y el norte en la dirección de $\vec{v}_2$. Al salir del punto (x_0, y_0, z_0), una persona camina 5 manzanas al este, 4 al norte, 1 al poniente y 2 al sur. ¿Cuáles son los parámetros del punto final? ¿Cuáles son las coordenadas x, y y z de ese punto?

11. Encuentre una parametrización para el plano que pasa por el punto (1, 3, 4) y es ortogonal a $\vec{n} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

12. ¿Contiene el plano $\vec{r}(s, t) = (2 + s)\vec{i} + (3 + s + t)\vec{j} + 4t\vec{k}$ los siguientes puntos?
    a) (4, 8, 12) b) (1, 2, 3)

13. ¿Son paralelos los siguientes dos planos?

$$x = 2 + s + t, \quad y = 4 + s - t, \quad z + 1 + 2s, \quad \text{y}$$
$$x = 2 + s + 2t, \quad y = t, \quad z = s - t.$$

14. Una persona se encuentra en un punto con longitud 80° al oeste de Greenwich, Inglaterra, y latitud 40° al norte del ecuador.
    a) Si la latitud disminuye, ¿se ha acercado o se ha alejado del ecuador?
    b) Si la latitud disminuye, ¿se ha acercado o se ha alejado del polo norte?
    c) Si la longitud aumenta (a 90° al oeste, por ejemplo), ¿se ha acercado o se ha alejado de Greenwich?

15. Describa verbalmente la curva $\phi = \pi/4$ en la superficie del planeta.

16. Describa verbalmente la curva $\theta = \pi/4$ en la superficie del planeta.

17. Encuentre ecuaciones paramétricas para la esfera con centro en el origen y con radio 5.

18. Encuentre ecuaciones paramétricas para la esfera con centro en el punto (2, −1, 3) y con radio 5.

19. Encuentre ecuaciones paramétricas para la esfera $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = d^2$.

20. Adapte la parametrización de la esfera para encontrar una parametrización para el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

21. Suponga que una persona se encuentra de pie en un punto en el ecuador de una esfera, parametrizado por coordenadas esféricas θ_0 y ϕ_0. Si la persona recorre la mitad del ecuador y la mitad del camino hacia el polo norte a lo largo de una longitud, ¿cuáles son sus nuevas coordenadas θ y ϕ?

22. Si la esfera se parametriza empleando las coordenadas esféricas θ y ϕ, describa verbalmente la parte de la esfera dada por las siguientes restricciones:
    a) $0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \phi \le \pi/2$ b) $\pi \le \theta < 2\pi, \quad 0 \le \phi \le \pi$
    c) $\pi/4 \le \theta < \pi/3, \quad 0 \le \phi \le \pi$ d) $0 \le \theta \le \pi, \quad \pi/4 \le \phi < \pi/3$

23. Encuentre ecuaciones paramétricas para el cono $x^2 + y^2 = z^2$.

24. Parametrice el cono del ejemplo 6 de la página 311 en términos de r y θ.

25. Parametrice un cono de altura h y radio máximo a con vértice en el origen y que abre hacia arriba. Haga esto de dos maneras; dé los rangos para cada parámetro en cada caso:
    a) Utilice r y θ b) Utilice z y θ.

26. Parametrice el paraboloide $z = x^2 + y^2$ usando coordenadas cilíndricas.

27. Parametrice un vaso formado al hacer girar la curva $z = 10\sqrt{x - 1}$, $1 \le x \le 2$, alrededor del eje z. Trace el vaso.

Para los problemas del 28 al 31

a) Escriba una ecuación en x, y, z e identifique la superficie paramétrica.

b) Dibuje una imagen de la superficie.

28. $x = 2s \quad 0 \le s \le 1$
$y = s + t \quad 0 \le t \le 1$
$z = 1 + s - t$

29. $x = s + t \quad 0 \le s \le 1$
$y = s - t \quad 0 \le t \le 1$
$z = s^2 + t^2$

30. $x = 3 \operatorname{sen} s \quad 0 \le s \le \pi$
$y = 3 \cos s \quad 0 \le t \le 1$
$z = t + 1$

31. $x = s \quad s^2 + t^2 \le 1$
$y = t \quad s, t \ge 0$
$z = \sqrt{1 - s^2 - t^2}$

32. a) Describa la superficie dada paramétricamente por las ecuaciones

$$x = \cos(s - t), \qquad y = \operatorname{sen}(s - t), \qquad z = s + t.$$

b) Describa las dos familias de curvas de parámetro de la superficie.

33. Encuentre una parametrización del círculo de radio a con centro en el punto (x_0, y_0, z_0) y en el plano paralelo a dos vectores unitarios dados $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

34. Un toroide (dona) se forma al hacer girar un círculo pequeño de radio a en un círculo grande de radio b alrededor del origen. El círculo pequeño está en un plano vertical (giratorio) que pasa por el origen y el círculo grande está en el plano xy. (Véase Fig. 16.46). Parametrice el toroide como sigue.

a) Parametrice el círculo grande.

b) Para un punto típico en el círculo grande, encuentre dos vectores unitarios que sean perpendiculares entre sí y estén en el plano del círculo pequeño que contiene ese punto. Utilice estos vectores para parametrizar el círculo pequeño en relación a su centro.

c) Combine las respuestas a los incisos b y c para parametrizar el toroide.

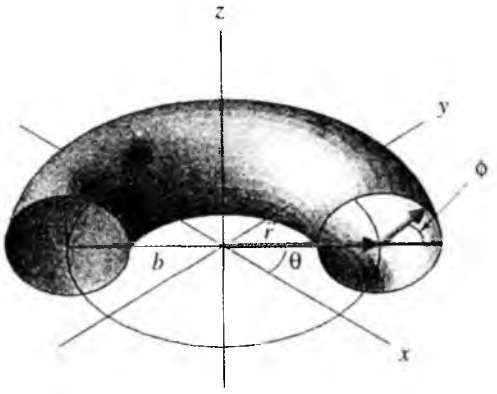


Figura 16.46

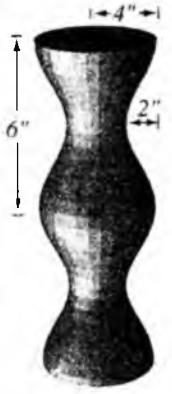


Figura 16.47

35. Un poste decorativo de roble mide 48 pulgadas de largo y se hace girar en un torno de modo que su perfil sea senoidal, como se muestra en la figura 16.47.

a) Describa la superficie del poste paramétricamente usando coordenadas cilíndricas.

b) Encuentre el volumen del poste.

16.4 EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

En esta sección explicaremos el teorema de la función implícita, así como la manera en que puede utilizarse para encontrar aproximaciones lineales a tramos pequeños de curvas y superficies lisas.

Representación implícita, explícita y paramétrica de curvas en el plano

El círculo de radio 1 con centro en el origen puede representarse implícitamente mediante la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1,$$

o explícitamente por las ecuaciones

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{1 - x^2},$$

o paramétricamente por las ecuaciones

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

En general,

- Una representación **implícita** de una curva del plano xy está dada por una sola ecuación en x y y, de la forma $f(x, y) = 0$.
- Una representación **explícita** de una curva del plano xy está dada por ecuaciones que expresan y en términos de x, o x en términos de y, y son de la forma $y = g(x)$ o $x = h(y)$.
- Una representación **paramétrica** de una curva del plano xy está dada por un par de ecuaciones que expresan x y y en términos de una tercera variable, que con frecuencia se denota por t.

Puede haber muchas representaciones diferentes implícitas o paramétricas de una curva dada.

Ejemplo 1 Encuentre representaciones implícitas, explícitas y paramétricas de la recta que pasa por los puntos (3, 0) y (0, 5).

Solución Una representación implícita es $x/3 + y/5 - 1 = 0$. (Se debe comprobar que la intersección con el eje x es 3 y la ordenada al origen 5.) Una representación explícita es $y = 5 - (5/3)x$. Una representación paramétrica es $x = 3t$, $y = 5 - 5t$.

Conversión de representaciones paramétricas en implícitas o explícitas

Ejemplo 2 Encuentre una representación implícita y una explícita de la curva que tiene la representación paramétrica

$$x = 3 + 5 \operatorname{sen} t, \quad y = 1 + 2 \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Solución Necesitamos eliminar el parámetro t. Al despejar sen t y cos t resulta $\operatorname{sen} t = (x - 3)/5$, $\cos t = (y - 1)/2$. Como $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, tenemos

$$\left(\frac{x-3}{5}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1.$$

Ésta es una representación implícita para una elipse con centro en el punto (3, 1). Para obtener una representación explícita, despejamos y en términos de x:

$$\left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x-3}{5}\right)^2, \qquad \text{o sea,} \qquad \frac{y-1}{2} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{5}\right)^2}.$$

y por lo tanto,

$$y = 1 \pm 2\sqrt{1 - \frac{(x-3)^2}{25}}.$$

No se obtiene una única representación explícita para toda la elipse, más bien se obtiene una para la mitad superior (la raíz cuadrada positiva) y una para la mitad inferior (la raíz cuadrada negativa).

Las ecuaciones explícitas y paramétricas son más fáciles de graficar que las ecuaciones implícitas. Para trazar $y = f(x)$, evaluamos $f(x)$ para varios valores de x y trazamos puntos. Análogamente, para trazar una curva dada paramétricamente, evaluamos x y y para diversos valores de t y trazamos puntos. Sin embargo, para una representación implícita sustituimos un valor para x, pero entonces debemos despejar y de la ecuación implícita; puede haber muchas soluciones o no existir ninguna. Además, puede ser imposible despejar y algebraicamente de la ecuación.

Uso de linealización para construir una aproximación local

Aun cuando de una ecuación implícita no podamos despejar y explícitamente en términos de x, muchas veces podemos sustituir la ecuación por una aproximación lineal válida cerca de un punto. De esta aproximación, por lo general, se puede despejar y. Por lo tanto, cerca de un punto en particular, una ecuación implícita suele definir una aproximación lineal explícita.

Ejemplo 3 El punto (1, 1) está en la curva $y^3 + x^2y + x^3 = 3$. Encontrar una ecuación lineal explícita que dé una buena aproximación para el tramo de la curva cerca del punto (1, 1).

Solución La aproximación lineal de la función $f(x, y) = y^3 + x^2y + x^3$ cerca del punto (1, 1) es

$$f(x, y) \approx f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) = 3 + 5(x - 1) + 4(y - 1)$$

La curva tiene ecuación $f(x, y) = 3$, así que cerca del punto (1, 1) está aproximada cercanamente por

$$3 + 5(x - 1) + 4(y - 1) = 3.$$

Al despejar y resulta la ecuación lineal explícita

$$y = 1 - \frac{5}{4}(x - 1).$$

Ésta es la ecuación para la recta tangente a la curva en el punto (1, 1) (véase Fig. 16.48).

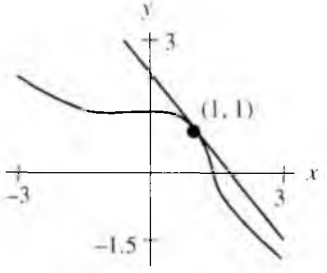


Figura 16.48 La curva $y^3 + x^2y + x^3 = 3$ está bien aproximada por su recta tangente cerca del punto (1, 1)

Representación implícita, explícita y paramétrica de superficies en el espacio

Las ecuaciones implícitas y explícitas en tres variables describen superficies en tres dimensiones, no curvas. Por ejemplo, la esfera de radio 1 con centro en el origen puede representarse implícitamente por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

o explícitamente por las ecuaciones

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad \text{y} \qquad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

o paramétricamente por

$$x = \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \quad y = \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \quad z = \cos\phi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \phi \le \pi.$$

Las curvas en tres dimensiones no se pueden representar explícita o implícitamente porque una sola ecuación en tres variables, por lo general, describe una superficie. Sin embargo, como ya se vio, las curvas en el espacio pueden expresarse paramétricamente. Por ejemplo, una hélice en el cilindro de radio 1 con centro en el eje z se puede describir paramétricamente por

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = t, \quad -\infty < t < \infty.$$

Observe la diferencia entre las representaciones paramétricas de curvas y superficies: las curvas necesitan un parámetro y las superficies necesitan dos. Por esta razón, se dice que las curvas son objetos unidimensionales y las superficies son bidimensionales.

Obtención de una función explícita a partir de una ecuación implícita

Observe que aun cuando un círculo y una esfera están representados por ecuaciones implícitas, ambos generan funciones explícitas, cada una de las cuales corresponde a parte de la gráfica. Por ejemplo, la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

corresponde a las funciones explícitas para la parte superior e inferior de la esfera:

$$z = f_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad \text{y} \qquad z = f_2(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Veamos ahora un ejemplo más complicado.

Ejemplo 4 Demostrar que la ecuación implícita $z^3 - 7yz + 6e^y = 0$ no define z como una función de x y y.

Solución Como ejemplo, intentemos calcular el valor de z correspondiente a $x = 0$, $y = 1$. Sustituimos $x = 0$ y $y = 1$ en la ecuación y despejamos z. Como

$$z^3 - 7z + 6 = (z - 2)(z - 1)(z + 3) = 0$$

tenemos tres soluciones: $z = 2$, $z = 1$, $z = -3$. Por lo tanto, z no es una función de x y y.

Este ejemplo demuestra que si $z^3 - 7yz + 6e^y = 0$, entonces no podemos esperar escribir z como función explícita de x y y, pero aún podemos escribir z como función explícita de x y y en parte de la gráfica.

La gráfica de la ecuación $z^3 - 7yz + 6e^x = 0$ es una superficie que contiene los tres puntos (0, 1, 2), (0, 1, 1) y (0, 1, −3). Esperamos encontrar las funciones

$$z = f_1(x, y), \qquad z = f_2(x, y), \qquad z = f_3(x, y),$$

tales que f_1 indique puntos en la superficie cerca de (0, 1, 1), f_2 indique puntos cerca de (0, 1, 1) y f_3 indique puntos cerca de (0, 1, −3).

¿Cuáles son las fórmulas para f_1, f_2 y f_3? Como de la ecuación $z^3 - 7yz + 6e^x = 0$ no se puede despejar z fácilmente, tampoco resulta fácil encontrar fórmulas explícitas para f_1, f_2 y f_3. Sin embargo, esto *no* significa que no haya tales funciones. Nos queda el recurso de evaluar f_1, f_2 y f_3.

Ejemplo 5 Suponga que f_1, f_2 y f_3 son las funciones que se acaban de definir para $z^3 - 7yz + 6e^x = 0$.

a) Encontrar $f_1(0, 1)$, $f_2(0, 1)$, $f_3(0, 1)$.

b) Encontrar $f_1(0.02, 1.01)$, $f_2(0.02, 1.01)$, $f_3(0.02, 1.01)$.

Solución a) Como f_1 indica valores de z cerca del punto (0, 1, 2) tenemos

$$f_1(0, 1) = 2.$$

En forma análoga,

$$f_2(0, 1) = 1 \quad \text{y} \quad f_3(0, 1) = -3.$$

b) Para calcular $f_1(0.02, 1.01)$ sustituimos $x = 0.02$ y $y = 1.01$ en la ecuación implícita

$$z^3 - 7.07z + 6e^{0.02} = 0.$$

Al despejar z numéricamente, otra vez se obtienen tres soluciones, $z = 2.0038$, $z = 1.0127$, $z = -3.0165$. Por lo tanto, esperamos

$$f_1(0.02, 10.1) = 2.0038, \qquad f_2(0.02, 1.01) = 1.0127, \qquad f_3(0.02, 1.01) = -3.0165$$

Este ejemplo sugiere que las funciones f_1, f_2 y f_3 están bien definidas y así podemos evaluarlas para x cerca de 0 y y cerca de 1.

Búsqueda de una aproximación lineal explícita

Aun cuando no podemos encontrar fórmulas explícitas para f_1, f_2 y f_3, podemos encontrar sendas aproximaciones lineales explícitas cerca del punto correspondiente en la superficie. Para esto, buscamos una aproximación lineal a la ecuación implícita original $z^3 - 7yz + 6e^x = 0$ y despejamos z.

Ejemplo 6 a) Encontrar una función lineal explícita, l, que aproxime la función f_1 cerca del punto (0, 1, 2).

b) Comparar el valor dado por esta aproximación a los valores de $f_1(0, 1)$ y $f_1(0.02, 1.01)$.

Solución a) Para encontrar una función explícita válida cerca de (0, 1, 2), usamos una aproximación lineal y despejamos z. Suponga $F(x, y, z) = z^3 - 7yz + 6e^x$. Entonces,

$$F_x(x, y, z) = 6e^x, \qquad F_y(x, y, x) = -7z, \qquad F_z(x, y, z) = 3z^2 - 7y,$$
$$F_x(0, 1, 2) = 6, \qquad F_y(0, 1, 2) = -14, \qquad F_z(0, 1, 2) = 5.$$

La aproximación lineal para F cerca de (0, 1, 2) es

$$F(x, y, z) \approx F(0, 1, 2) + F_x(0, 1, 2)(x - 0) + F_y(0, 1, 2)(y - 1) + F_z(0, 1, 2)(z - 2).$$

Como $F(0, 1, 2) = 0$, tenemos

$$F(x, y, z) \approx 0 + 6x - 14(y - 1) + 5(z - 2), \text{ para } (x, y, z) \text{ cerca de } (0, 1, 2).$$

Como la superficie está dada por $F(x, y, z) = 0$, tenemos

$$0 \approx 6x - 14(y - 1) + 5(z - 2).$$

Despejar z nos indica que para (x, y, z) cerca de (0, 1, 2) tenemos

$$z \approx -0.8 - 1.2x + 2.8y.$$

Si definimos la función explícita, l, por

$$l(x, y) = -0.8 - 1.2x + 2.8y$$

entonces la función $z = l(x, y)$ es una buena aproximación de la función $z = f_1(x, y)$ para (x, y) cerca de (0, 1).

b) Tenemos $l(0, 1) = 2$ y $l(0.02, 1.01) = 2.004$, mientras que $f_1(0, 1) = 2$ y $f_1(0.02, 1.01) = 2.0038$. Por lo tanto, los valores de l y f_1 concuerdan exactamente en (0, 1) y son cercanos para (x, y) cerca de (0, 1).

Ejemplo 7 Intente hallar una función lineal, $l(x, y)$, tal que $z = l(x, y)$ da soluciones aproximadas a la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

cerca de la solución $(x, y, z) = (3, 4, 0)$.

Solución Considere la ecuación equivalente $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$. Como $F_x = 2x$, $F_y = 2y$ y $F_z = 2z$, tenemos

$$F_x(3, 4, 0) = 6, \quad F_y(3, 4, 0) = 8, \quad F_z(3, 4, 0) = 0.$$

La linealización local de F para (x, y, z) cerca de (3, 4, 0) está dada por

$$F(x, y, z) \approx 6(x - 3) + 8(y - 4) + 0(z - 0).$$

Por lo tanto, la linealización de la ecuación $F(x, y, z) = 0$ cerca de (3, 4, 0) es

$$6(x - 3) + 8(y - 4) = 0,$$

de donde no se puede despejar z porque z no aparece en esta ecuación. Por lo tanto, en este caso el método no da una aproximación para z como función de (x, y) cerca del punto $(x, y, z) = (3, 4, 0)$.

La solución al ejemplo 7 demuestra que aun cuando no podemos despejar z cerca de (3, 4, 0), podríamos despejar y, por ejemplo, y expresar $y = l_1(x, z)$ cerca de ese punto. Esto nos indica que aun cuando no podemos usar x y y para parametrizar la esfera cerca de (3, 4, 0), podemos usar x y z.

La figura 16.49 muestra por qué el punto (3, 4, 0) causa problemas. La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ es una esfera de radio 5 con centro en el origen. Los valores de (x, y) cerca de (3, 4) ¿determinan valores únicos de z cerca de 0 y tales que (x, y, z) está en la esfera? La respuesta es negativa, por dos razones. Para puntos tales como $(x, y) = (3.01, 4.01)$ donde $x^2 + y^2 > 25$, no hay z tal que (x, y, z) se encuentre en la esfera. Para puntos tales como (2.99, 3.99) donde $x^2 + y^2$ es ligeramente menor que 25, hay dos

valores de z cerca de 0 que satisfacen la ecuación, es decir $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ y $z = -\sqrt{25 - x^2 - y^2}$ (véase Fig. 16.49). Como la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ no determina valores de z únicos para toda (x, y) cerca de (3, 4), no hay función para aproximar cerca de (3, 4).

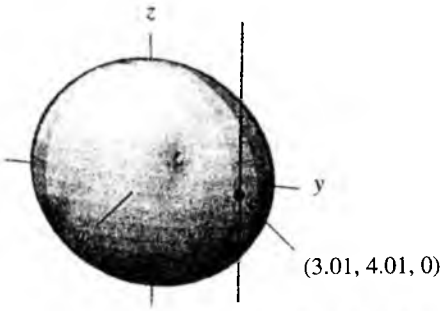


Figura 16.49 La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ y una recta vertical que pasa por el punto (3.01, 4.01, 0).

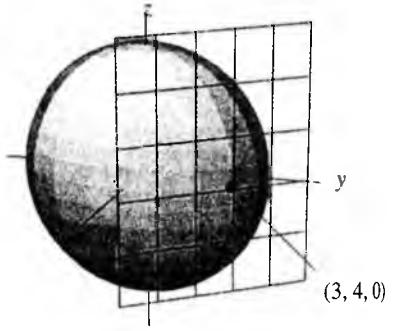


Figura 16.50 Plano vertical tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ en el punto (3, 4, 0).

El plano tangente a la esfera en (3, 4, 0) es la linealización $6(x - 3) + 8(y - 4) = 0$. La ausencia de z en esta ecuación indica que el plano tangente es vertical y no determina a z como función de (x, y) (véase Fig. 16.50). El hecho de que falte z corresponde al de que $F_z(3, 4, 0) = 0$.

Resumimos los ejemplos anteriores en el siguiente teorema, cuya prueba se puede encontrar en textos más avanzados.

El teorema de la función implícita

Supongamos que $F(x, y, z)$ es una función lisa y (a, b, c) es un punto tal que

- $F(a, b, c) = 0$
- $F_z(a, b, c) \neq 0$

Entonces hay una función lisa $z = f(x, y)$ tal que, para (x, y) cerca de (a, b),

$$F(x, y, f(x, y)) = 0.$$

La aproximación lineal, $l(x, y)$, a $f(x, y)$ en el punto (a, b) se obtiene al despejar z en $L(x, y, z) = 0$, donde $L(x, y, z)$ es la aproximación lineal para $F(x, y, z)$ en el punto (a, b, c).

La posibilidad de despejar z y escribir $z = f(x, y)$ nos dice que, cerca de (a, b, c), la superficie $F(x, y, z) = 0$ puede ser parametrizada por x y y:

$$x = s, \qquad y = t, \qquad z = f(s, t).$$

Esta parametrización no siempre es global y, como en el ejemplo 7, es posible que tengamos que usar x y z, o y y z, en lugar de x y y.

Problemas para la sección 16.4

¿Qué curvas trazan las ecuaciones paramétricas de los problemas 1, 2 y 3? Encuentre una ecuación implícita o explícita para cada curva.

1. $x = 2 + \cos t, \quad y = 2 - \text{sen } t$
2. $x = 2 + \cos t, \quad y = 2 - \cos t$
3. $x = 2 + \cos t, \quad y = \cos^2 t$

Diga si las ecuaciones de los problemas 4, 5 y 6 representan una curva paramétrica, implícita o explícitamente. Escriba los otros dos tipos de representaciones para la misma curva.

4. $xy = 1$ para $x > 0$
5. $x^2 - 2x + y^2 = 0$ para $y > 0$
6. $x = e^t, \ y = e^{2t}$ para toda t

7. Encuentre una ecuación para la recta tangente a la curva $xe^y + 2ye^x = 0$ en el punto (0, 0).
8. De la ecuación $x \cos y + e^x + y = 1$ no se puede despejar y explícitamente en términos de x.
   a) Encuentre una ecuación lineal que tenga aproximadamente las mismas soluciones cerca de (0, 0), y despeje y en términos de x.
   b) ¿Cuál es el significado geométrico de la ecuación lineal encontrada en el inciso a?
9. Sea f_1 la función del ejemplo 5. Haga una tabla de valores de f_1 para
   $$x = -0.02, \ -0.01, \ 0.00, \ 0.01, \ 0.02, \qquad y = 0.98, \ 0.99, \ 1.00, \ 1.01, \ 1.02.$$
10. Compare los valores de la aproximación lineal local, l, del ejemplo 6, a los valores de f_1 calculados en el problema 9.
11. Sea $z = f_2(x, y)$ la función, definida para (x, y) cerca de (0, 1), tal que z está cerca de 1 y $z^3 - 7yz + 6e^x = 0$.
    a) Evalúe $f_2(0.01, 0.98)$.
    b) Encuentre una aproximación lineal de $f_2(x, y)$ para (x, y) cerca de (0, 1) y utilícela para aproximar $f_2(0.01, 0.98)$.
    c) Encuentre $\partial f_2/\partial x$ en (0, 1) y $\partial f_2/\partial y$ en (0, 1).
12. Sea $z = f_3(x, y)$ la función, definida para (x, y) cerca de (0, 1), tal que z está cerca de -3 y $z^3 - 7yz + 6e^x = 0$.
    a) Evalúe $f_3(0.01, 0.98)$.
    b) Encuentre una aproximación lineal de $f_3(x, y)$ para (x, y) cerca de (0, 1) y utilícela para aproximar $f_3(0.01, 0.98)$.
    c) Encuentre $\partial f_3/\partial x$ en (0, 1) y $\partial f_3/\partial y$ en (0, 1).
13. En el punto (3, 5, 7), cierta función continuamente diferenciable $f(x, y, z)$ tiene linealización local $L(x, y, z) = 2(x - 3) + 4(y - 5) + 5(z - 7)$.
    a) ¿Qué puede decir acerca de la gráfica de la ecuación $f(x, y, z) = 0$?
    b) ¿Qué puede decir acerca de las soluciones de la ecuación $f(x, y, z) = 0$?
14. Encuentre una ecuación para el plano tangente a la superficie $z^2 + x^2 - y = 0$ en el punto (1, 1, 0) usando una linealización local.
15. Suponga que la satisfacción que una persona experimenta como resultado de consumir una cantidad x_1 de un artículo, y una cantidad x_2 de otro artículo, está dada como función de x_1 y x_2 por
    $$S = f(x_1, x_2) = a \ln x_1 + (1 - a) \ln x_2,$$
    donde a es una constante, $0 < a < 1$. Los precios de los dos artículos son p_1 y p_2, respectivamente, y el presupuesto es b.
    a) Exprese la satisfacción máxima que se puede alcanzar como función de p_1, p_2 y b, esto es, $S = g(p_1, p_2, b)$
    b) Encuentre una función que dé la cantidad de dinero que debe gastarse para alcanzar un nivel particular de satisfacción, c, como función de p_1, p_2 y c, esto es, $b = h(p_1, p_2, c)$
    c) Explique por qué el inciso b es un ejemplo del teorema de la función implícita.

16. La *utilidad* máxima (satisfacción) que una persona puede alcanzar como resultado de consumir x_1 unidades de un artículo y x_2 unidades de otro artículo, es una función de los precios p_1 y p_2 de los dos artículos, y del presupuesto, m. Escribimos

$$u = f\,(p_1, p_2, m)$$

a) Suponemos que u es una función creciente de m. ¿A cuál la derivada parcial afecta esto? ¿Qué significa esta suposición en términos económicos?

b) Utilice el teorema de la función implícita para demostrar que hay una función $m = g\,(p_1, p_2, u)$ que satisface

$$u = f\,(p_1, p_2, g\,(p_1, p_2, u\,)\,).$$

c) Explique por qué g recibe el nombre de *función de gasto*. ¿Qué información nos da en términos económicos?

16.5 NOTAS ACERCA DE NEWTON, KEPLER Y EL MOVIMIENTO PLANETARIO

Todas las noches, la bóveda celeste gira lentamente en lo alto. Al principio, las estrellas parecen fijas en relación una con otra, pero la observación durante muchas noches permite ver que algunas estrellas se desplazan en relación con las demás. Estos nómadas no son estrellas, sino planetas; cinco de ellos pueden observarse a simple vista: Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno, todos ellos bautizados con nombres de dioses romanos. Sus erráticas trayectorias han hecho que las personas les atribuyan poderes sobrenaturales; por ejemplo, la astrología está basada principalmente en la posición de los planetas con respecto a las estrellas fijas. Las explicaciones matemáticas de Newton y Kepler del movimiento de los planetas fueron dos de los grandes descubrimientos en la historia de la ciencia.

Los primeros pasos: Eratóstenes y Copérnico

El primer paso hacia la explicación del movimiento planetario fue saber que

> La Tierra es redonda; una esfera de casi 6500 kilómetros de radio.

Este dato era conocido por algunos en la antigua Grecia. Eratóstenes (276-197 a. C.) hizo un cálculo razonable del radio de la Tierra, al observar el ángulo del Sol al mediodía del 21 de junio en dos lugares diferentes (véase el problema 1). Otro paso importante fue saber que

> La Tierra gira una vez al día alrededor de un eje central que pasa por los polos norte y sur.

El filósofo griego Aristóteles (384-322 a. C.) pensó, por el contrario, que la Tierra permanecía fija en tanto que otros cuerpos celestes giraban alrededor de ella. En verdad, la idea misma de que la Tierra gira puede parecer absurda; ¿no saldríamos despedidos del planeta? De hecho, la aceleración en el ecuador, ocasionada por la rotación del planeta, es menos de 1% de la aceleración debida a la gravedad, y es casi la misma que la aceleración en la orilla de un carrusel con radio de 25 pies que da una vuelta cada 1 ½ minutos (véase el problema 2).

Durante el Renacimiento, Nicolás Copérnico (1473-1543) propuso el punto de vista más moderno de que el movimiento aparente de las estrellas todas las noches es ocasionado por la rotación de la Tierra. Copérnico también contradijo otras teorías anteriores al poner al Sol en el centro del sistema solar, con la Tierra y otros planetas girando a su alrededor:

> La Tierra y los planetas giran alrededor del Sol. La tierra completa una revolución alrededor del Sol cada 365 $\frac{1}{4}$ días (aproximadamente). La **Luna gira alrededor de la** Tierra y completa una revolución en alrededor de 27 $\frac{1}{3}$ días.

En realidad, Aristarco de Samos (310-230 a. C.) ya había propuesto tal teoría, diciendo que el movimiento de la Tierra y de los planetas alrededor del Sol explica los movimientos aparentes de los planetas.

Leyes de Kepler del movimiento planetario

Ahora sabemos que los planetas no giran en círculos con el Sol en el centro, ni la Luna gira en círculos con la Tierra en el centro. La distancia entre la Luna y la Tierra por ejemplo, varía de 220 000 a 260 000 millas. En la última mitad del siglo XVI, el astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601) hizo mediciones de las posiciones de los planetas. Johann Kepler (1571-1630) estudió esta información durante años y, tras algunos intentos fallidos, llegó a las tres leyes del movimiento planetario:

> **Leyes de Kepler:**
>
> I. La órbita de cada planeta es una elipse con el Sol en un foco. En particular, la órbita se encuentra en un plano que contiene al Sol.
>
> II. A medida que un planeta gira alrededor del Sol, el segmento de recta desde el Sol al planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.
>
> III. La relación p^2/d^3 es la misma para todo planeta que gire alrededor del Sol, donde p es el periodo de la órbita (tiempo para completar una revolución) y d la distancia media de la órbita (promedio de la distancia más corta y la más grande desde el Sol).

Una elipse es una curva cerrada en el plano, tal que la suma de las distancias desde cualquier punto de la curva a dos puntos fijos, llamados focos de la elipse, es constante. Si los dos focos están ubicados sobre el eje y en $(0, -b)$ y $(0, b)$, y si la suma constante de las distancias es $2d$, entonces puede demostrarse que la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1,$$

donde d es la distancia media y $c^2 = d^2 - b^2$ (véase el problema 3).

La segunda ley de Kepler establece que la recta desde el planeta al Sol siempre recorre la misma área en una unidad de tiempo. Esto implica que la rapidez del planeta no es constante, porque debe avanzar más rápidamente cuando está cerca del Sol (véase Fig. 16.51).

La tercera ley señala que p^2/d^3 es la misma para todos los planetas. En particular, esto significa que si conocemos el periodo p de un planeta en años terrestres, entonces conocemos la relación entre su distancia media al Sol y la de la Tierra. Newton, posteriormente, demostró que el valor constante de p^2/d^3 depende de la masa del objeto alrededor del cual giran los planetas.

Las leyes de Kepler, impresionantes como son, son puramente descriptivas; no explicaron el movimiento de los planetas. El gran logro de Newton fue encontrar la causa subyacente.

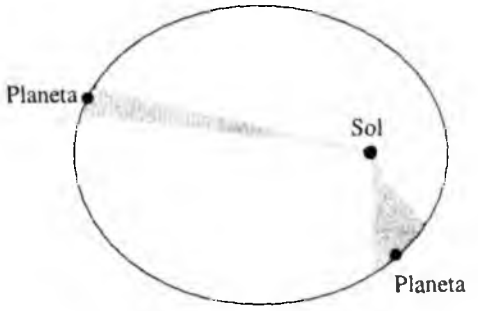


Figura 16.51 El segmento de recta que une un planeta con el Sol recorre áreas iguales en tiempos iguales.

Primera y segunda leyes de Newton del movimiento y la atracción universal

En 1687, Isaac Newton (1642-1727) publicó sus *Principia Mathematica.*[1] En esta obra, Newton formuló una teoría del movimiento basada en el concepto de fuerza. Comenzó por observar que el movimiento curvilíneo es señal de aceleración, y se dio a la tarea de buscar una ley específica de aceleración que explicara las leyes de Kepler. Newton definió el "movimiento" de un cuerpo, lo que nosotros llamaríamos momento (o cantidad de movimiento) como el producto de su masa, m, y su velocidad, $\vec{v}$.

Primera ley de Newton del movimiento

Todo cuerpo permanece en estado de reposo, o de movimiento constante [momento] en línea recta, a menos que sea obligado a cambiar ese estado por fuerzas que actúan sobre él.

En un lenguaje moderno, la primera ley establece que $m\vec{v}$ es un vector constante en ausencia de una fuerza. En particular, un planeta puede moverse en una elipse sólo si hay una fuerza que actúe sobre él.

Segunda ley de Newton del movimiento

La rapidez de cambio del movimiento [momento] de un cuerpo es proporcional a la fuerza que actúa sobre él y en dirección de la línea recta a lo largo de la cual actúa la fuerza.

Newton reconoció que la rapidez de cambio del momento era una cantidad vectorial. Su segunda ley da la dirección de la rapidez de cambio: en notación moderna, si m es masa y $\vec{v}$ es velocidad, entonces

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Al denotar $\vec{F}$ como la fuerza que actúa sobre el cuerpo obtenemos la versión moderna de la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$. (Las unidades se eligen de modo que la constante de proporcionalidad sea 1.)

[1] El título completo en latín fue *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,* que significa *Principios matemáticos de filosofía natural.*

Para completar la explicación de las leyes de Kepler, Newton necesitó una ley que expresara la fuerza de atracción gravitacional del Sol sobre un planeta.

Ley de la atracción universal

Dos objetos de masa M y m son atraídos uno al otro por una fuerza, F, proporcional al producto de sus masas y al cuadrado inverso de la distancia r entre ellos:

$$F = \frac{GMm}{r^2},$$

donde G es una constante universal.

Aun cuando la obra de Newton contiene muchas de las ideas fundamentales del cálculo, para su razonamiento utilizó triángulos semejantes y geometría.[2] En el resto de esta sección explicaremos el método de Newton, con pruebas modernas usando derivadas, vectores y productos cruz.

Cómo explica Newton la segunda ley de Kepler

La segunda ley de Newton establece que el vector de aceleración de un planeta apunta en la dirección de la fuerza gravitacional que actúa sobre éste, y la ley de atracción señala que el vector de fuerza gravitacional apunta hacia el Sol. Por lo tanto, el vector de aceleración de un planeta siempre apunta hacia el Sol. El *movimiento centrípeto alrededor del punto fijo A* se define como el movimiento en que el vector de aceleración siempre apunta hacia A (o exactamente en la dirección contraria). Newton demostró que el movimiento centrípeto equivale al movimiento en un plano sujeto a la segunda ley de Kepler.

Teorema de Newton: leyes de Kepler y movimiento centrípeto

Supongamos que un objeto se mueve en un plano que contiene al punto A, de manera tal que el segmento de recta desde A al objeto recorre áreas iguales en tiempos iguales, entonces el movimiento es centrípeto alrededor de A. A la inversa: si el movimiento es centrípeto alrededor de A, entonces el objeto se mueve en un plano que contiene a A, y el segmento de recta desde A al objeto recorre áreas iguales en tiempos iguales.

Newton halló una prueba geométrica de este teorema. Aquí se da una prueba moderna. Considere el vector $\vec{r} \times \vec{v}$, donde $\vec{r}$ es el vector desde A al objeto, y $\vec{v}$ es el vector de velocidad del objeto (véase Fig. 16.52). Demostramos que $\vec{r} \times \vec{v}$ representa la rapidez con la que el vector $\vec{r}$ recorre el área.

Supongamos que en el tiempo Δt el vector $\vec{r}$ se convierte en $\vec{r} + \Delta\vec{r}$. La figura 16.53 muestra que el área recorrida por el vector $\vec{r}$ durante el intervalo Δt es aproximadamente triangular y está dada por

$$\Delta\vec{A} \approx \frac{1}{2}\vec{r} \times (\vec{r} + \Delta\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{r} + \frac{1}{2}\vec{r} \times \Delta\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \Delta\vec{r}$$

porque $\vec{r} \times \vec{r} = 0$. Al dividir entre Δt, tenemos

$$\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} \approx \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Al hacer $\Delta t \to 0$ resulta

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}.$$

[2] Una versión del camino seguido por Newton se encuentra en Tristan Needham, *Newton and the Transmutation of Force*, The American Mathematical Monthly, vol. 100, 1993, pp. 119-137.

De este modo, se ve que el área del triángulo determinado por $\vec{r}$ y $\vec{v}$ da la rapidez con la que el área está siendo recorrida a medida que el objeto se desplaza alrededor de su órbita.

La dirección de $\vec{r} \times \vec{v}$ es perpendicular al plano que contiene a $\vec{r}$ y a $\vec{v}$. Por lo tanto, si el área está siendo recorrida a una rapidez constante y si $\vec{r}$ y $\vec{v}$ están siempre en el mismo plano que el movimiento, entonces $\vec{r} \times \vec{v}$ es un vector constante. Para ver si $\vec{r} \times \vec{v}$ es constante, se toma la derivada de $\vec{r} \times \vec{v}$. Si se utiliza la regla del producto, el hecho de que $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{0}$, y se escribe la aceleración $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, resulta

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = \vec{r} \times \vec{a}.$$

Primero, supongamos que el movimiento es en un plano que contiene a A y que el segmento de recta recorre áreas iguales en tiempos iguales. Entonces $\vec{r} \times \vec{v}$ es constante, de modo que debemos tener $\vec{r} \times \vec{a} = 0$. Esto significa que $\vec{a}$ debe ser paralelo a $\vec{r}$, pero esto a su vez significa que $\vec{a}$ siempre apunta hacia A (o se aleja de A), así que el movimiento es centrípeto.

Por el contrario, supongamos que el movimiento es centrípeto. Entonces $\vec{r}$ y $\vec{a}$ son paralelos, así que $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{0}$, lo que implica que $\vec{r} \times \vec{v}$ es constante. Esto nos indica que áreas iguales son recorridas en tiempos iguales y que $\vec{r}$ y $\vec{v}$ siempre se encuentran en el mismo plano (el plano perpendicular a $\vec{r} \times \vec{v}$).

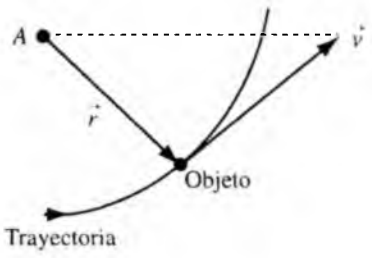


Figura 16.52 El triángulo representa la rapidez con la que el área es recorrida por el vector $\vec{r}$ cuando el cuerpo se mueve con velocidad $\vec{v}$.

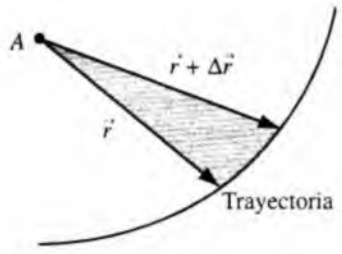


Figura 16.53 Área recorrida en el tiempo Δt.

Cómo explica Newton la primera ley de Kepler

La equivalencia entre la segunda ley de Kepler y el movimiento centrípeto confirma que el vector de aceleración de un planeta siempre apunta hacia el Sol. Pero, ¿qué hay de su magnitud? Newton demostró que la magnitud de la aceleración podía derivarse de la primera ley de Kepler, la cual estipula que el planeta gira en una elipse, centrípetamente alrededor de uno de sus focos. El resultado que obtuvo fue el siguiente:

Teorema de Newton: movimiento alrededor del foco de la elipse

Supongamos que un objeto se desplaza en una elipse centrípetamente alrededor de uno de sus focos, B. Supongamos también que la distancia media de la elipse es d y p el periodo del movimiento. Si r es la distancia desde el objeto a B, entonces la magnitud de la aceleración está dada por

$$a = \frac{k}{r^2}, \qquad \text{donde} \quad k = \frac{4\pi^2 d^3}{p^2}.$$

Por lo tanto, a es proporcional al cuadrado inverso de r.

La fuerza gravitacional

Hasta aquí se ha puesto énfasis en la aceleración más que en la fuerza. Newton observó que debe haber una fuerza que modifique la trayectoria de la Luna a medida que gira alrededor de la Tierra y que un cuerpo que cae, por ejemplo una manzana desde un árbol, se acelera hacia la tierra. Descubrió que la fuerza que atraía la manzana hacia la tierra era la misma fuerza que aceleraba la Luna en su órbita. La magnitud de la fuerza de gravedad está dada por la Ley de la Gravitación Universal,

$$F = \frac{GMm}{r^2},$$

donde G es una constante. Para un planeta de masa m que gira en órbita alrededor del Sol, de masa M, tenemos

$$F = ma = \frac{GMm}{r^2}, \qquad \text{y así } a = \frac{GM}{r^2}.$$

Observe que la fórmula de Newton de la ley de gravedad explica el hecho de que en las leyes de Kepler no intervienen las masas de los planetas individuales. Puesto que $F = ma$ y $F = GMm/r^2$, la masa, m, se cancela. Ésta es la explicación del sorprendente descubrimiento de Galileo de que la aceleración de un cuerpo en caída libre no depende de la masa del cuerpo.

Por el teorema de Newton, la constante de proporcionalidad es $4\pi^2 d^3/p^2$, así que tenemos

$$GM = \frac{4\pi^2 d^3}{p^2},$$

Esta relación nos indica que si conocemos la constante gravitacional G, podemos calcular la masa M. Estos cálculos suponen que M es mucho mayor que m, así que la masa M puede considerarse como estacionaria. Esto se aplica a planetas que giran en órbita alrededor del Sol, a la Luna que gira alrededor de la Tierra, o a una luna que gira alrededor de Júpiter. En vista que experimentos de laboratorio efectuados en la Tierra permiten conocer el valor de G, la ley de Newton abrió el camino para calcular la masa del Sol, la Tierra y Júpiter.

La obra de Newton inició una nueva era científica en la que el uso de ecuaciones diferenciales aportó notables avances en física y astronomía.

Problemas para la sección 16.5

1. En el siglo III a. C., Eratóstenes calculó la circunferencia de la Tierra por medio del siguiente método. Él sabía que cerca de Syena, Egipto, en el día más largo del año, el Sol podía verse reflejado en el fondo de un profundo pozo y, en consecuencia, estaba directamente encima del pozo. El mismo día, en Alejandría, Egipto, observó que la posición del Sol se recorría alrededor de 1/50 de círculo al sur del Cenit (es decir, al sur de directamente encima). Al hablar con camelleros, Eratóstenes también se enteró de que la distancia norte-sur entre Alejandría y Syena era de alrededor de 5000 estadios (un *estadio* era una unidad griega de longitud, que se cree equivalía más o menos a 185 metros). Use esta información para calcular la circunferencia de la Tierra.
2. Para un punto en el ecuador, calcule la magnitud de la aceleración causada por la rotación de la Tierra. Utilice pies por segundo por segundo como unidades. El radio de la Tierra es de 4000 millas y (como sabemos) el periodo de su rotación, de 24 horas. Compare su respuesta con el valor de la aceleración debida a la gravedad, $g = 32$ pies/s^2. Suponga un punto en el borde de un carrusel de 25 pies de radio con la misma aceleración que el punto en el ecuador. ¿Cuál es la velocidad del punto del carrusel? ¿Cuál es su periodo?

3. Suponga que una elipse tiene focos en $(0, b)$ y $(0, -b)$ en el plano xy y que la distancia media al foco $(0, b)$ es d. Demuestre que la suma constante de las distancias desde cualquier punto de la elipse a los dos focos es $2d$. Luego demuestre que la ecuación para la elipse es

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$$

donde d es la distancia media y $c^2 = d^2 - b^2$.

4. Suponga que una partícula se desplaza en el plano xy de manera que su vector de aceleración $\vec{a}$ siempre apunta al origen y tiene magnitud proporcional a su distancia al origen. Seleccione el eje x para que el punto de la trayectoria de la partícula más cercano al origen sea $(a, 0)$. Explique por qué en ese punto el vector de velocidad es perpendicular al eje x. Demuestre que con las coordenadas dadas x y y, si definimos que el tiempo $t = 0$ es el instante cuando la partícula está en $(a, 0)$, entonces la partícula satisface las ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -ky, \qquad k > 0,$$

con condiciones iniciales $x(0) = a$, $x'(0) = 0$, y $y(0) = 0$, $y'(0) = c$. Aquí c es la velocidad en la dirección y, en el tiempo $t = 0$. Ahora demuestre que si $b = c / \sqrt{k}$, la solución a estas ecuaciones diferenciales es

$$x = a \cos\sqrt{k}t, \qquad y = b \operatorname{sen} \sqrt{k}t.$$

5. Experimente en una computadora o calculadora con las órbitas que resultan de la aceleración centrípeta. Necesitará un programa que grafique trayectorias (soluciones) para sistemas de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, para observar órbitas con aceleración centrípeta de k/r, es necesario resolver un sistema de ecuaciones diferenciales con cuatro variables, las variables de posición x y y, y las variables de velocidad $u = dx/dt$ y $v = dy/dt$, que satisfacen el sistema

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{du}{dt} = \frac{-kx}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{-ky}{x^2 + y^2}.$$

Compruebe que estas ecuaciones implican que el vector de aceleración $(d^2x/dt^2)\vec{i} + (d^2y/dt^2)\vec{j} = (du/dt)\vec{i} + (dv/dt)\vec{j}$ tiene la dirección y magnitud correctas. Luego utilice la computadora para graficar las variables x y y partiendo de un conjunto cualquiera de valores iniciales para x, y, u y v. Experimente con otras leyes: k/r^3, kr^2. ¿Son órbitas siempre cerradas?

6. Una hipérbola es una curva tal que la *diferencia* de las distancias desde cualquier punto de la curva a dos puntos fijos (llamados focos) es constante. La ecuación para una hipérbola con centro en el origen es

$$-\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$$

donde $2d$ es la diferencia constante en distancias desde los focos en $(0, b)$ y $(0, -b)$ y $c^2 = b^2 - d^2$. Demuestre que el movimiento parametrizado por

$$x = \frac{c}{2}(e^{kt} - e^{-kt}), \quad y = \frac{d}{2}(e^{kt} + e^{-kt})$$

ocurre a lo largo de la hipérbola $-x^2/c^2 + y^2/d^2 = 1$ y también que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k^2x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = k^2y.$$

Por lo tanto, la aceleración del movimiento dado apunta alejándose del origen con magnitud proporcional a la distancia desde el origen.

PROBLEMAS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO DIECISÉIS

Escriba una parametrización para cada una de las curvas de los problemas del 1 al 10.

1. La línea horizontal que pasa por el punto (0, 5).
2. El círculo de radio 2 con centro en el origen, comenzando en el punto (0, 2) cuando $t = 0$.
3. El círculo de radio 4 con centro en el punto (4, 4), comenzando en el eje x cuando $t = 0$.
4. El círculo de radio 1 del plano xy con centro en el origen, recorrido en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba.
5. La recta que pasa por los puntos (2, −1, 4) y (1, 2, 5).
6. La recta que pasa por el punto (1, 3, 2) y es perpendicular al plano xz.
7. La recta que pasa por el punto (1, 1, 1) y es perpendicular al plano $2x - 3y + 5z = 4$.
8. El círculo de radio 2 paralelo al plano xy, con centro en el punto (0, 0, 1), y recorrido en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde abajo.
9. El círculo de radio 3 paralelo al plano xz, con centro en el punto (0, 5, 0), y recorrido en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde (0, 10, 0).
10. El círculo de radio 2 con centro (0, 1, 0) que se encuentra en el plano $x + z = 0$.
11. Considere las ecuaciones paramétricas siguientes para $0 \le t \le \pi$.

    I) $\vec{r} = \cos(2t)\vec{i} + \operatorname{sen}(2t)\vec{j}$ II) $\vec{r} = 2\cos t\vec{i} + 2\operatorname{sen} t\vec{j}$

    III) $\vec{r} = \cos(t/2)\vec{i} + \operatorname{sen}(t/2)\vec{j}$ IV) $\vec{r} = 2\cos t\vec{i} - 2\operatorname{sen} t\vec{j}$

    a) Relacione las anteriores ecuaciones con cuatro de las curvas C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 y C_6 de la figura 16.54. (Cada curva es parte de un círculo.)

    b) Escriba ecuaciones paramétricas para las curvas que no quedaron relacionadas; suponga otra vez que $0 \le t \le \pi$.

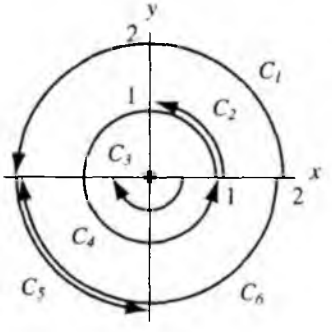


Figura 16.54

12. En una calculadora gráfica, o en computadora, grafique $x = 2t/(t^2 + 1)$, $y = (t^2 - 1)/(t^2 + 1)$, primero para $-50 \le t \le 50$ y luego para $-5 \le t \le 5$. Explique lo que vea. ¿Es la curva realmente un círculo?

13. Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
    a) ¿En qué dirección debe uno avanzar desde el punto (1, 1) para obtener la máxima rapidez de aumento de f?
    b) Encuentre una dirección en que la derivada direccional del punto (1, 1) es igual a cero.
    c) Suponga que uno avanza a lo largo de la curva $x = e^{2t}$, $y = 2t^3 + 6t + 1$. ¿Cuál es df/dt en $t = 0$?
14. Encuentre la ecuación paramétrica para la línea de intersección de los planos $z = 4 + 2x + 5y$ y $z = 3 + x + 3y$.
15. Encuentre ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos (1, 2, 3), (3, 5, 7) y calcule la distancia más corta desde la recta al origen.
16. ¿Son paralelas las rectas $x = 3 + 2t$, $y = 5 - t$, $z = 7 + 3t$ y $x = 3 + t$, $y = 5 + 2t$, $z = 7 + 2t$?
17. Grafique la figura de Lissajous dada por $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{sen} t$; use una calculadora gráfica o una computadora. Explique por qué parece parte de una parábola. [Sugerencia: utilice una identidad de ángulo doble de trigonometría.]
18. Suponga que un planeta P, en el plano xy, gira alrededor de la estrella S en sentido contrario al de las manecillas del reloj, en un círculo de 10 unidades de radio, y completa una órbita en 2π unidades de tiempo. Suponga, además, que una luna M gira en órbita alrededor del planeta P en sentido contrario al de las manecillas del reloj en un círculo de 3 unidades de radio y completa una órbita en $2\pi/8$ unidades de tiempo. La estrella S está fija en el origen $x = 0$, $y = 0$, y en el tiempo $t = 0$ el planeta P está en el punto (10, 0) y la Luna M está en el punto (13, 0).
    a) Encuentre ecuaciones paramétricas para las coordenadas x y y del planeta en el tiempo t.
    b) Encuentre ecuaciones paramétricas para las coordenadas x y y de la luna en el tiempo t. [Sugerencia: para la posición de la Luna en el tiempo t, tome un vector del Sol al planeta en el tiempo t y sume un vector del planeta a la Luna.]
    c) Grafique una trayectoria del planeta usando una calculadora gráfica o una computadora.
    d) Experimente con radios y velocidades diferentes para la órbita de la Luna alrededor del planeta.
19. Una partícula se mueve a lo largo de una recta, con posición en el tiempo t dada por
$$\vec{r}(t) = (2 + 5t)\vec{i} + (3 + t)\vec{j} + 2t\vec{k}.$$
    a) ¿Dónde está la partícula cuando $t = 0$?
    b) ¿En qué tiempo llega la partícula al punto (12, 5, 4)?
    c) ¿Llega alguna vez la partícula al punto (12, 4, 4)?, ¿por qué sí, o por qué no?
20. Una hormiga, que sale del origen avanza dos unidades/segundo a lo largo del eje x hasta el punto (1, 0). La hormiga sigue luego en sentido contrario al de las manecillas del reloj a lo largo del círculo unitario hasta (0, 1) a una velocidad de $3\pi/2$ unidades/segundo, después va directamente hacia abajo hasta el origen a una velocidad de dos unidades/segundo a lo largo del eje y.
    a) Exprese las coordenadas de la hormiga como función del tiempo, t, en segundos.
    b) Exprese la trayectoria inversa como una función del tiempo.
21. Una jugadora de baloncesto lanza el balón desde 6 pies sobre el suelo hacia una canasta que está a 10 pies del suelo y alejada de ella 15 pies.
    a) Suponga que lanza el balón a un ángulo de A grados sobre la horizontal ($0, < A < \pi/2$) con una velocidad inicial V. Dé las coordenadas x y y de la posición del balón en el tiempo t. Suponga que la coordenada x de la canasta es 0 y que la coordenada x de la jugadora es -15. [Sugerencia: Hay una aceleración de -32 pies/s^2 en la dirección y; no hay aceleración en la dirección x. Desprecie la resistencia del aire.]

b) Mediante las ecuaciones paramétricas obtenidas en el inciso a, experimente con valores diferentes para V y A, graficando la trayectoria del balón en una calculadora gráfica o computadora para ver qué tan cerca llega el balón a la canasta. (Las divisiones del eje y se pueden usar para ubicar la canasta.)

c) Encuentre el ángulo A que reduzca al mínimo la velocidad necesaria para que el balón llegue a la canasta. (Es un cálculo laborioso: primero encuentre una ecuación en V y A que se cumpla si la trayectoria del balón pasa por el punto situado a 15 pies de la jugadora y a 10 pies del suelo. Luego minimice V.)

22. Una porrista tiene un bastón de 0.40 m de largo con una luz en un extremo. Lanza el bastón de tal forma que su centro avanza a lo largo de una parábola, y el bastón gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del centro con una velocidad angular constante. El bastón está inicialmente en posición horizontal y a 1.5 m del suelo; su velocidad inicial es 8 m/s horizontalmente y 10 m/s verticalmente, y su velocidad angular es 2 revoluciones por segundo. Encuentre ecuaciones paramétricas que describan los siguientes movimientos:
   a) El centro del bastón en relación al suelo.
   b) El extremo del bastón en relación a su centro.
   c) La trayectoria trazada por el extremo del bastón en relación al suelo.
   d) Trace una gráfica del movimiento del extremo del bastón.

23. Una rueda de 1 metro de radio se apoya sobre el eje x con su centro en el eje y. Hay una mancha en la orilla en el punto (1, 1). Véase la figura 16.55. En el tiempo $t = 0$ la rueda empieza a rodar sobre el eje x, en la dirección mostrada, a razón de 1 radián por segundo.
   a) Encuentre ecuaciones paramétricas que describan el movimiento del centro de la rueda.
   b) Encuentre ecuaciones paramétricas que describan el movimiento de la mancha. Grafique esta trayectoria.

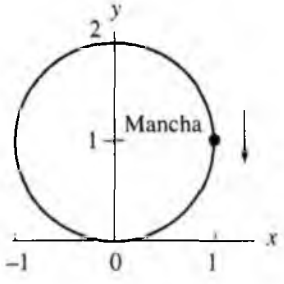


Figura 16.55

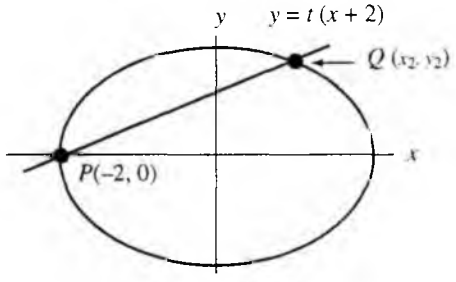


Figura 16.56

24. a) La elipse $2x^2 + 3y^2 = 8$ interseca la recta de pendiente t que pasa por el punto $P = (-2, 0)$ en dos puntos, uno de los cuales es P. Calcule la coordenada del otro punto Q. Véase la figura 16.56.
    b) Dé una parametrización de la elipse $2x^2 + 3y^2 = 8$ por funciones racionales.

25. Encuentre ecuaciones paramétricas para el plano $3x + 4y + 5z = 10$.

26. a) Encuentre un vector normal al plano $\vec{r} = (3 - 5s + 2t)\vec{i} + (1 + s + 3t)\vec{j} + (s - t)\vec{k}$.
    b) Encuentre una ecuación implícita para el plano.

27. Una persona se encuentra de pie en el punto (–5, 0, 5). Jane, una amiga de ésta, está de pie en el punto (0, –5, –5) y otra amiga, Jo, está parada en el punto (10, 5, 0). Encuentre ecuaciones paramétricas para el plano donde están de pie las tres, de modo que los parámetros de la primera persona sean (0, 0), los de Jo sean (1, 0) y los de Jane sean (0, 1). Encuentre una parametrización de manera que se cambien los parámetros de Jane por los de Jo. Encuentre una parametrización de modo que se cambien los parámetros de la primera persona por los de Jane.

28. Existe un método muy conocido para parametrizar una esfera, llamado *proyección estereográfica.* Trabajamos con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Dibuje una recta desde un punto (x, y) del plano xy al polo norte $(0, 0, 1)$. Ésta recta interseca la esfera en un punto (x, y, z), obtenemos así una parametrización de la esfera por puntos en el plano.
    a) ¿Qué punto corresponde al polo sur?
    b) ¿Cuáles puntos corresponden al ecuador?
    c) ¿Obtenemos todos los puntos de la esfera mediante esta parametrización?
    d) ¿Cuáles puntos corresponden al hemisferio superior?
    e) ¿Cuáles al hemisferio inferior?

29. Muchos instrumentos metálicos de viento son aproximadamente cornetas de Bessel, que son superficies de revolución alrededor del eje x generada por la función

$$z = f(x) = \frac{b}{(x + a)^m}$$

para constantes positivas a, b y m. Entonces $f(x)$ es el radio de la corneta a una distancia x del extremo abierto grande. Por lo general, m está entre $0.5 \leq m \leq 1$.

Determine a y b y trace la gráfica de f para $0 \leq x \leq 20$ si el radio en $x = 0$ es 15 cm y el radio en $x = 20$ cm es 1 cm para cada uno de los siguientes tres casos: $m = 0.5$, $m = 0.7$, $m = 1$. ¿Por qué m recibe el nombre de parámetro de acampanado?

30. Dé una parametrización del extremo acampanado de la corneta del problema 29 con $m = 0.5$.

31. La figura 16.57 es una imagen de la superficie paramétrica

$$x = a(s + t), \qquad y = b(s - t), \qquad z = 4ct^2,$$

para $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$. ¿Qué pasa si se hace aumentar a?, ¿si aumenta b?, ¿si aumenta c?, ¿cómo se podría voltear la figura hacia abajo?

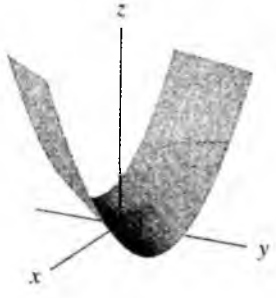


Figura 16.57

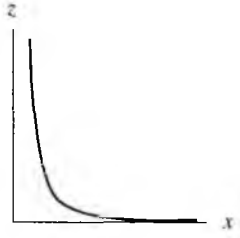
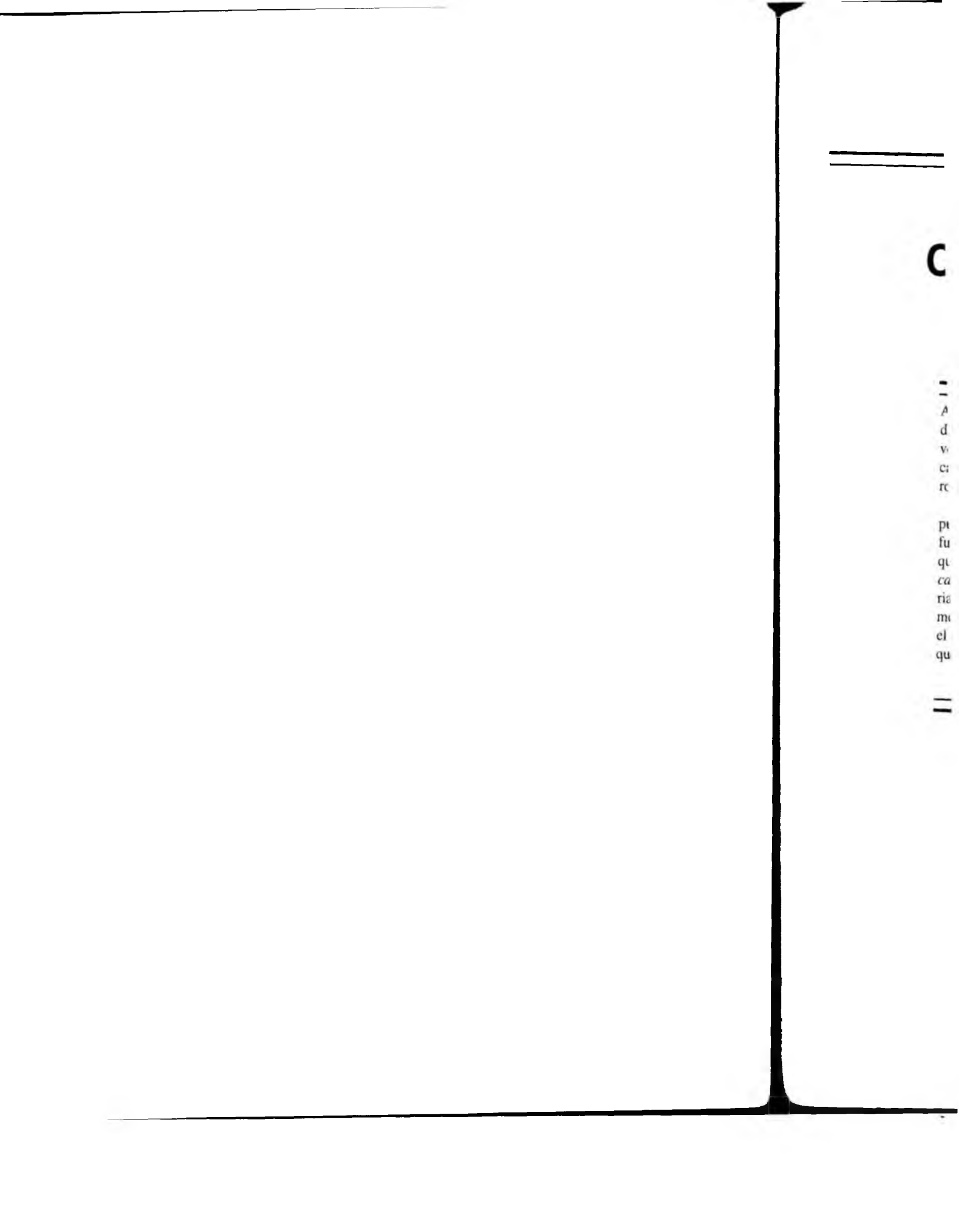


Figura 16.58

32. La figura 16.58 muestra la curva $x^2z = 1$ en el plano xz. Parametrice la superficie obtenida al hacer girar esta curva
    a) alrededor del eje x, para $x > 0$
    b) alrededor del eje z, para $z > 0$.

33. La representación paramétrica de una recta en tres dimensiones se utiliza para encontrar dónde la recta entre dos puntos interseca un plano dado. Por ejemplo, las imágenes de curvas y superficies en el espacio tridimensional de este libro fueron dibujadas por una computadora. Para ello, la computadora calcula primero las coordenadas de algunos puntos sobre la curva o la superficie. Para cada uno de tales puntos, calcula entonces la visual desde ese punto al ojo de un observador imaginario y determina dónde esa línea interseca una ventana imaginaria (el plano de la pantalla de la computadora) que se encuentra entre el punto y el ojo del observador. Se calculan las coordenadas bidimensionales de ese punto de intersección en la pantalla para que el punto pueda graficarse en la pantalla. Encuentre fórmulas para las coordenadas del punto de intersección del plano $Ax + By + Cz = D$ con la recta que une el punto (a, b, c) con un observador en el punto (A, B, C).

34. En el problema 33, las coordenadas *xyz* están calculadas para el punto donde la visual desde un observador en (A, B, C) hasta un punto (a, b, c) encuentra un plano de observación (la pantalla) $Ax + By + Cz = D$. La computadora necesita calcular las coordenadas de este punto sobre la pantalla, no sus coordenadas en el espacio. Para hacerlo, tome dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a ángulos rectos entre sí que comienzan en el origen de la pantalla y yacen en el plano de la pantalla. Luego cualquier punto de la pantalla se puede escribir como $r\vec{u} + s\vec{v}$ para ciertos números r, s; estos números son las coordenadas sobre la pantalla. Escoja para el origen de la pantalla el punto Q, donde la visual desde el observador (A, B, C) al origen $(0, 0, 0)$ interseca el plano de observación $Ax + By + Cz = D$. Elija $\vec{u}$ como el vector unitario paralelo al plano xy que apunta a la derecha del observador y $\vec{v}$ como el vector unitario perpendicular a $\vec{u}$ y que apunta hacia arriba (con componente z positiva). Las coordenadas de un punto sobre la pantalla se encuentran tomando el producto punto con $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del vector desde el origen Q de la pantalla al punto de intersección calculado en el problema 33.
    a) Encuentre las coordenadas *xyz* del origen Q de la pantalla en términos de A, B, C, D.
    b) Encuentre el vector $\vec{u}$ en términos de A, B, C.
    c) Encuentre el vector $\vec{v}$ en términos de A, B, C.
    d) Encuentre las coordenadas del punto de intersección calculado en el problema 33.
    e) Encuentre las coordenadas r y s de la pantalla, del punto calculado en el problema 33. Esto es, encuentre $r = \vec{u} \cdot (\vec{P} - \vec{Q})$ y $s = \vec{v} \cdot (\vec{P} - \vec{Q})$. [Sugerencia: utilice el hecho de que $\vec{u} \cdot (A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}) = 0$ y $\vec{v} \cdot (A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}) = 0$].



CAPÍTULO DIECISIETE

CAMPOS VECTORIALES

Algunas cantidades físicas (como la temperatura) se representan mejor mediante escalares; otras (como la velocidad), se representan mejor mediante vectores. Ya se han visto funciones de varias variables cuyos valores son escalares: la temperatura como función de la posición en un mapa meteorológico, por ejemplo. Tales funciones se llaman funciones de valor escalar.

Algunos mapas meteorológicos indican la velocidad del viento en varios puntos, mediante flechas. La velocidad del viento es un ejemplo de una función de valor vectorial, puesto que su valor en cualquier punto es el vector que indica la dirección y fuerza del viento. Tales funciones también se llaman *campos vectoriales*. Ya se presentó un importante ejemplo de un campo vectorial, a saber, el gradiente de una función de valor escalar. En este capítulo veremos otros ejemplos, como los campos vectoriales de velocidad que describen el flujo de un fluido. También veremos la trayectoria seguida por una partícula que se desplaza con el flujo, que se llama *línea de flujo* del campo vectorial.

17.1 CAMPOS VECTORIALES

Introducción a los campos vectoriales

Un *campo vectorial* es una función que asigna un vector a cada punto del plano o del espacio tridimensional. Un ejemplo de un campo vectorial es el gradiente de una función $f(x, y)$; en cada punto (x, y) el vector grad $f(x, y)$ apunta en la dirección de máxima rapidez de aumento de f. En esta sección veremos otros campos vectoriales que representan velocidades y fuerzas.

Campos vectoriales de velocidad

La figura 17.1 muestra el flujo de una parte de la corriente del Golfo, que es una corriente del océano Atlántico.[1] Es un ejemplo de un *campo vectorial de velocidad*: cada vector muestra la velocidad de la corriente en ese punto. La corriente es máxima donde los vectores de velocidad son más largos, en la parte media de la corriente. Flanqueando la corriente hay remolinos donde al agua gira en círculos.

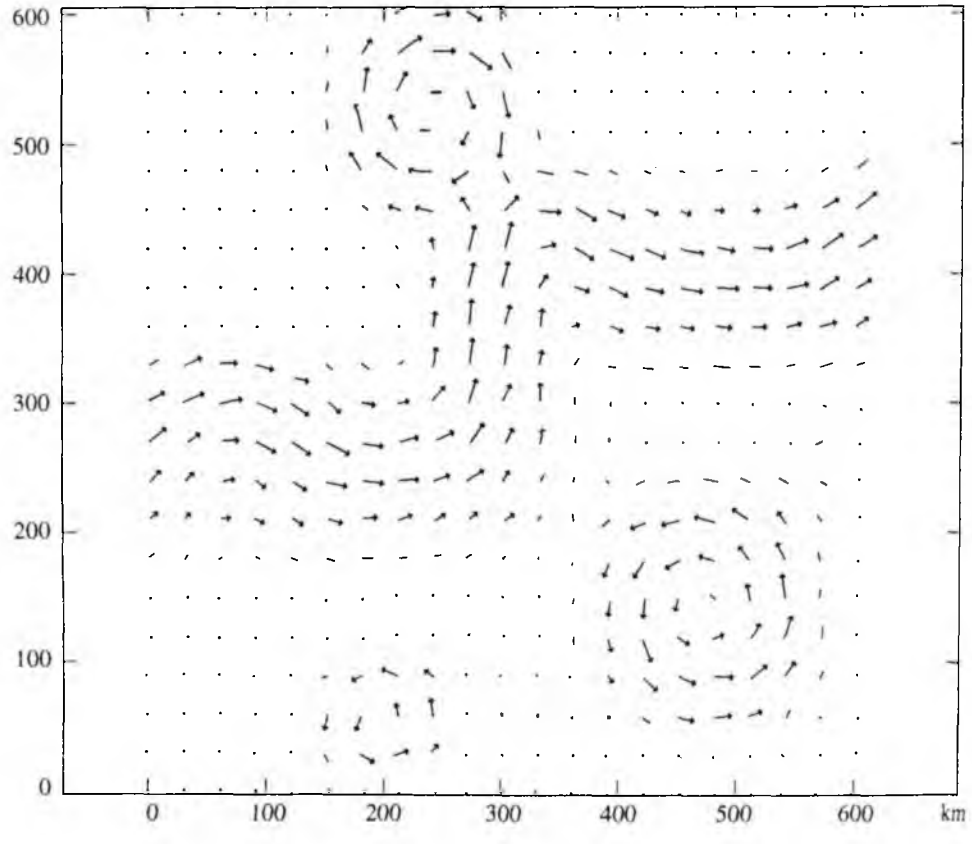


Figura 17.1 Campo vectorial de velocidad de la corriente del Golfo.

[1] Basado en datos proporcionados por Avijit Gangopadhyay del Jet Propulsion Laboratory.



Figura 17.2 El campo gravitacional de la Tierra.

Campos de fuerza

Otra cantidad física representada por un vector es una fuerza. Cuando experimentamos una fuerza, a veces ésta resulta de un contacto directo con el objeto que ejerce la fuerza (por ejemplo un empujón). Sin embargo, muchas fuerzas se pueden sentir en todos los puntos del espacio. Por ejemplo, la Tierra ejerce una atracción gravitacional sobre todas las otras masas. Tales fuerzas se pueden representar mediante campos vectoriales.

La figura 17.2 muestra la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre una masa de un kilogramo en diferentes puntos del espacio. Éste es un dibujo del campo vectorial en el espacio tridimensional. Se puede ver que todos los vectores apuntan hacia la Tierra (que no se muestra en el diagrama) y que los vectores más alejados de la Tierra son de magnitud menor.

Definición de un campo vectorial

Ahora que hemos visto algunos ejemplos de campos vectoriales, damos una definición más formal.

> Un **campo vectorial** en dos dimensiones es una función $\vec{F}(x, y)$ cuyo valor en el punto (x, y) es un vector bidimensional. De la misma manera, un campo vectorial en tres dimensiones es una función $\vec{F}(x, y, z)$ cuyos valores son vectores tridimensionales.

Obsérvese la flecha sobre la función, $\vec{F}$, la cual indica que su valor es un vector, no un escalar. Muchas veces representamos el punto (x, y) o (x, y, z) por su vector de posición $\vec{r}$ y escribimos el campo vectorial como $\vec{F}(\vec{r})$.

Visualización de un campo vectorial dado por una fórmula

Como un campo vectorial es una función que asigna un vector a cada punto, con frecuencia un campo vectorial puede ser expresado por una fórmula.

Ejemplo 1 Trazar el campo vectorial en tres dimensiones dado por $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$.

Solución La tabla 17.1 muestra el valor del campo vectorial en unos cuantos puntos. Observe que cada valor es un vector. Para trazar el campo vectorial, graficamos $\vec{F}(x, y)$ con su cola en (x, y) (véase Fig. 17.3).

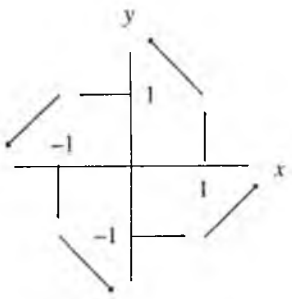


Figura 17.3 El valor $\vec{F}(x, y)$ está colocado en el punto (x, y).

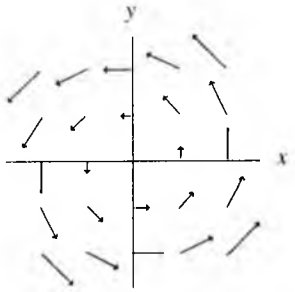


Figura 17.4 Los vectores del campo vectorial $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$; se han dibujado a escala más pequeña para ajustarse al diagrama.

TABLA 17.1 *Algunos valores de* $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$

x \ y	−1	0	1
−1	$\vec{i} - \vec{j}$	$-\vec{j}$	$-\vec{i} - \vec{j}$
0	$\vec{i}$	$\vec{0}$	$-\vec{i}$
1	$\vec{i} + \vec{j}$	$\vec{j}$	$-\vec{i} + \vec{j}$

Ahora veamos la fórmula para obtener una mejor representación. La magnitud del vector en (x, y) es $\|\vec{F}(x, y)\| = \| -y\vec{i} + x\vec{j}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, que es la distancia de (x, y) al origen. Por lo tanto, todos los vectores a una distancia fija del origen (esto es, en un círculo con centro en el origen) tienen la misma magnitud. Ésta se hace más grande a medida que uno se aleja del origen. ¿Qué pasa con la dirección? La figura 17.3 sugiere que en cada punto (x, y) el vector $\vec{F}(x, y)$ es perpendicular al vector de posición $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Esto se verifica usando el producto punto $\vec{r} \cdot \vec{F}(x, y) = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (-y\vec{i} + x\vec{j}) = 0$. Esto significa que los vectores en este campo vectorial son tangentes a círculos con centro en el origen y se hacen más largos a medida que salimos de él. En la figura 17.4, los vectores están a escala, para que no se encimen unos sobre otros.

Ejemplo 2 Dibujar imágenes de los campos vectoriales, en dos dimensiones, dados por

(a) $\vec{F}(x, y) = x\vec{j}$ (b) $\vec{G}(x, y) = x\vec{i}$.

Solución a) El vector $x\vec{j}$ es paralelo a la dirección y, apuntando hacia arriba cuando x es positiva y hacia abajo cuando x es negativa. Del mismo modo, cuanto más grande sea $|x|$, más largo será el vector. Los vectores del campo son constantes a lo largo de líneas verticales porque el campo vectorial no depende de y. (Véase Fig. 17.5.)

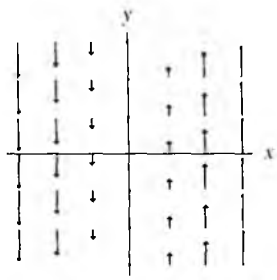


Figura 17.5 El campo vectorial $\vec{F}(x, y) = x\vec{j}$.

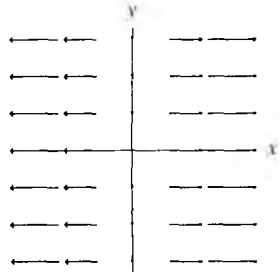


Figura 17.6 El campo vectorial $\vec{F}(x, y) = x\vec{i}$.

b) Éste es similar al ejemplo anterior, excepto que el vector $x\vec{i}$ es paralelo a la dirección x, apuntando a la derecha cuando x es positiva y a la izquierda cuando x es negativa. Otra vez, cuanto más grande sea $|x|$ más largo es el vector, y los vectores son constantes a lo largo de líneas verticales porque el campo vectorial no depende de y. (Véase Fig. 17.6).

Ejemplo 3 Describir el campo vectorial en tres dimensiones dado por $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$, donde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Solución La notación $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ significa que el valor de $\vec{F}$ en el punto (x, y, z) con vector de posición $\vec{r}$ es el vector $\vec{r}$ con su cola en (x, y, z). El campo vectorial, pues, apunta hacia afuera. Véase la figura 17.7. Observe que las longitudes de los vectores se han dibujado a escala, de modo que quepan en el diagrama. Este campo vectorial también se puede escribir como $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Se puede ver que la notación que utiliza $\vec{r}$ es más concisa.

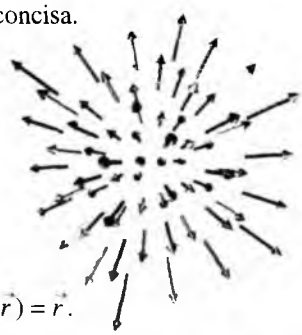


Figura 17.7 El campo vectorial $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$.

Cómo hallar una fórmula para un campo vectorial

Ejemplo 4 La ley de Newton de la gravitación expresa que la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por un objeto de masa M sobre un objeto de masa m es proporcional a M y a m, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La dirección de la fuerza es de m a M a lo largo de la recta que las une. (Véase Fig. 17.8.) Encontrar una fórmula para el campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$ que represente la fuerza gravitacional, suponiendo que M está localizada en el origen y m en el punto con vector de posición $\vec{r}$.



Figura 17.8 Fuerza ejercida sobre la masa m por la masa M.

Solución Como la masa m está localizada en $\vec{r}$, la ley de Newton establece que la magnitud de la fuerza es

$$\| \vec{F}(\vec{r}) \| = \frac{GMm}{\|\vec{r}\|^2},$$

donde G se llama constante de gravitación universal. Un vector unitario en la dirección de la fuerza es $-\vec{r} / \|\vec{r}\|$, donde el signo negativo indica que la dirección de la fuerza es hacia el origen (la gravedad es de atracción). Al tomar el producto de la magnitud de la fuerza y un vector unitario en la dirección de la fuerza, obtenemos una expresión para el campo vectorial de fuerza:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{GMm}{\|\vec{r}\|^2}\left(-\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\right) = \frac{-GMm\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}.$$

Ya hemos visto una imagen de este campo vectorial en la figura 17.2.

Campos vectoriales de gradiente

El gradiente de una función escalar f es una función que asigna un vector a cada punto, y, por lo tanto, es un campo vectorial. Se llama *campo de gradiente de* f. Muchos campos vectoriales en física son campos de gradiente.

Ejemplo 5 Trazar el campo de gradiente de las funciones de las figuras 17.9 a la 17.11.

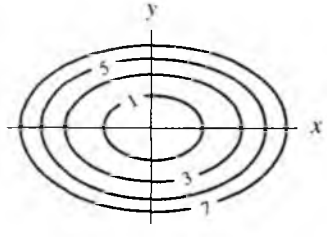


Figura 17.9 El mapa de contorno de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

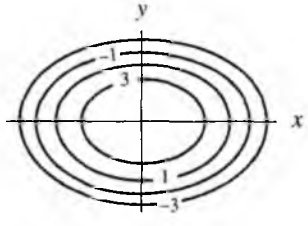


Figura 17.10 El mapa de contorno de $g(x, y) = 5 - x^2 - 2y^2$

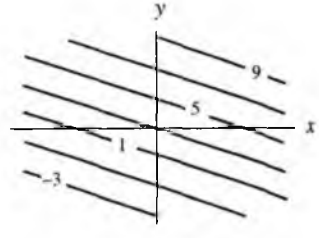


Figura 17.11 El mapa de contorno de $h(x, y) = x + 2y + 3$

Solución Véanse las figuras 17.12 a la 17.14. Para una función $f(x, y)$, el vector gradiente de f en un punto es perpendicular a los contornos en la dirección de f creciente y su magnitud es la rapidez de cambio en esa dirección. La rapidez de cambio es grande cuando los contornos están cercanos entre sí, y pequeña cuando están separados entre sí. Observe que en la figura 17.12 los vectores apuntan todos hacia afuera y se alejan del mínimo local de f, y en la figura 17.13 los vectores de grad g apuntan todos hacia dentro, hacia el máximo local de g. Como h es una función lineal, su gradiente es constante, así que grad h, en la figura 17.14, es un campo vectorial constante.

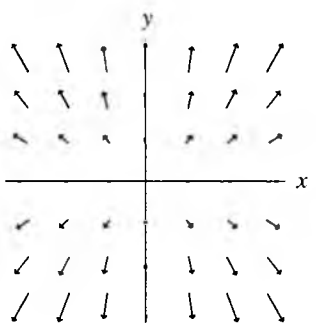


Figura 17.12 grad f

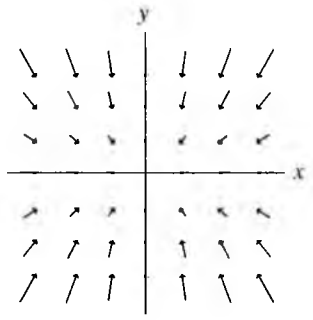


Figura 17.13 grad g

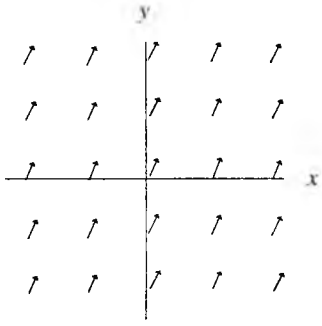


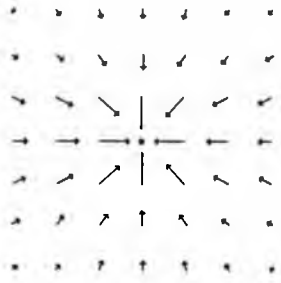
Figura 17.14 grad h

Problemas para la sección 17.1

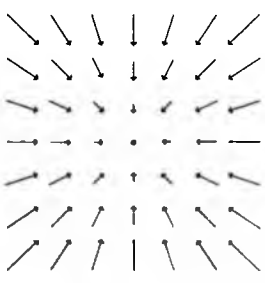
1. Cada campo vectorial de las figuras (I) a la (IV) representa la fuerza sobre una partícula en diferentes puntos en el espacio como resultado de otra partícula en el origen. Relacione los campos vectoriales con las descripciones siguientes.

   a) Una fuerza de repulsión cuya magnitud disminuye conforme aumenta la distancia, tal como entre cargas eléctricas del mismo signo.
   b) Una fuerza de repulsión cuya magnitud aumenta conforme aumenta la distancia.
   c) Una fuerza de atracción cuya magnitud disminuye conforma aumenta la distancia, tal como la gravedad.
   d) Una fuerza de atracción cuya magnitud aumenta conforme aumenta la distancia.

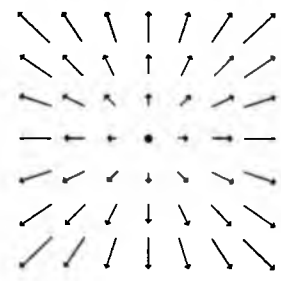
(I)



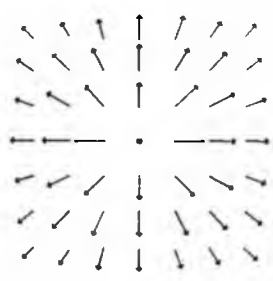
(II)



(III)



(IV)



Trace los campos vectoriales de los problemas del 2 al 7.

2. $\vec{F}(x, y) = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

3. $\vec{F}(x, y) = y\vec{i}$

4. $\vec{F}(x, y) = 2x\vec{i} + x\vec{j}$

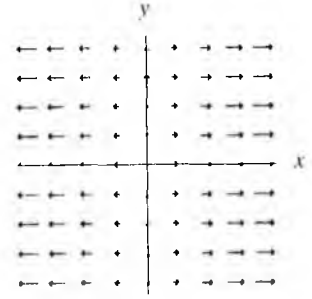
5. $\vec{F}(\vec{r}) = 2\vec{r}$

6. $\vec{F}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$

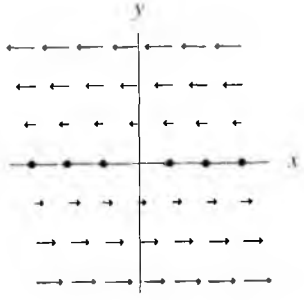
7. $\vec{F}(x, y) = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$

Para los problemas del 8 al 13, encuentre fórmulas para los campos vectoriales (hay muchas respuestas posibles).

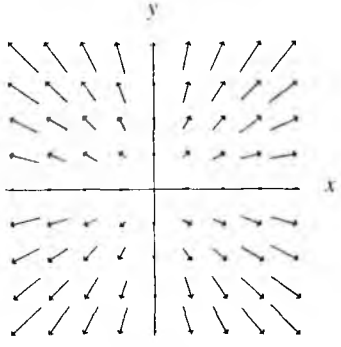
8.



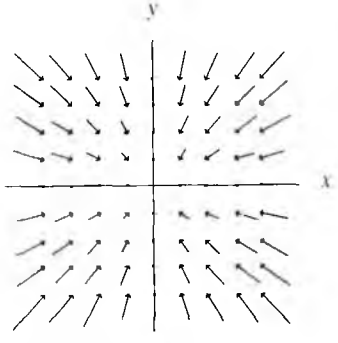
9.



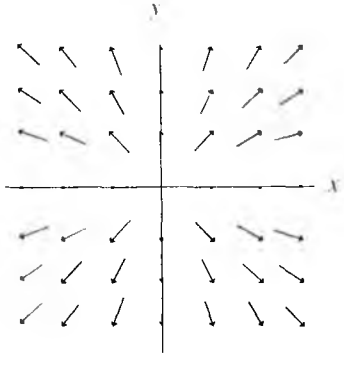
10.



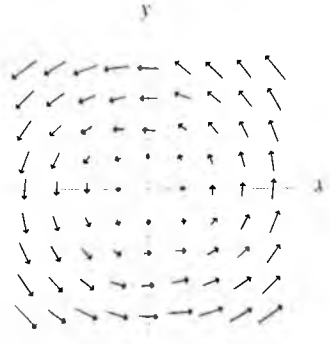
11.



12.



13



14. Las figuras 17.15 y 17.16 muestran el gradiente de las funciones $z = f(x, y)$ y $z = g(x, y)$.
   a) Para cada función, elabore un dibujo aproximado de las curvas de nivel, indicando posibles valores de z.
   b) El plano xz corta cada una de las superficies $z = f(x, y)$ y $z = g(x, y)$ en una curva. Dibuje cada una de estas curvas; deje en claro en qué son semejantes o en qué son diferentes una de otra.

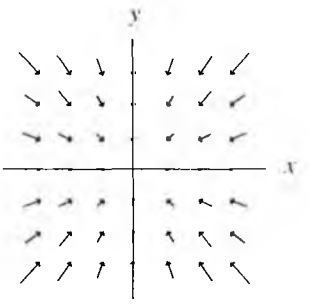


Figura 17.15 Gradiente de $z = f(x, y)$

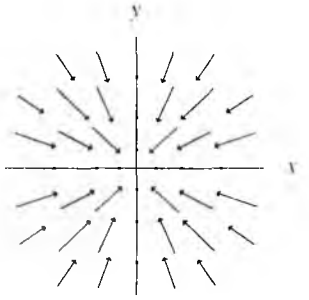


Figura 17.16 Gradiente de $z = g(x, y)$

En los problemas 15, 16 y 17, utilice una computadora para imprimir campos vectoriales con las propiedades dadas. Muestre en la impresión la fórmula utilizada para generarla (existen muchas respuestas posibles).

15. Todos los vectores son paralelos al eje x; todos los vectores sobre una línea vertical tienen la misma magnitud.

16. Todos los vectores apuntan hacia el origen y tienen longitud constante.

17. Todos los vectores son de longitud unitaria y perpendiculares al vector de posición en ese punto.

18. Imagine un río ancho, cuyas aguas avanzan en forma constante, y en medio del cual hay una fuente que lanza agua horizontalmente en todas direcciones.

    a) Suponga que el río avanza en la dirección $\vec{i}$ en el plano xy y que la fuente está en el origen. Explique por qué la expresión

    $$\vec{u} = A\vec{i} + K(x^2 + y^2)^{-1/2}(x\vec{i} + y\vec{j}), \quad A > 0, K > 0$$

    podría representar el campo de velocidad para el flujo combinado del río y la fuente.

    b) ¿Cuál es la importancia de las constantes A y K?

    c) Dibuje con una computadora el campo vectorial $\vec{u}$ para $K = 1$ y $A = 1$ y $A = 2$, y para $A = 0.2$, $K = 2$.

17.2 EL FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL

Cuando se descubre un iceberg en el Atlántico Norte, es importante poder pronosticar en dónde es probable que se localice el iceberg un día o una semana después. Para ello, es necesario conocer el campo vectorial de velocidad de las corrientes oceánicas, es decir, con qué rapidez y en qué dirección el agua avanza en cada punto.

En esta sección utilizamos ecuaciones diferenciales para encontrar la trayectoria de un objeto en un flujo de fluido. Esta trayectoria se llama *línea de flujo*. La figura 17.17 muestra varias líneas de flujo para el campo vectorial de velocidad de la corriente del Golfo, al igual que la figura 17.1 de la página 326. Las flechas de cada línea de flujo indican la dirección del flujo a lo largo de la misma.

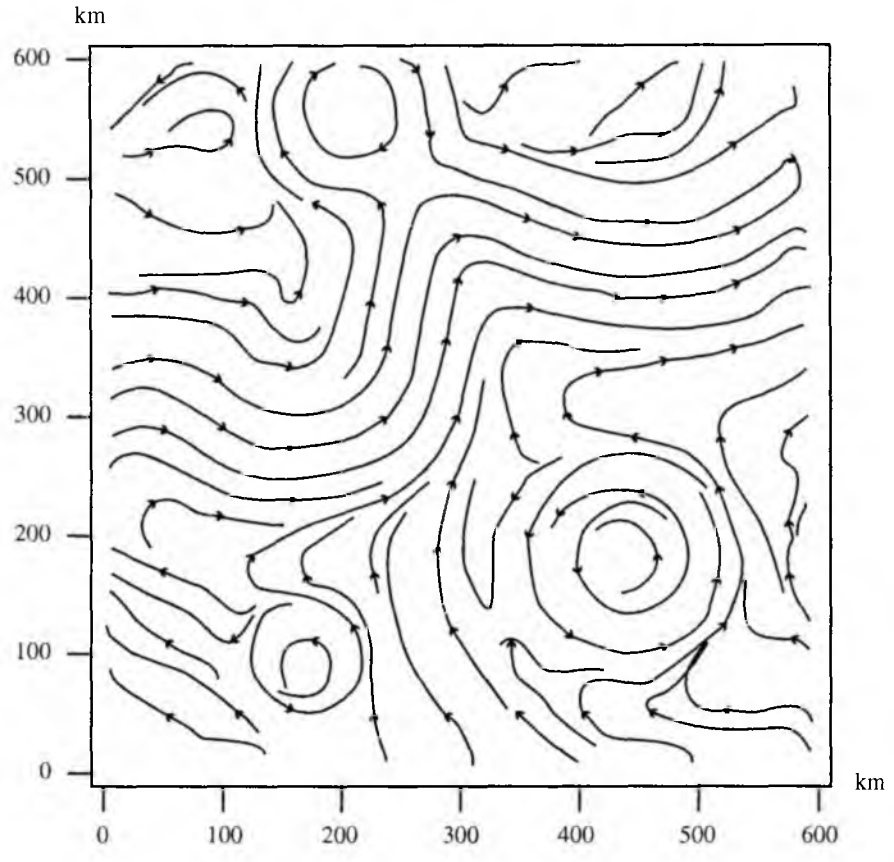


Figura 17.17 Líneas de flujo para objetos en la corriente del Golfo con diferentes puntos de inicio.

¿Cómo se encuentra una línea de flujo?

Supongamos que $\vec{F}$ es el campo vectorial de velocidad del agua en la superficie de un arroyo, e imaginemos una semilla arrastrada por la corriente. Se necesita conocer el vector de posición $\vec{r}(t)$ de la semilla en el tiempo t. Sabemos que

Velocidad de la semilla en el tiempo t = Velocidad de la corriente en la posición de la semilla en el tiempo t

es decir,

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)).$$

Para un campo vectorial arbitrario hacemos la siguiente definición:

Una **línea de flujo** de un campo vectorial $\vec{v} = \vec{F}(\vec{r})$ es una trayectoria, $\vec{r}(t)$, cuyo vector de velocidad es igual a $\vec{v}$. Entonces

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{v} = \vec{F}(\vec{r}(t)).$$

El **flujo** de un campo vectorial es la familia de todas sus líneas de flujo.

Una línea de flujo también recibe el nombre de *curva integral o línea de corriente*. Hemos definido líneas de flujo para cualquier campo vectorial, ya que son útiles para estudiar el flujo de campos (por ejemplo, eléctrico y magnético) que no son campos de velocidad.

Al descomponer $\vec{F}$ y $\vec{r}$ en sus elementos, $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$ y $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, la definición de una línea de flujo indica que $x(t)$ y $y(t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x'(t) = F_1(x(t), y(t)) \quad \text{y} \quad y'(t) = F_2(x(t), y(t)).$$

Al resolver estas ecuaciones diferenciales se obtiene una parametrización de la línea de flujo.

Ejemplo 1 Encontrar la línea de flujo del campo de velocidad constante $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ cm/seg que pasa por el punto (1, 2) en el instante $t = 0$.

Solución Sea $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ la posición en cm de una partícula en el tiempo t, donde t está en segundos. Tenemos

$$x'(t) = 3 \quad \text{y} \quad y'(t) = 4.$$

Entonces,

$$x(t) = 3t + x_0 \quad \text{y} \quad y(t) = 4t + y_0.$$

Como la trayectoria pasa por el punto (1, 2) en $t = 0$, tenemos $x_0 = 1$ y $y_0 = 2$ y por lo tanto

$$y(t) = 3t + 1 \quad \text{y} \quad y(t) = 4t + 2.$$

Por lo tanto, la trayectoria es la línea dada paramétricamente por

$$\vec{r}(t) = (3t + 1)\vec{i} + (4t + 2)\vec{j}.$$

(Véase Fig. 17.18). Para encontrar una ecuación explícita para la trayectoria, se elimina t entre estas expresiones para obtener

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} \qquad \text{o} \qquad y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}.$$

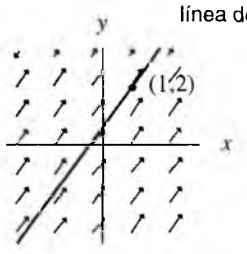


Figura 17.18 Campo vectorial $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ con la línea de flujo a través de (1, 2).

Ejemplo 2 La velocidad de un flujo en el punto (x, y) es $\vec{F}(x, y) = \vec{i} + x\vec{j}$. Encontrar la trayectoria de movimiento de un objeto arrastrado por el flujo si está situado en el punto (–2, 2) en el tiempo $t = 0$.

Solución La figura 17.19 muestra un diagrama de este campo. Puesto que $\vec{F}(x, y) = \vec{i}$, estamos buscando la línea de flujo que satisfaga el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = x(t)$$

Al despejar $x(t)$ primero, obtenemos $x(t) = t + x_0$, donde x_0 es una constante de integración. Por lo tanto, $y'(t) = t + x_0$, así que $y(t) = \frac{1}{2}t^2 + x_0t + y_0$, donde y_0 es también una constante de integración. Como $x(0) = x_0 = -2$ y $y(0) = y_0 = 2$, la trayectoria de movimiento está dada por

$$x(t) = t - 2, \quad y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 2,$$

o, lo que es lo mismo,

$$\vec{r}(t) = (t - 2)\vec{i} + (\tfrac{1}{2}t^2 - 2t + 2)\vec{j}.$$

La gráfica de esta línea de flujo en la figura 17.20 parece una parábola. Esto se comprueba al ver que una ecuación explícita para la trayectoria es $y = \frac{1}{2}x^2$.

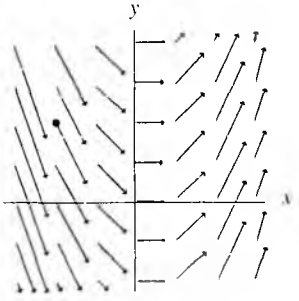


Figura 17.19 El campo vectorial $\vec{v} = \vec{i} + x\vec{j}$

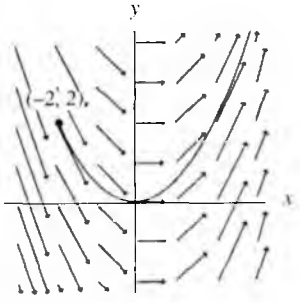


Figura 17.20 Una línea de flujo del campo de velocidad $\vec{v} = \vec{i} + x\vec{j}$

Ejemplo 3 Determinar el flujo del campo vectorial $\vec{v} = \vec{i} + x\vec{j}$.

Solución La figura 17.21 sugiere que el flujo está formado por círculos concéntricos en sentido contrario al de las manecillas del reloj, centrados en el origen. El sistema de ecuaciones diferenciales para el flujo es

$$x'(t) = -y(t) \qquad y'(t) = x(t).$$

Las ecuaciones $(x(t), y(t)) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t)$ parametrizan una familia de círculos en sentido contrario al de las manecillas del reloj, de radio a, centrados en el origen. Comprobamos que esta familia satisface el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x'(t) = -a \operatorname{sen} t = -y(t) \quad \text{y} \quad y'(t) = a \cos t = x(t).$$

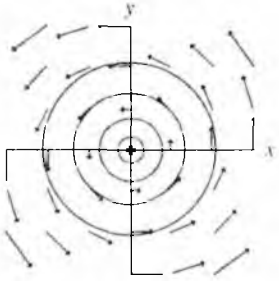


Figura 17.21 El flujo del campo vectorial $\vec{v} = \vec{i} + x\vec{j}$

Búsqueda numérica de líneas de flujo

Con frecuencia no es posible encontrar fórmulas para las líneas de flujo de un campo vectorial. Sin embargo, pueden aproximarse numéricamente por el método de Euler para la solución de ecuaciones diferenciales. Como las líneas de flujo $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ de un campo vectorial $\vec{v} = \vec{F}(x, y)$ satisfacen la ecuación diferencial $\vec{r}'(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$, tenemos

$$\begin{aligned}\vec{r}(t + \Delta t) &\approx \vec{r}(t) + (\Delta t)\,\vec{r}'(t)\\ &= \vec{r}(t) + (\Delta t)\vec{F}(\vec{r}(t)) \quad \text{para } \Delta t \text{ cerca de 0.}\end{aligned}$$

Para aproximar una línea de flujo, comenzamos en el punto $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$ y estimamos la posición $\vec{r}_1$ de una partícula tras un instante Δt:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 = \vec{r}(\Delta t) &\approx \vec{r}(0) + (\Delta t)\,\vec{F}(\vec{r}(0))\\ &= \vec{r}_0 + (\Delta t)\,\vec{F}(\vec{r}_0).\end{aligned}$$

Luego repetimos el mismo procedimiento comenzando en $\vec{r}_1$, y así sucesivamente. La fórmula general para pasar de un punto al siguiente es

$$\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + (\Delta t)\vec{F}(\vec{r}_n).$$

Los puntos con vectores de posición $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$,... dibujan la trayectoria, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4 Utilizar el método de Euler para aproximar la línea de flujo que pasa por (1, 2) para el campo vectorial $\vec{v} = y^2\vec{i} + 2x^2\vec{j}$.

Solución El flujo está determinado por las ecuaciones diferenciales $\vec{r}'(t) = \vec{v}$, o lo que es lo mismo,

$$x'(t) = y^2, \qquad y'(t) = 2x^2.$$

Utilizamos el método de Euler con $\Delta t = 0.02$, resultando

$$\begin{aligned}\vec{r}_{n+1} &= \vec{r}_n + 0.02\vec{v}(x_n, y_n)\\ &= x_n\vec{i} + y_n\vec{j} + 0.02(y_n^2\vec{i} + 2x_n^2\vec{j})\end{aligned}$$

o, de manera equivalente,

$$x_{n+1} = x_n + 0.02y_n^2, \qquad y_{n+1} = y_n + 0.02 \cdot 2x_n^2.$$

Cuando $t = 0$, tenemos $(x_0, y_0) = (1, 2)$. Entonces

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + 0.02 \cdot y_0^2 = 1 + 0.02 \cdot 2^2 = 1.08,\\ y_1 &= y_0 + 0.02 \cdot 2x_0^2 = 2 + 0.02 \cdot 2 \cdot 1^2 = 2.04.\end{aligned}$$

Por lo tanto, después de un paso $x(0.02) \approx 1.08$ y $y(0.02) \approx 2.04$. De igual manera, $x(0.04) = x(2\Delta t) \approx 1.16$, $y(0.04) = y(2\Delta t) \approx 2.08$ y así sucesivamente. Más valores a lo largo de la línea de flujo aparecen en la tabla 17.2 y se grafican en la figura 17.22.

TABLA 17.2 *La línea de flujo aproximada para el campo vectorial* $\vec{v} = y^2\vec{i} + 2x^2\vec{j}$ *iniciando en el punto* (1, 2)

t	0	.02	.04	.06	.08	.1	.12	.14	.16	.18
x	1	1.08	1.16	1.25	1.34	1.44	1.54	1.65	1.77	1.90
y	2	2.04	2.08	2.14	2.20	2.28	2.36	2.45	2.56	2.69

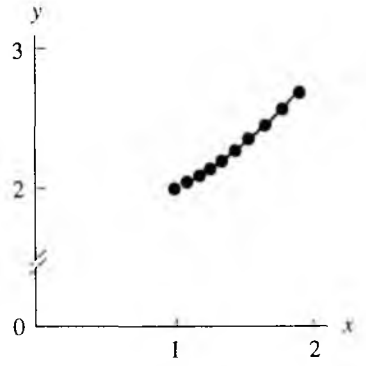


Figura 17.22 Solución por el método de Euler a $x' = y^2$, $y' = 2x^2$.

Problemas para la sección 17.2

Para los problemas 1, 2 y 3, dibuje el campo vectorial y su flujo.

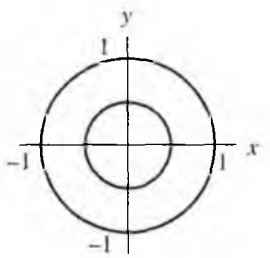
1. $\vec{v} = 3\vec{i}$
2. $\vec{v} = 2\vec{j}$
3. $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$

Para los problemas del 4 al 7, dibuje el campo vectorial y el flujo. Luego encuentre el sistema de ecuaciones diferenciales asociado con el campo vectorial, y verifique que el flujo satisfaga el sistema.

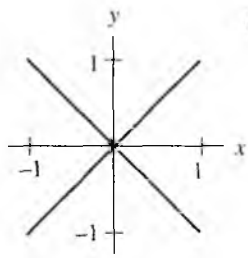
4. $\vec{v} = y\vec{i} + x\vec{j}$; $x(t) = a(e^t + e^{-t})$, $y(t) = a(e^t - e^{-t})$.
5. $\vec{v} = y\vec{i} - x\vec{j}$; $x(t) = a \operatorname{sen} t$, $y(t) = a \cos t$.
6. $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$; $x(t) = ae^t$, $y(t) = be^t$.
7. $\vec{v} = x\vec{i} - y\vec{j}$; $x(t) = ae^t$, $y(t) = be^{-t}$.
8. Utilice una computadora o una calculadora con el método de Euler para aproximar la línea de flujo que pasa por (1, 2), para el campo vectorial $\vec{v} = y^2\vec{i} + 2x^2\vec{j}$ usando 5 pasos con un intervalo $\Delta t = 0.1$.
9. Relacione los siguientes campos vectoriales con sus líneas de flujo. Ponga flechas en las líneas de flujo que indiquen la dirección del flujo.

   a) $y\vec{i} + x\vec{j}$
   b) $-y\vec{i} + x\vec{j}$
   c) $x\vec{i} + y\vec{j}$
   d) $-y\vec{i} + (x + y/10)\vec{j}$
   e) $-y\vec{i} + (x - y/10)\vec{j}$
   f) $(x - y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$

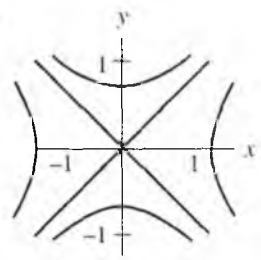
(I)



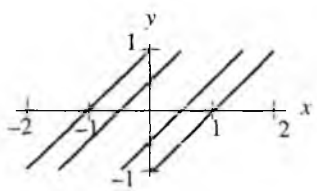
(II)



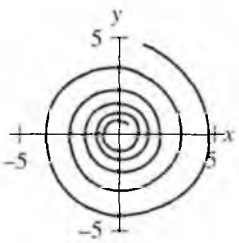
(III)



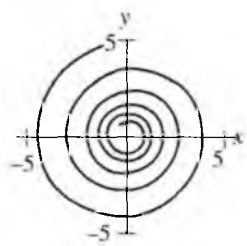
(IV)



(V)



(VI)



10. Tenemos un conjunto fijo de ejes y una bola metálica sólida cuyo centro está en el origen. La bola gira una vez cada 24 horas alrededor del eje z. La dirección de rotación es en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando la ve desde arriba. Considere el punto (x, y, z) en nuestro sistema de coordenadas situado dentro de la bola. Sea $\vec{v}(x, y, z)$ el vector de velocidad de la partícula de metal en este punto. Suponga que x, y, z están en metros y el tiempo en horas.

    a) Encuentre una fórmula para el campo vectorial $\vec{v}$. Dé unidades para su respuesta.
    b) Describa verbalmente las líneas de flujo de $\vec{v}$.

PROBLEMAS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO DIECISIETE

1. a) ¿Qué quiere decirse con "campo vectorial"?
    b) Suponga que $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ es un vector constante. ¿Cuáles, de los siguientes, son campos vectoriales? Explique.

    i) $\vec{r} + \vec{a}$ ii) $\vec{r} \cdot \vec{a}$
    iii) $x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ iv) $x^2 + y^2 + z^2$

Dibuje los campos vectoriales de los problemas 2, 3 y 4.

$$\vec{F} = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)\vec{i} - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)\vec{j}$$

5. Si $\vec{F} = \vec{r}/\|\vec{r}\|^3$, encuentre las siguientes cantidades en términos de x, y, z o t.
    a) $\|\vec{F}\|$
    b) $\vec{F} \cdot \vec{r}$
    c) Un vector unitario paralelo a $\vec{F}$ y que apunta en la misma dirección.
    d) Un vector unitario paralelo a $\vec{F}$ y que apunta en la dirección opuesta.

e) $\vec{F}$ si $\vec{r} = \cos t\vec{i} + \operatorname{sen} t\vec{j} + k\vec{t}$

f) $\vec{F} \cdot \vec{r}$ si $\vec{r} = \cos t\vec{i} + \operatorname{sen} t\vec{j} + \vec{k}$

Para los problemas del 6 al 9, encuentre la región del campo de velocidad de la corriente del Golfo de la figura 17.23 representada por la tabla dada de vectores de velocidad (en cm/s).

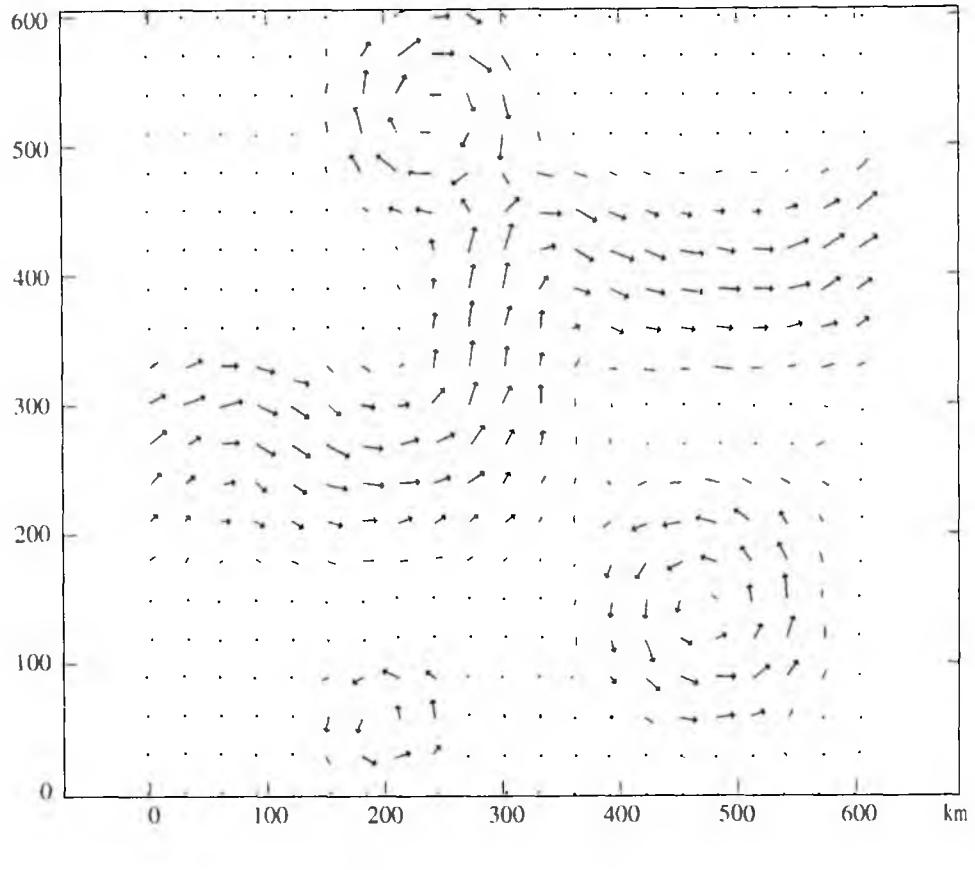


Figura 17.23 El campo de velocidad de la corriente del Golfo.

6.

$35\vec{i} + 131\vec{j}$	$48\vec{i} + 92\vec{j}$	$47\vec{i} + \vec{j}$
$-32\vec{i} + 132\vec{j}$	$-44\vec{i} + 92\vec{j}$	$-42\vec{i} + \vec{j}$
$-51\vec{i} + 73\vec{j}$	$-119\vec{i} + 84\vec{j}$	$-128\vec{i} + 6\vec{j}$

7.

$10\vec{i} - 3\vec{j}$	$11\vec{i} + 16\vec{j}$	$20\vec{i} + 75\vec{j}$
$53\vec{i} - 7\vec{j}$	$58\vec{i} + 23\vec{j}$	$64\vec{i} + 80\vec{j}$
$119\vec{i} - 8\vec{j}$	$121\vec{i} + 31\vec{j}$	$114\vec{i} + 66\vec{j}$

8.

$97\vec{i} - 41\vec{j}$	$72\vec{i} - 24\vec{j}$	$54\vec{i} - 10\vec{j}$
$134\vec{i} - 49\vec{j}$	$131\vec{i} - 44\vec{j}$	$129\vec{i} - 18\vec{j}$
$103\vec{i} + 36\vec{j}$	$122\vec{i} - 30\vec{j}$	$131\vec{i} - 17\vec{j}$

9.

$-95\vec{i} - 60\vec{j}$	$18\vec{i} - 48\vec{j}$	$82\vec{i} - 22\vec{j}$
$-29\vec{i} + 48\vec{j}$	$76\vec{i} + 63\vec{j}$	$128\vec{i} - 16\vec{j}$
$26\vec{i} + 105\vec{j}$	$49\vec{i} + 119\vec{j}$	$88\vec{i} + 13\vec{j}$

10. Cada uno de los siguientes campos vectoriales representa una corriente oceánica. Dibuje el campo vectorial, y también la trayectoria de un iceberg en esta corriente. Determine la ubicación de un iceberg en el tiempo $t = 7$ si está en el punto $(1, 3)$ en el tiempo $t = 0$.
    a) La corriente en todas partes es $\vec{i}$.
    b) La corriente en (x, y) es $2x\vec{i} + y\vec{j}$.
    c) La corriente en (x, y) es $-y\vec{i} + x\vec{j}$.

Supongamos que $q_1, \ldots, q_n$ son cargas eléctricas en puntos con vectores de posición $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$. Los problemas 11 y 12 utilizan la ley de Coulomb, según la cual en el punto con vector de posición $\vec{r}$, el campo eléctrico resultante $\vec{E}$ está dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3}.$$

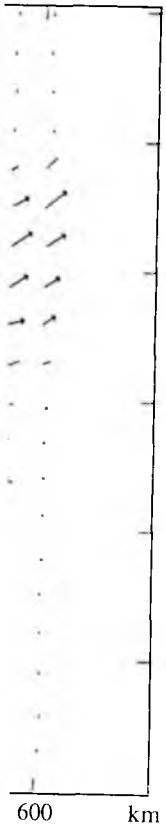
11. Una configuración de carga con sólo dos cargas q_1 y q_2 en tres dimensiones se llama *dipolo eléctrico*. Suponga que $\vec{r}_1 = \vec{i}$ y $\vec{r}_2 = -\vec{i}$.
    a) Si $q_1 = q$ y $q_2 = -q$, utilice una computadora para dibujar el campo vectorial $\vec{E}$ en el plano xy producido por estas dos cargas opuestas.
    b) Si $q_1 = q_2 = q$, dibuje el campo vectorial $\vec{E}$ en el plano xy producido por estas dos cargas iguales.

12. Un *dipolo eléctrico ideal* puede ser considerado como un dipolo infinitesimal; su magnitud y dirección están dadas por su vector de momento dipolar $\vec{p}$. El campo eléctrico resultante $\vec{D}$ en el punto con vector de posición $\vec{r}$ está dado por

$$\vec{D}(\vec{r}) = 3\frac{(\vec{r} \cdot \vec{p})\,\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5} - \frac{\vec{p}}{\|\vec{r}\|^3}.$$

    Suponga que $\vec{p} = p\vec{i}$, de modo que el dipolo apunta en la dirección $\vec{i}$ y tiene magnitud p.
    a) Utilice una computadora para trazar el campo vectorial $\vec{D}$ en el plano xy para tres valores diferentes de p.
    b) El campo $\vec{D}$ es una aproximación del campo eléctrico $\vec{E}$ producido por dos cargas opuestas, q en $\vec{r}_2$ y $-q$ en $\vec{r}_1$, cuando la distancia $\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$ es pequeña. El momento dipolar de esta configuración de cargas está definido como $\vec{p} = q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$. Suponga que $\vec{r}_2 = (\ell/2)\vec{i}$ y $\vec{r}_1 = (\ell/2)\vec{i}$, de modo que $\vec{p} = q\ell\vec{i}$.
        i) Grafique el campo vectorial $\vec{E}$ usando los mismos valores de $p = q\ell$ que se usaron para graficar $\vec{D}$.
        ii) ¿Dónde es el campo vectorial $\vec{D}$ una buena aproximación a $\vec{E}$? ¿dónde es una mala aproximación?
        iii) La magnitud de cada término de la expresión para $\vec{E}$ decae como $1/\|\vec{r}\|^2$, en tanto que la magnitud de $\vec{D}$ decae como $1/\|\vec{r}\|^3$. Si se supone que el campo vectorial $\vec{D}$ es una buena aproximación a $\vec{E}$ cuando la distancia $\|\vec{r}\|$ desde el origen es grande, sugiera una razón para esta discrepancia aparente.

riente del Golfo de la



$20\vec{i} + 75\vec{j}$
$64\vec{i} + 80\vec{j}$
$114\vec{i} + 66\vec{j}$

$82\vec{i} - 22\vec{j}$
$128\vec{i} - 16\vec{j}$
$88\vec{i} + 13\vec{j}$

CAPÍTULO DIECIOCHO

INTEGRALES DE LÍNEA

Cuando una fuerza constante, $\vec{F}$, actúa sobre un objeto mientras éste sufre un desplazamiento, $\vec{d}$, el trabajo realizado por la fuerza es el producto punto $\vec{F} \cdot \vec{d}$. ¿Qué pasa si el objeto avanza a lo largo de una trayectoria curva en un campo de fuerza variable? En este capítulo definimos una *integral de línea* que calcula el trabajo en esta situación. También definimos la *circulación*, que se emplea para medir la fuerza de los vórtices en un flujo.

Las integrales de línea constituyen una analogía del teorema fundamental del cálculo, que nos indica cómo recobrar una función a partir de su derivada. El análogo para la integral de línea del teorema fundamental, muestra la forma en que una integral de línea puede usarse para recuperar una función de varias variables de su campo de gradiente.

A diferencia del caso de una variable, no todos los campos vectoriales son campos de gradiente. La integral de línea también puede utilizarse para distinguir los que sí lo son, aplicando el concepto de un *campo vectorial independiente de la trayectoria* (o *conservativo*). Aquí se estudian campos independientes de la trayectoria, que son de gran importancia en física, y se termina con el teorema de Green.

18.1 LA IDEA DE UNA INTEGRAL DE LÍNEA

Imaginemos que una persona rema en un río donde hay una corriente perceptible; a veces la persona puede remar contra la corriente y otras a favor de ésta. Al final del recorrido queda la impresión de que la corriente ayudó o fue un obstáculo. La integral de línea, definida en esta sección, mide la magnitud en la que una curva en un campo vectorial está, en general, moviéndose con el campo vectorial o contra éste.

Orientación de una curva

Una curva puede recorrerse en dos direcciones, como se muestra en la figura 18.1. Es necesario seleccionar una dirección antes de que pueda definirse una integral de línea.

> Se dice que una curva está **orientada** si se ha escogido una dirección de movimiento en ella.

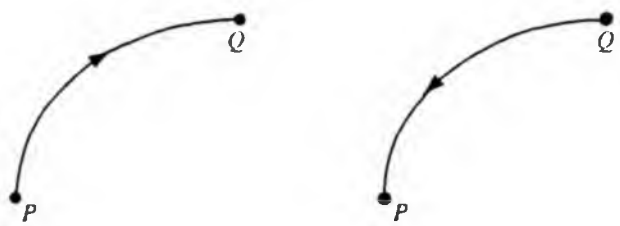


Figura 18.1 Una curva con dos orientaciones diferentes representadas por puntas de flecha.

Definición de la integral de línea

Considere un campo vectorial $\vec{F}$ y una curva orientada C. Comenzamos por dividir C en n partes pequeñas, casi rectas; a lo largo de cada una de ellas $\vec{F}$ es aproximadamente constante. Cada parte puede estar representada por un vector de desplazamiento $\Delta \vec{r}_i = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i$ y el valor de $\vec{F}$ en cada punto de este pequeño tramo de C es aproximadamente $\vec{F}(\vec{r}_i)$. Véanse las figuras 18.2 y 18.3.

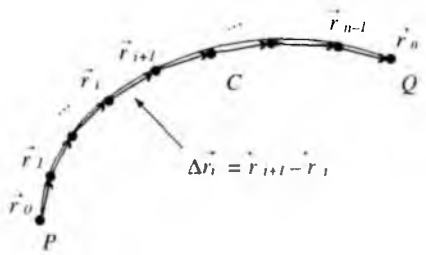


Figura 18.2 La curva C, orientada de P a Q, aproximada por segmentos de línea recta representados por vectores de desplazamiento $\Delta \vec{r}_i = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i$.

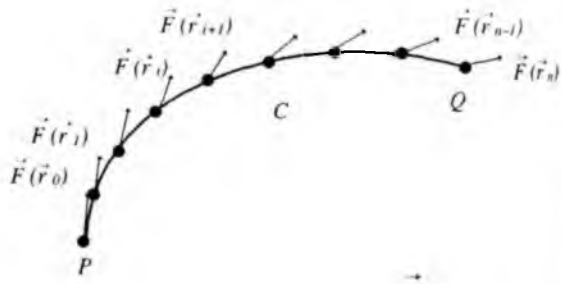


Figura 18.3 El campo vectorial $\vec{F}$ evaluado en los puntos con vector de posición $\vec{r}_i$ en la curva C orientada de P a Q.

Por cada punto con vector de posición $\vec{r}_i$ de C, formamos el producto punto $\vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i$. Al sumar todas las partes obtenemos una suma de Riemann:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i.$$

Definimos la integral de línea, escrita $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, tomando el límite conforme $\|\Delta\vec{r}_i\| \to 0$. Siempre que exista el límite, decimos

La **integral de línea** de un campo vectorial $\vec{F}$ a lo largo de una curva orientada C es

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{\|\Delta\vec{r}_i\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i.$$

¿Cómo funciona el límite que define una integral de línea?

El límite de la definición de una integral de línea existe si $\vec{F}$ es continua en la curva C y si C se forma al unir extremo con extremo un número finito de curvas suaves, es decir, curvas que se puedan parametrizar por funciones lisas. Puede utilizarse la parametrización para subdividir una curva lisa al subdividir el intervalo de parámetro en la misma forma que para integrales ordinarias de una variable. La parametrización debe recorrer la curva de un extremo al otro, en la dirección de avance, sin repasar ningún tramo. En estas condiciones, la integral de línea es independiente de la forma en que se hagan las subdivisiones. Todas las curvas que se consideran en este libro son *lisas por partes* en este sentido. La sección 18.2 muestra la forma de utilizar una parametrización para calcular una integral de línea.

Ejemplo 1 Encontrar la integral de línea del campo vectorial constante $\vec{F} = \vec{i} + 2\vec{j}$ a lo largo de la trayectoria de (1, 1) a (10, 10) que se muestra en la figura 18.4.

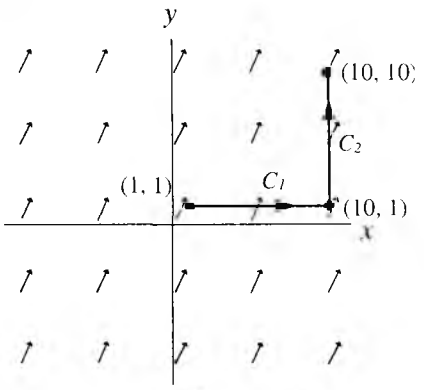


Figura 18.4 El campo vectorial constante $\vec{F} = \vec{i} + 2\vec{j}$ y la trayectoria de (1, 1) a (10, 10).

Solución Sea C_1 el segmento horizontal de la trayectoria que va de (1, 1) a (10, 1). Cuando se divide esta trayectoria en partes, cada parte $\Delta\vec{r}$ es horizontal, de modo que $\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i}$ y $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = (\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot \Delta x\vec{i} = \Delta x$. Por lo tanto,

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x=1}^{x=10} dx = 9.$$

De la misma manera, a lo largo del segmento vertical C_2, tenemos $\Delta\vec{r} = \Delta y\vec{j}$ y $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = (\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot \Delta y\vec{j} = 2\Delta y$, así que

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{y=1}^{y=10} 2dy = 18.$$

Entonces,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 9 + 18 = 27.$$

¿Qué nos dice la integral de línea?

Recuerde que para cualesquier dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el producto punto $\vec{u} \cdot \vec{v}$ es positivo si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ apuntan aproximadamente en la misma dirección (es decir, si el ángulo entre ellos es menor de $\pi/2$). El producto punto es cero si $\vec{u}$ es perpendicular a $\vec{v}$ y es negativo si apuntan aproximadamente en direcciones opuestas (es decir, si el ángulo entre ellos es mayor de $\pi/2$).

La integral de línea de $\vec{F}$ suma a los productos punto de $\vec{F}$ y $\Delta\vec{r}$ a lo largo de la trayectoria. Si $\|\vec{F}\|$ es constante, la integral de línea resulta en un número positivo si $\vec{F}$ está apuntando casi siempre en la dirección de $\Delta\vec{r}$ y un número negativo si $\vec{F}$ mayormente apunta en dirección opuesta. La integral de línea es cero si $\vec{F}$ es perpendicular a la trayectoria en todos los puntos, o si las contribuciones positivas y negativas se cancelan. En general, la integral de línea de un campo vectorial $\vec{F}$ a lo largo de una curva C mide hasta qué punto C va con $\vec{F}$ o contra éste.

Ejemplo 2 En la figura 18.5 se muestran el campo vectorial $\vec{F}$ y las curvas orientadas C_1, C_2, C_3 y C_4. Las curvas C_1 y C_3 son de la misma longitud. ¿Cuáles, de las integrales de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para $i = 1, 2, 3, 4$, son positivas? ¿Cuáles son negativas? Ordene estas integrales de línea en orden ascendente.

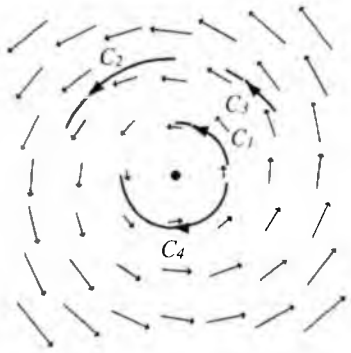


Figura 18.5 Campo vectorial y trayectorias C_1, C_2, C_3, C_4.

Solución El campo vectorial $\vec{F}$ y los segmentos de línea $\Delta\vec{r}$ son aproximadamente paralelos y en la misma dirección para las curvas C_1, C_2 y C_3. Por esto las contribuciones de cada término $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ son positivas para estas curvas. En consecuencia, $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ y $\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ son positivas. Para la curva C_4, el campo vectorial y los segmentos de línea están en drecciones opuestas, así que cada término $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ es negativo y por lo tanto la integral $\int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es negativa.

Como la magnitud del campo vectorial es más pequeña a lo largo de C_1 que a lo largo de C_3, y estas curvas tienen la misma longitud, tenemos

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} < \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Además, la magnitud del campo vectorial es la misma a lo largo de C_2 y C_3, pero la curva C_2 es más larga que en la curva C_3. Entonces,

$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} < \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Al reunir estos resultados con el hecho de que $\int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es negativa, tenemos

$$\int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} < \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} < \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} < \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Interpretaciones de la integral de línea

Trabajo

Recuerde, de la sección 12.3, que si una fuerza constante $\vec{F}$ actúa sobre un objeto cuando éste se mueve a lo largo de una línea recta en un desplazamiento $\vec{d}$, el trabajo realizado por la fuerza sobre el objeto es

$$\text{Trabajo realizado} = \vec{F} \cdot \vec{d}.$$

Ahora, supongamos que deseamos encontrar el trabajo realizado por la gravedad sobre un objeto que se desplaza muy arriba de la superficie de la Tierra. Como la fuerza de la gravedad varía con la distancia desde la Tierra y la trayectoria puede no ser recta, no puede usarse la fórmula $\vec{F} \cdot \vec{d}$. Se aproxima la trayectoria mediante segmentos de recta lo bastante pequeños para que la fuerza sea aproximadamente constante en cada uno. Supongamos que la fuerza en un punto con vector de posición $\vec{r}$ es $\vec{F}(\vec{r})$, como en las figuras 18.2 y 18.3. Entonces

$$\begin{array}{l}\text{Trabajo realizado por la fuerza } \vec{F}(\vec{r}_i) \\ \text{durante un pequeño desplazamiento } \Delta\vec{r}_i\end{array} \approx \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i,$$

de donde se sigue que,

$$\begin{array}{l}\text{Trabajo total realizado por la fuerza} \\ \text{a lo largo de una curva orientada } C.\end{array} \approx \sum_i \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i$$

Al tomar el límite conforme $\|\Delta\vec{r}_i\| \to 0$, obtenemos

$$\begin{array}{l}\text{Trabajo realizado por una fuerza } \vec{F}(\vec{r}) \\ \text{a lo largo de una curva } C.\end{array} \approx \lim_{\|\Delta\vec{r}\| \to 0} \sum_i \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ejemplo 3 Una masa que se encuentra sobre una mesa plana está fija a un resorte cuyo otro extremo está sujeto a la pared (véase Fig. 18.6). El resorte se extiende 20 cm más allá de su posición de reposo y se suelta. Si los ejes son como se muestran en la figura 18.6, cuando el resorte se estira una distancia x, la fuerza ejercida por el resorte sobre la masa está dada por

$$\vec{F}(x) = -kx\vec{i}$$

donde k es una constante positiva que depende de la rigidez del resorte.

Supongamos que la masa regresa a su posición de reposo. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza ejercida por el resorte?

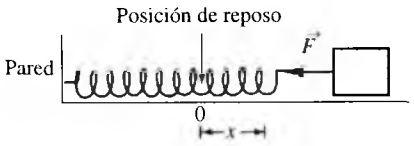


Figura 18.6 Fuerza sobre una masa debida a un resorte extendido.

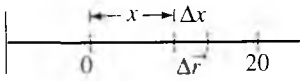


Figura 18.7 División del intervalo $0 \le x \le 20$ para calcular el trabajo realizado.

Solución La trayectoria de $x = 20$ a $x = 0$ se divide como se muestra en la figura 18.78, con un segmento típico representado por

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i}$$

Como nos movemos de $x = 20$ a $x = 0$, la cantidad Δx será negativa. El trabajo realizado por la fuerza a medida que la masa avanza por este segmento se aproxima mediante

$$\text{Trabajo realizado} \approx \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = (-kx\vec{i}) \cdot (\Delta x \vec{i}) = -kx\,\Delta x .$$

Entonces tenemos

$$\text{Trabajo total realizado} \approx \sum -kx\,\Delta x.$$

En el límite, a medida que $\|\Delta x\| \to 0$, esta suma se convierte en una integral definida ordinaria. Como la trayectoria empieza en $x = 20$, éste es el límite inferior de integración; $x = 0$ es el límite superior. Entonces resulta

$$\text{Trabajo total realizado} \int_{x=20}^{x=0} -kx\,dx = -\frac{kx^2}{2}\Big|_{20}^{0} = \frac{k(20)^2}{2} = 200\,k.$$

Observe que el trabajo realizado es positivo, puesto que la fuerza actúa en la dirección del movimiento.

El ejemplo 3 muestra cómo una integral de línea sobre una trayectoria paralela al eje x se reduce a una integral de una variable. La sección 18.2 indica la forma de convertir *cualquier* integral de línea en una integral de una variable.

Ejemplo 4 Una partícula con vector de posición $\vec{r}$ está sometida a una fuerza, $\vec{F}$, debida a la gravedad. ¿Cuál es el *signo* del trabajo realizado por $\vec{F}$ a medida que la partícula se desplaza a lo largo de la trayectoria C_1, que es una línea radial que pasa por el centro de la Tierra, que comienza a 8000 km del centro y termina a 10 000 km del centro? (véase Fig. 18.8)

Solución Dividimos la trayectoria en pequeños segmentos radiales, $\Delta \vec{r}$, que apuntan alejándose del centro de la Tierra y en forma paralela a la fuerza gravitacional. Los vectores $\vec{F}$ y $\Delta \vec{r}$ apuntan en direcciones opuestas, de modo que cada término $\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$ es negativo. Si se suman todas estas cantidades negativas y se toma el límite resulta un valor negativo para el trabajo total. Entonces, el trabajo realizado por la gravedad es negativo. El signo negativo indica que tendríamos que realizar trabajo *contra* la gravedad para desplazar la partícula a lo largo de la trayectoria C_1.

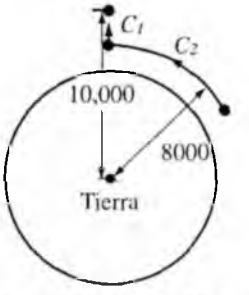


Figura 18.8 La Tierra.

Ejemplo 5 Encontrar el signo del trabajo realizado por la gravedad a lo largo de la curva C_1 del ejemplo 4, pero con orientación opuesta.

Solución Si se traza una curva en la dirección opuesta, cambia el signo de la integral de línea porque todos los segmentos $\Delta\vec{r}$ cambian dirección, y por lo tanto cada uno de los término $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ cambia de signo. Entonces, el resultado será el negativo de la respuesta encontrada en el ejemplo 4. Por lo tanto, el trabajo realizado por la gravedad a medida que una partícula se mueve a lo largo de C_1 hacia el centro de la Tierra es positivo.

Ejemplo 6 Encontrar el trabajo realizado por la gravedad a medida que una partícula se mueve a lo largo de C_2, que es un arco de círculo de 8000 km de largo a una distancia de 8000 km del centro de la Tierra (véase Fig. 18.8).

Solución Como C_2 es en todas partes perpendicular a la fuerza gravitacional, $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = 0$ para toda $\Delta\vec{r}$ a lo largo de C_2. Entonces,

$$\text{Trabajo realizado} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0,$$

así que el trabajo realizado es cero. Esto explica por qué los satélites permanecen en órbita sin gastar combustible alguno cuando alcanzan la altitud y velocidad correctas.

Circulación

El campo vectorial de velocidad para la corriente del Golfo, de la página 338, muestra remolinos o regiones característicos donde circula el agua. Esta circulación puede medirse mediante una *curva cerrada,* es decir, una que comienza y termina en el mismo punto.

> Si C es una curva cerrada orientada, la integral de línea de un campo vectorial $\vec{F}$ alrededor de C se llama **circulación** de $\vec{F}$ alrededor de C.

La circulación es una medida de la tendencia neta del campo vectorial para apuntar alrededor de la curva C. Para destacar que la curva C es cerrada, la circulación se denota a veces como $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, con un pequeño círculo en el signo de la integral.

Ejemplo 7 Describir la rotación de los campos vectoriales de las figuras 18.9 y 18.10. Encontrar el signo de la circulación de los campos vectoriales alrededor de las trayectorias indicadas.

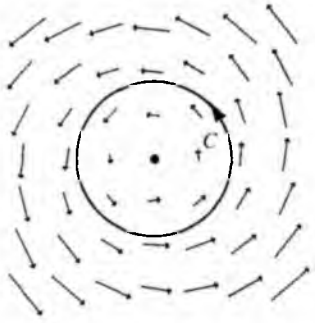


Figura 18.9 Un flujo circulante.

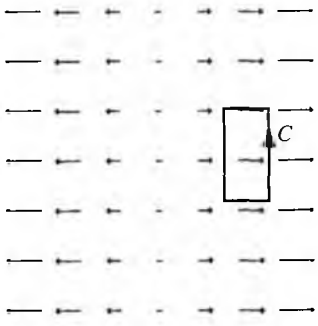


Figura 18.10 Un flujo con circulación cero.

Solución Considere el campo vectorial de la figura 18.9. Si consideramos que éste representa la velocidad del agua que fluye en un estanque, vemos que el agua está circulando. La integral de línea alrededor de C, que mide la circulación alrededor de C, es positiva porque los vectores del campo están todos apuntando en la dirección de la trayectoria. Como comparación, observe el campo vectorial de la figura 18.10. Aquí la integral de línea alrededor de C es cero porque las porciones verticales de la trayectoria son perpendiculares al campo, y las contribuciones de las dos porciones horizontales se cancelan. Esto significa que no hay tendencia neta para que el agua circule alrededor de C.

Resulta que el campo vectorial de la figura 18.10 tiene la propiedad de que su circulación alrededor de *cualquier* trayectoria cerrada es cero. El agua que fluye de acuerdo con este campo vectorial no tiene tendencia a circular alrededor de ningún punto y una hoja que caiga en el agua no dará vueltas. Más adelante veremos estos campos especiales, cuando introduzcamos la noción del *rotacional* de un campo vectorial.

Propiedades de las integrales de línea

Las integrales de línea comparten algunas propiedades básicas con las integrales comunes de una variable:

Para una constante escalar λ, campos vectoriales $\vec{F}$ y $\vec{G}$, y curvas orientadas C, C_1 y C_2,

1. $\displaystyle\int_C \lambda \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lambda \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$
2. $\displaystyle\int_C (\vec{F} + \vec{G}) \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}.$
3. $\displaystyle\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$
4. $\displaystyle\int_{C_1+C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$

Las propiedades 3 y 4 están relacionadas con la curva C sobre la que se toma la integral de línea. Si C es una curva orientada, entonces $-C$ es la misma curva recorrida en la dirección opuesta, es decir, con la orientación contraria (véase Fig. 18.11). La propiedad 3 se cumple porque si integramos a lo largo de $-C$, el vector $\Delta\vec{r}$ apunta en la dirección opuesta y los productos punto $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ son los negativos de lo que fueron a lo largo de C.

Si C_1 y C_2 son curvas orientadas con C_1 terminando donde C_2 comienza, construimos una nueva curva orientada, llamada $C_1 + C_2$, al unirlas (véase Fig. 18.12). La propiedad 4 es el análogo para integrales de línea de la propiedad para integrales definidas que dice que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx .$$

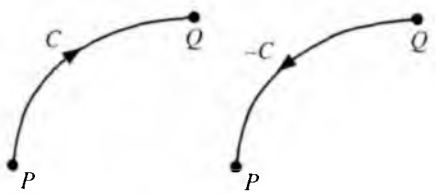


Figura 18.11 Una curva, C, y su opuesto, $-C$.

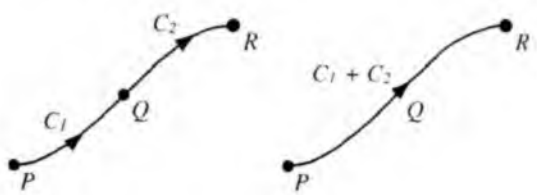


Figura 18.12 Unión de dos curvas, C_1 y C_2, para hacer una nueva, $C_1 + C_2$.

Problemas para la sección 18.11

En los problemas del 1 al 4, indique si espera que la integral de línea del campo vectorial dibujado sobre la curva dada sea positiva, negativa o cero.

1.

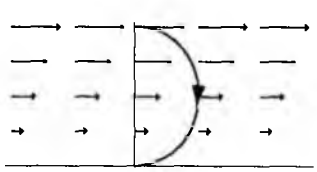


Figura 18.13

2.

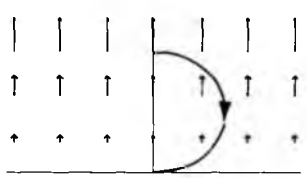


Figura 18.14

3.

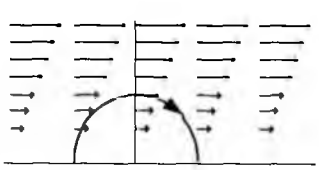


Figura 18.15

4.

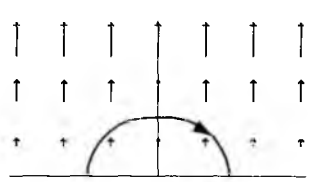


Figura 18.16

5. Considere el campo vectorial $\vec{F}$ que se muestra en la figura 18.17, junto con las trayectorias C_1, C_2 y C_3. Ordene las integrales de línea $\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ y $\int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ en orden ascendente.

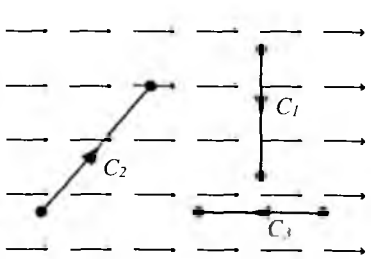


Figura 18.17

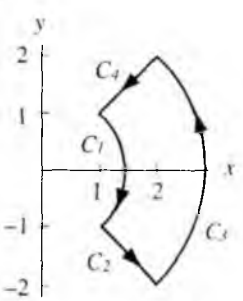


Figura 18.18 La curva cerrada $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.

Para los problemas del 6 al 10, indique si espera que el campo vectorial dado tenga circulación positiva, negativa o cero alrededor de la curva C de la figura 18.18. Los segmentos C_1 y C_3 son arcos circulares centrados en el origen: C_2 y C_4 son segmentos de línea radiales. Puede ser útil dibujar los campos vectoriales.

6. $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$
7. $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$
8. $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$
9. $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i}$
10. $\vec{F}(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}\,\vec{i} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,\vec{j}$

En los problemas del 11 al 16, calcule la integral de línea a lo largo de la recta entre los puntos dados.

11. $\vec{F} = x\vec{j}$, de (1, 0) a (3, 0)
12. $\vec{F} = x\vec{j}$, de (2, 0) a (2, 5)
13. $\vec{F} = x\vec{i}$, de (2, 0) a (6, 0)
14. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$, de (2, 0) a (6, 0)
15. $\vec{F} = \vec{r}$, de (2, 2) a (6, 6)
16. $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, de (0, 6) a (0, 13)

17. Dibuje una curva orientada C y un campo vectorial $\vec{F}$ a lo largo de C que no sea siempre perpendicular a C, pero para la que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.
18. Dado el campo de fuerza $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + x^2\vec{j}$ y la curva en ángulo recto, C, desde los puntos (0, −1) a (4, −1) a (4, 3) de la figura 18.19:
    a) Evalúe $\vec{F}$ en los puntos (0, −1), (1, −1), (2, −1), (3, −1), (4, −1) (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3).
    b) Haga un dibujo que muestre el campo de fuerza a lo largo de C.
    c) Estime el trabajo realizado por el campo de fuerza indicado sobre un objeto que recorre la curva C.

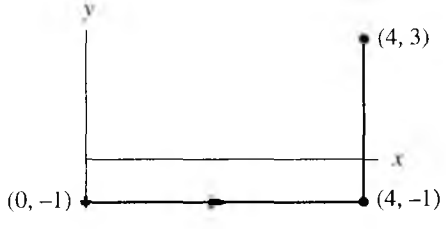


Figura 18.19

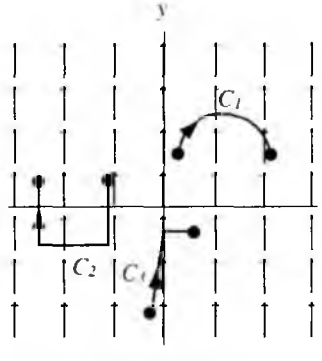


Figura 18.20

19. Si $\vec{F}$ es un campo de fuerza constante $\vec{j}$, considere el trabajo realizado por el campo sobre partículas que se desplazan en las trayectorias C_1, C_2 y C_3 de la figura 18.20. ¿En cuál de estas trayectorias será cero el trabajo realizado? Explique.

Para los problemas del 20 al 23, utilice una computadora para calcular las siguientes integrales.

a) La integral de línea de $\vec{F}$ alrededor de varias curvas cerradas. ¿Qué se obtiene?

b) La integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de tres curvas, cada una de las cuales comienza en el origen y termina en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. ¿Qué observa?

20. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$
21. $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$
22. $\vec{F} = \vec{i} + y\vec{j}$
23. $\vec{F} = \vec{i} + x\vec{j}$

24. Como resultado de las respuestas a los problemas del 20 al 23, debe haber notado que se cumple el siguiente enunciado: siempre que la integral de línea de un campo vectorial alrededor de cualquier curva cerrada sea cero, la integral de línea a lo largo de una curva con puntos finales fijos tiene un valor constante (esto es, la integral de línea es independiente de la trayectoria que tome la curva entre los puntos finales). Explique por qué es así esto.
25. Como resultado de las respuestas a los problemas del 20 al 23, seguramente notó que también se cumple el inverso del enunciado del problema 24: siempre que la integral de línea de un campo vectorial depende sólo de los puntos finales y no de las trayectorias, la circulación es siempre cero. Explique.

En los problemas 26 y 27, utilice el hecho de que la fuerza de gravedad sobre una partícula de masa m en el punto con vector de posición $\vec{r}$ está dada por

$$\vec{F} = -\frac{GMm\vec{r}}{r^3}$$

donde $r = \|\vec{r}\|$ y G es la constante gravitacional, y M es la masa de la Tierra.

26. Calcule el trabajo realizado por la fuerza de gravedad sobre una partícula de masa m conforme ésta se aleja de 8000 km a 10 000 km del centro de la Tierra.
27. Calcule el trabajo realizado por la fuerza de gravedad sobre una partícula de masa m, conforme ésta se desplaza de 8000 km del centro de la Tierra hasta el infinito.
28. El hecho de que una corriente eléctrica origine un campo magnético es la base de algunos motores eléctricos. La ley de Ampère relaciona el campo magnético $\vec{B}$ con una corriente constante I. Esta ley dice que

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = kI$$

donde I es la corriente[1] que circula por una curva cerrada C y k es una constante. La figura 18.21 muestra una barra que lleva una corriente y el campo magnético inducido alrededor de la barra. Si ésta es muy larga y delgada, los experimentos demuestran que el campo magnético $\vec{B}$ es tangente a cada círculo que sea perpendicular a la barra y tenga su centro en el eje de la barra (como C en la figura 18.21). La magnitud de $\vec{B}$ es constante a lo largo de cada uno de tales círculos. Utilice la ley de Ampère para demostrar que alrededor de un círculo de radio r, el campo magnético debido a una corriente I tiene una magnitud dada por

$$\|\vec{B}\| = \frac{kI}{2\pi r}.$$

(En otras palabras, la intensidad del campo es inversamente proporcional a la distancia radial desde la barra).

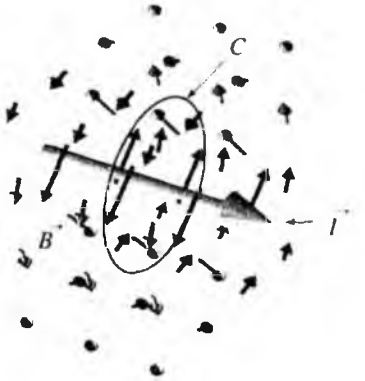


Figura 18.21

[1] Más precisamente, I es la corriente neta que pasa por cualquier superficie que tenga C como su frontera.

18.2 CÁLCULO DE INTEGRALES DE LÍNEA SOBRE CURVAS PARAMETRIZADAS

La finalidad de esta sección es mostrar cómo se puede usar una parametrización de una curva para convertir una integral de línea en una integral ordinaria de una variable.

Uso de una parametrización para evaluar una integral de línea

Recuerde la definición de la integral de línea,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{\|\Delta \vec{r}_i\| \to 0} \sum_i \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i.$$

donde los $\vec{r}_i$ son los vectores de posición de puntos que subdividen la curva en tramos cortos. Ahora supongamos que tenemos una parametrización lisa, $\vec{r}(t)$, de C para $a \le t \le b$, de modo que $\vec{r}(a)$ es el vector de posición del principio de la curva y $\vec{r}(b)$ es el vector de posición del final. Entonces podemos dividir C en n secciones al dividir el intervalo $a \le t \le b$ en n secciones, cada una de tamaño $\Delta t = (b - a)/n$. Véanse las figuras 18.22 y 18.23.

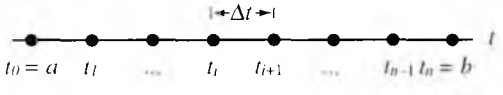


Figura 18.22 Subdivisión del intervalo $a \le t \le b$.

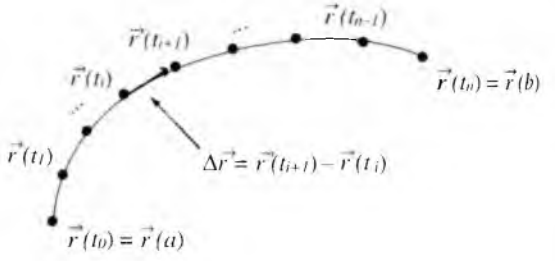


Figura 18.23 Subdivisión correspondiente de la trayectoria parametrizada C.

En cada punto $\vec{r}_i = \vec{r}(t_i)$ queremos calcular

$$\vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i.$$

Como $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, los vectores de desplazamiento $\Delta \vec{r}_i$ están dados por

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r}_i &= \vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i) \\ &= \vec{r}(t_i + \Delta t) - \vec{r}(t_i) \\ &= \frac{\vec{r}(t_i + \Delta t) - \vec{r}(t_i)}{\Delta t} \cdot \Delta t \\ &\approx \vec{r}\,'(t_i)\Delta t, \end{aligned}$$

donde utilizamos el hecho de que Δt es pequeña y que $\vec{r}(t)$ es diferenciable para obtener la última aproximación.

Por lo tanto,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \approx \sum \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i \approx \sum \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,\Delta t.$$

Observe que $\vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot \vec{r}\,'(t_i)$ es el valor en t_i de una función de una variable de t, así que esta última suma es realmente una suma de Riemann de una variable. En el límite a medida que $\Delta t \to 0$, obtenemos una integral definida:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot \vec{r}\,'(t_i)\,\Delta t = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt.$$

Entonces tenemos el siguiente resultado:

> Si $\vec{r}(t)$, para $a \le t \le b$, es una parametrización lisa de una curva orientada C y $\vec{F}$ es un campo vectorial que es continuo en C, entonces
>
> $$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt.$$
>
> En otras palabras: para calcular la integral de línea de $\vec{F}$ sobre C, tome el producto punto de $\vec{F}$ evaluado en C con el vector de velocidad, $\vec{r}(t)$, de la parametrización de C, luego integre a lo largo de la curva.

Aun cuando se supuso que C es lisa, podemos usar la misma fórmula para calcular integrales de línea sobre curvas que son sólo *lisas por secciones*, tal como la frontera de un rectángulo: Si C es lisa por secciones, aplicamos la fórmula a cada una de las secciones lisas y sumamos los resultados.

Ejemplo 1 Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + y\vec{j}$ y C es el cuarto de círculo unitario, orientado en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 18.24.

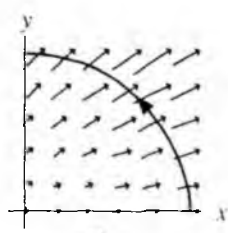


Figura 18.24 El campo vectorial $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + y\vec{j}$ y el cuarto de círculo C.

Solución Como todos los vectores de $\vec{F}$ a lo largo de C apuntan generalmente en una dirección opuesta a la orientación de C, esperamos que nuestra respuesta sea negativa. El primer paso es parametrizar C por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = \cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}, \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Al sustituir la parametrización en $\vec{F}$ obtenemos $\vec{F}(x(t), y(t)) = (\cos t + \operatorname{sen} t)\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}$. El vector $\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} = -\operatorname{sen} t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\pi/2} ((\cos t + \operatorname{sen} t)\,i + \operatorname{sen} t\,\vec{j}) \cdot (\operatorname{sen} t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j})\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-\cos t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} t \cos t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} -\operatorname{sen}^2 t\,dt = -\frac{\pi}{4} \approx -0.7854.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la respuesta es negativa, como esperábamos.

Ejemplo 2 Considere el campo vectorial $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

a) Suponga que C_1 es el segmento de recta que une (1, 0) a (0, 2) y C_2 es una parte de una parábola con su vértice en (0, 2), que une los mismos puntos en el mismo orden (véase Fig. 18.25). Verifique que

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

b) Si C es el triángulo que se muestra en la figura 18.26, demuestre que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

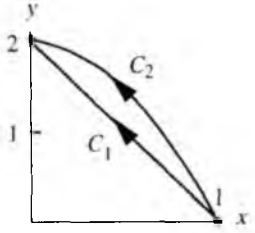


Figura 18.25

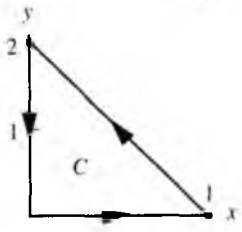


Figura 18.26

Solución a) Parametrizamos C_1 por $\vec{r}(t) = (1 - t)\vec{i} + 2t\vec{j}$ con $0 \le t \le 1$. Entonces $\vec{r}'(t) = -\vec{i} + 2\vec{j}$, y

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(1 - t, 2t) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j})\, dt = \int_0^1 ((1 - t)\vec{i} + 2t\vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j})\, dt$$

$$= \int_0^1 (5t - 1)\, dt = \frac{3}{2}.$$

Para parametrizar C_2, se considera que es parte de una parábola con vértice en (0, 2), así que su ecuación es de la forma $y = -kx^2 + 2$ para alguna k. Como la parábola cruza el eje x en (1, 0), encontramos que $k = 2$ y $y = -2x^2 + 2$. Por lo tanto, usamos la parametrización $\vec{r}(t) = t\vec{i} + (-2t^2 + 2)\vec{j}$ con $0 \le t \le 1$, que tiene $\vec{r}'(t) = \vec{i} - 4t\vec{j}$. Esto traza C_2 a la inversa, puesto que $t = 0$ resulta en (0, 2), y $t = 1$ produce (1, 0). En consecuencia, hacemos que $t = 0$ sea el límite superior de integración y $t = 1$ el límite inferior:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^0 \vec{F}(t, -2t^2 + 2) \cdot (\vec{i} - 4t\vec{j})\, dt = -\int_0^1 (t\vec{i} + (2t^2 + 2)\vec{j}) \cdot (\vec{i} - 4t\vec{j})\, dt$$

$$= -\int_0^1 (8t^3 - 7t)\, dt = \frac{3}{2}.$$

De modo que las integrales a lo largo de C_1 y C_2 tienen el mismo valor.

b) Descomponemos $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ en tres secciones, una de las cuales ya se calculó (es decir, la sección que enlaza (1, 0) a (0, 2), donde la integral de línea tiene valor 3/2). La sección que va de (0, 2) a (0, 0) se puede parametrizar por $\vec{r}(t) = (2 - t)\vec{j}$ con $0 \le t \le 2$. La sección que va de (0, 0) a (1, 0) se puede parametrizar por $\vec{r}(t) = t\vec{i}$ con $0 \le t \le 1$. Entonces

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3}{2} + \int_0^2 \vec{F}(0, 2 - t) \cdot (-\vec{j})\, dt + \int_0^1 \vec{F}(t, 0) \cdot \vec{i}\, dt$$

$$= \frac{3}{2} + \int_0^2 (2 - t)\vec{j} \cdot (-\vec{j})\, dt + \int_0^1 t\vec{i} \cdot \vec{i}\, dt$$

$$= \frac{3}{2} + \int_0^2 (t - 2)\, dt + \int_0^1 t\, dt = \frac{3}{2} + (-2) + \frac{1}{2} = 0.$$

Ejemplo 3 Sea C la curva cerrada formada por el semicírculo superior de radio 1 y la recta que forma su diámetro a lo largo del eje x, orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj (véase Fig. 18.27). Encuentre $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$.

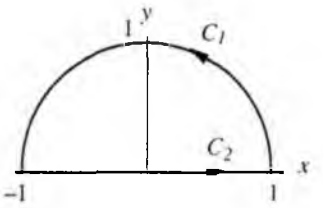


Figura 18.27 La curva $C = C_1 + C_2$ para el ejemplo 3.

Solución Escribimos $C = C_1 + C_2$ donde C_1 es el semicírculo y C_2 la recta, y calculamos $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ y $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ por separado. Parametrizamos C_1 por $\vec{r}\,(t) = \cos t\vec{i} + \operatorname{sen} t\vec{j}$, con $0 \le t \le \pi$. Entonces

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi} (-\operatorname{sen} t\vec{i} + \cos t\vec{j}) \cdot (-\operatorname{sen} t\vec{i} + \cos t\vec{j})\, dt$$
$$= \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\, dt = \int_0^{\pi} 1\, dt = \pi$$

Para C_2, tenemos $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, puesto que el campo vectorial $\vec{F}$ no tiene componente $\vec{i}$ a lo largo del eje x (donde $y = 0$) y por lo tanto es perpendicular a C_2 en todos los puntos.

Por último, podemos escribir

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi + 0 = \pi.$$

No es por accidente que el resultado para $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ sea el mismo que la longitud de la curva C_1. Véanse los problemas 14 y 15 de la página 372.

El siguiente ejemplo ilustra el cálculo de una integral de línea sobre una trayectoria en tres dimensiones.

Ejemplo 4 Una partícula viaja a lo largo de la hélice C dada por $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \operatorname{sen} t\vec{j} + 2t\vec{k}$ y está sometida a una fuerza $\vec{F} = x\vec{i} + z\vec{j} - xy\vec{k}$. Encontrar el trabajo total realizado sobre la partícula por la fuerza para $0 \le t \le 3\pi$.

Solución El trabajo realizado está dado por una integral de línea, que evaluamos usando la parametrización dada:

$$\text{Trabajo realizado} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{3\pi} \vec{F}(\vec{r}\,(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$
$$= \int_0^{3\pi} (\cos t\vec{i} + 2t\vec{j} - \cos t \operatorname{sen} t\vec{k}) \cdot (-\operatorname{sen} t\vec{i} + \cos t\vec{j} + 2\vec{k})\, dt$$
$$= \int_0^{3\pi} (-\cos t \operatorname{sen} t + 2t \cos t - 2 \cos t \operatorname{sen} t)\, dt$$
$$= \int_0^{3\pi} (-3 \cos t \operatorname{sen} t + 2t \cos t)\, dt = -4.$$

La notación $\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

Hay una notación opcional para integrales de línea que es bastante común. Dadas las funciones $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$, y una curva orientada C, consideramos el campo vectorial $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} - R\vec{k}$. Podemos escribir

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

La relación entre las dos notaciones puede recordarse si se usa $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} - dz\vec{k}$.

Ejemplo 5 Evaluar $\int_C xy\,dx - y^2 dy$ donde C es el segmento de recta de (0, 0) a (2, 6).

Solución Parametrizamos C por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = t\vec{i} + 3t\vec{j}$, para $0 \le t \le 2$. Entonces,

$$\int_C xy\,dx - y^2\,dy = \int_C (xy\vec{i} - y^2\vec{j}) \cdot d\vec{r} = \int_0^2 (3t^2\vec{i} - 9t^2\vec{j}) \cdot (\vec{i} + 3\vec{j})\,dt = \int_0^2 (-24t^2)\,dt = -64.$$

Independencia de la parametrización

Como existen muchas maneras de parametrizar una curva orientada dada, podemos preguntarnos qué sucede con el valor de una integral de línea dada si escogemos otra parametrización. La respuesta es que la elección de parametrización no influye. Puesto que inicialmente definimos la integral de línea sin referencia a ninguna parametrización en particular, esto es exactamente lo que esperaríamos.

Ejemplo 6 Considerar la trayectoria orientada del segmento de línea recta L que corre de (0, 0) a (1, 1). Calcular la integral de línea del campo vectorial $\vec{F} = (3x - y)\vec{i} + x\vec{j}$ a lo largo de L usando cada una de las parametrizaciones siguientes:

a) $A(t) = (t, t)$, $0 \le t \le 1$, b) $D(t) = (e^t - 1, e^t - 1)$, $0 \le t \le \ln 2$.

Solución La línea L tiene ecuación $y = x$. Tanto $A(t)$ como $D(t)$ dan una parametrización de L: cada una tiene ambas coordenadas iguales y comienza en (0, 0) y termina en (1, 1). Ahora calculemos la integral de línea del campo vectorial $\vec{F} = (3x - y)\vec{i} + x\vec{j}$ usando cada parametrización.

a) Al usar $A(t)$, obtenemos

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 ((3t - t)\vec{i} + t\vec{j}) \cdot (\vec{i} + \vec{j})\,dt = \int_0^1 3t\,dt = \frac{3t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

b) Al usar $D(t)$ resulta

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\ln 2} \left((3(e^t - 1) - (e^t - 1))\vec{i} + (e^t - 1)\vec{j}\right) \cdot (e^t\vec{i} + e^t\vec{j})\,dt$$
$$= \int_0^{\ln 2} 3(e^{2t} - e^t)\,dt = 3\left(\frac{e^{2t}}{2} - e^t\right)\Big|_0^{\ln 2} = \frac{3}{2}.$$

El hecho de que ambas respuestas sean la misma indica que el valor de una integral de línea es independiente de la parametrización de la trayectoria. Los problemas 17, 18 y 19 al final de esta sección abordan esto desde otra perspectiva.

Problemas para la sección 18.2

En los problemas del 1 al 10, calcule la integral de línea del campo vectorial dado a lo largo de la trayectoria dada.

1. $\vec{F}(x, y) = \ln y\vec{i} + \ln x\vec{j}$ y C es la curva dada paramétricamente por $(2t, t^3)$, para $2 \le t \le 4$.

2. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ y C

3. $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i} +$

4. $\vec{F} = 2y\vec{i} - (\text{sen}\ y$
en el punto (1, 0

5. $\vec{F}(x, y) = e^x\vec{i} +$
de las manecillas

6. $\vec{F}(x, y) = xy\vec{i} +$
cillas del reloj.

7. $\vec{F} = x\vec{i} + 2zy\vec{j} +$

8. $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^2\vec{j} + z$

9. $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 5$

10. $\vec{F} = e^y\vec{i} + \ln(x^2 +$
muestra en la figu



11. Encuentre paramet
semicírculo de radi
el punto (1, 0) e int

12. Suponga que C es
a) ¿Es $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$
b) Una parametriz
c) Suponga que u
detiene antes d
corrido al punt
punto (4, 12). S
d) Una parametriz

Compruebe que ésta
puntos de C' están e
en que la partícula c
e) Encuentre $\int_C \vec{F} \cdot$

13. En el ejemplo 6 de l
(0, 0) a (1, 1), obteni
diferentes con los mi

2. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ y C es la recta del origen al punto (3, 3).
3. $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$ y C es la recta del punto (1, 2) al punto (3, 4).
4. $\vec{F} = 2y\vec{i} - (\text{sen } y)\vec{j}$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del círculo unitario C que inicia en el punto (1, 0).
5. $\vec{F}(x, y) = e^x\vec{i} + e^y\vec{j}$ y C es la parte de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ que une el punto (0, 1) al punto (2, 0) en dirección de las manecillas del reloj.
6. $\vec{F}(x, y) = xy\vec{i} + (x - y)\vec{j}$ y C es el triángulo que une los puntos (1, 0), (0, 1) y (−1, 0) en dirección de las manecillas del reloj.
7. $\vec{F} = x\vec{i} + 2zy\vec{j} + x\vec{k}$ y C está dada por $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ para $1 \le t \le 2$.
8. $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^2\vec{j} + z\vec{k}$ y C es la recta del origen al punto (2, 3, 4).
9. $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 5\vec{k}$ y C es la hélice $x = \cos t$, $y = \text{sen } t$, $z = t$, para $0 \le t \le 4\pi$.
10. $\vec{F} = e^y\vec{i} + \ln(x^2 + 1)\vec{j} + \vec{k}$ y C es el círculo de radio 2 del plano yz con centro en el origen y recorrido como se muestra en la figura 18.28.

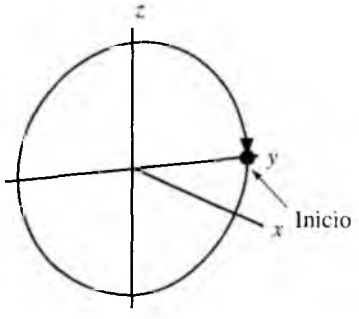


Figura 18.28

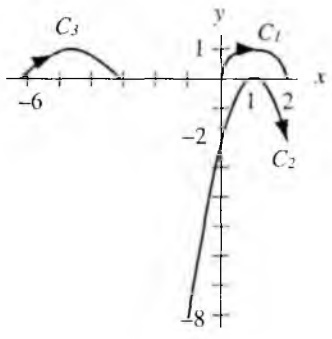


Figura 18.29

11. Encuentre parametrizaciones para las curvas orientadas que se ilustran en la figura 18.29. La curva C_1 es un semicírculo de radio 1, con centro en el punto (1, 0). La curva C_2 es una porción de una parábola, con vértice en el punto (1, 0) e intercepción y de −2. La curva C_3 es un arco de la curva seno.
12. Suponga que C es el segmento de recta desde el punto (0, 0) al punto (4, 12) y $\vec{F} = xy\vec{i} + x\vec{j}$.
    a) ¿Es $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ mayor, menor o igual a cero? Dé una explicación geométrica.
    b) Una parametrización de C es $(x(t), y(t)) = (t, 3t)$ para $0 \le t \le 4$. Utilice esto para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
    c) Suponga que una partícula sale del punto (0, 0), avanza a lo largo de la recta hacia el punto (4, 12), se detiene antes de llegar a éste y regresa, se detiene otra vez e invierte su dirección, luego completa su recorrido al punto final. Todo el recorrido ocurre a lo largo del segmento de recta que une el punto (0, 0) al punto (4, 12). Si a ésta la llamamos trayectoria C', explique por qué $\int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
    d) Una parametrización para una trayectoria como C' está dada por

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{3}(t^3 - 6t^2 + 11t), (t^3 - 6t^2 + 11t) \right), \qquad 0 \le t \le 4.$$

    Compruebe que ésta empieza en el punto (0, 0) y termina en el punto (4, 12). Compruebe también que todos los puntos de C' están en el segmento de recta que une el punto (0, 0) al punto (4, 12). ¿Cuáles son los valores de t en que la partícula cambia de dirección?
    e) Encuentre $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando la parametrización del inciso d. ¿Se obtiene la misma respuesta que en el inciso b?
13. En el ejemplo 6 de la página 370 integramos $\vec{F} = (3x - y)\vec{i} + x\vec{j}$ sobre dos parametrizaciones de la recta de (0, 0) a (1, 1), obteniendo 3/2 en ambos casos. Ahora calcule la integral de línea a lo largo de dos trayectorias diferentes con los mismos puntos finales, y demuestre que las respuestas son diferentes.

a) La trayectoria (t, t^2), con $0 \le t \le 1$
b) La trayectoria (t^2, t), con $0 \le t \le 1$

14. Considere el campo vectorial $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$. Sea C el círculo unitario orientado en sentido contrario al de las manecillas del reloj.
a) Demuestre que $\vec{F}$ tiene magnitud constante de 1 en el círculo C.
b) Demuestre que $\vec{F}$ es siempre tangente al círculo C.
c) Demuestre que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ = longitud de C.

15. Suponga que a lo largo de la curva C, el campo vectorial $\vec{F}$ es siempre tangente a C en la dirección de orientación y tiene magnitud constante $\|\vec{F}\| = m$. Utilice la definición de la integral de línea para explicar por qué

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot \text{ longitud de } C.$$

16. Considere la trayectoria orientada que es un segmento de la recta L que va de (0, 0) a (1, 1). Calcule la integral de línea del campo vectorial $\vec{F} = (3x - y)\vec{i} + x\vec{j}$ a lo largo de L usando cada una de las parametrizaciones siguientes:

a) $B(t) = (2t, 2t)$, $0 \le t \le 1/2$, b) $C(t) = \left(\frac{t^2 - 1}{3}, \frac{t^2 - 1}{3}\right)$, $1 \le t \le 2$.

En el ejemplo 6 de la página 370 se utilizan dos parametrizaciones, $A(t)$ y $D(t)$, para convertir una integral de línea en integral definida. En el problema 16 se utilizan otras dos parametrizaciones, $B(t)$ y $C(t)$, para la misma integral de línea. En los problemas 17, 18 y 19 demuestre que las dos integrales de línea correspondientes a dos de las parametrizaciones dadas son iguales, encontrando una sustitución que convierta una integral en la otra. Esto ofrece otra manera de ver por qué cambiar la parametrización de la curva no cambia el valor de la integral de línea.

17. $A(t)$ y $B(t)$ 18. $A(t)$ y $C(t)$ 19. $A(t)$ y $D(t)$

20. Una escalera en espiral de un edificio tiene la forma de una hélice de 5 metros de radio. Entre dos pisos del edificio, las escaleras realizan una revolución completa y suben 4 metros. Una persona lleva una bolsa de víveres y sube 2 pisos. La masa combinada de la persona y los víveres es de 70 kg y la fuerza gravitacional es 70 g hacia abajo, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Calcule el trabajo realizado por la persona contra la gravedad.

18.3 CAMPOS DE GRADIENTE Y CAMPOS INDEPENDIENTES DE LA TRAYECTORIA

Para una función, f, de una variable, el teorema fundamental del cálculo señala que la integral definida de una rapidez de cambio, f', da como resultado el cambio total en f:

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a).$$

¿Qué hay acerca de funciones de dos o más variables? La cantidad que describe la rapidez de cambio es el campo vectorial de gradiente. Si conocemos el gradiente de una función f, ¿podemos calcular el cambio total en f entre dos puntos? La respuesta es afirmativa, usando una integral de línea.

Búsqueda del cambio total en f a partir de grad f: el teorema fundamental

Para encontrar el cambio en f entre dos puntos P y Q, seleccionamos una trayectoria lisa C de P a Q, luego dividimos la trayectoria en muchas secciones pequeñas. Véase la figura 18.30. Primero estimamos el cambio en f a medida que avanzamos de $\vec{r}_i$ a $\vec{r}_{i+1}$ en un desplazamiento $\Delta\vec{r}_i$. Supongamos que $\vec{u}$ es un vector unitario en la dirección de $\Delta\vec{r}_i$. Entonces el cambio en f está dado por

$$\begin{aligned} f(\vec{r}_{i+1}) - f(\vec{r}_i) &\approx \text{rapidez de cambio de } f \times \text{distancia recorrida en dirección de } \vec{u}. \\ &= f_{\vec{u}}(\vec{r}_i)\,\|\Delta\vec{r}_i\| \\ &= \text{grad } f \cdot \vec{u}\,\|\Delta\vec{r}_i\| \\ &= \text{grad } f \cdot \Delta\vec{r}_i, \qquad \text{puesto que } \Delta\vec{r}_i = \|\Delta\vec{r}_i\|\,\vec{u} \end{aligned}$$

Por lo tanto al sumar sobre todas las secciones de la trayectoria, el cambio total en f está dado por

$$\text{Cambio total} = f(Q) - f(P) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \text{grad } f(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i.$$

En el límite, a medida que $\|\Delta\vec{r}_i\|$ se aproxima a cero, obtenemos el siguiente resultado:

El teorema fundamental del cálculo para integrales de línea

Supongamos que C es una trayectoria lisa y orientada, por partes, con punto de inicio en P y punto extremo Q. Si f es una función cuyo gradiente es continuo a lo largo de la trayectoria C, entonces

$$\int_C \text{grad } f \cdot d\vec{r} = f(Q) - f(P).$$

Observe que hay muchas trayectorias diferentes de P a Q (véase Fig. 18.31.), pero el valor de la integral de línea $\int_C \text{grad } f \cdot d\vec{r}$ depende sólo de los puntos extremos de C; no depende de por dónde pase C en el trayecto.[2]

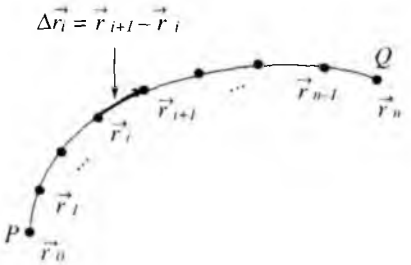


Figura 18.30 Subdivisión de la trayectoria de P a Q. Estimamos el cambio en f a lo largo de $\Delta\vec{r}_i$.

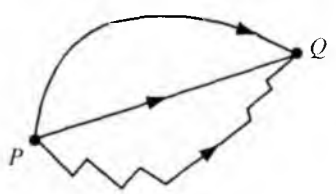


Figura 18.31 Hay muchas trayectorias diferentes de P a Q: todas dan el mismo valor de $\int_C \text{grad } f \cdot d\vec{r}$.

Ejemplo 1 Suponga que el gradiente de f es en todos los puntos perpendicular a la curva que enlaza P y Q que se muestra en la figura 18.32.

a) Explicar por qué es de esperarse que la trayectoria que enlaza P y Q sea un contorno.

b) Recurriendo a una integral de línea, demostrar que $f(P) = f(Q)$.

[2] El problema 13 de la página 397 muestra cómo el teorema fundamental para integrales de línea puede derivarse del teorema fundamental del cálculo de una variable.

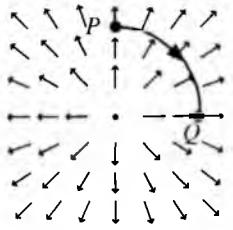


Figura 18.32 El campo vectorial del gradiente de la función f.

Solución a) El gradiente de f es en todos los puntos perpendicular a la trayectoria de P a Q, como se espera a lo largo de un contorno.

b) Considere la trayectoria de P a Q que se muestra en la figura 18.32 y evalúe la integral de línea

$$\int_C \text{grad } f \cdot d\vec{r} = f(Q) - f(P).$$

Como el gradiente de f es en todos los puntos perpendicular a la trayectoria, la integral de línea es 0. Por lo tanto, $f(Q) = f(P)$.

Ejemplo 2 Considere el campo vectorial $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$. En el ejemplo 2 de la página 368 se calculó $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ y $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ sobre las curvas orientadas que se muestran en la figura 18.33 y se encontró que su valor era el mismo. Encuentre una función escalar f tal que grad $f = \vec{F}$. A partir de esto, encuentre una forma fácil de calcular las integrales de línea, y explique cómo se podría esperar que fueran las mismas.

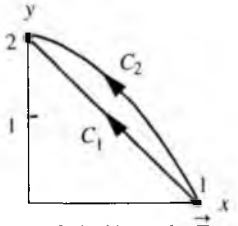


Figura 18.33 Encuentre la integral de línea de $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ sobre las curvas C_1 y C_2

Solución Una posibilidad para f es

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

Podemos comprobar que $f = x\vec{i} + y\vec{j}$. Ahora, podemos aplicar el teorema fundamental para calcular la integral de línea. Como $\vec{F}$ = grad f, tenemos

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \text{grad } f \cdot d\vec{r} = f(0, 2) - f(1, 0) = \frac{3}{2}.$$

Observe que el procedimiento de cálculo es exactamente el mismo para C_2. Como el valor de la integral depende sólo del valor de f en los puntos extremos, es el mismo no importa cuál trayectoria se escoja.

Campos vectoriales independientes de la trayectoria, o conservativos

En el ejemplo anterior, la integral de línea era independiente de la trayectoria tomada entre los dos puntos finales (fijos). Se da un nombre especial a los campos vectoriales cuyas integrales de línea tienen esta propiedad.

Se dice que un campo vectorial $\vec{F}$ es **independiente de la trayectoria,** o **conservativo,** si para dos puntos P y Q cualesquiera, la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ tiene el mismo valor a lo largo de cualquier trayectoria C de P a Q que se encuentre dentro del dominio de $\vec{F}$.

Si, por otro lado, la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ depende de la trayectoria C que une P a Q, entonces se dice que $\vec{F}$ es un campo vectorial *dependiente de la trayectoria.*

Ahora supongamos que $\vec{F}$ es cualquier campo de gradiente, y $\vec{F} = \text{grad } f$. Si C es una trayectoria de P a Q, el teorema fundamental para integrales de línea nos dice que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(Q) - f(P).$$

Como el lado derecho de esta ecuación no depende de la trayectoria, sino sólo de sus puntos extremos, el campo vectorial $\vec{F}$ es independiente de la trayectoria. Entonces, tenemos el siguiente resultado importante:

Si $\vec{F}$ es un campo vectorial de gradiente, entonces $\vec{F}$ es independiente de la trayectoria.

¿Por qué nos interesan los campos vectoriales independientes de la trayectoria, o conservativos?

Muchos de los campos vectoriales fundamentales de la naturaleza son independientes de la trayectoria, por ejemplo el campo gravitacional y el campo eléctrico de partículas en reposo. El hecho de que el campo gravitacional sea independiente de la trayectoria quiere decir que el trabajo realizado por la gravedad cuando un objeto se mueve, depende sólo de los puntos inicial y final y no de la trayectoria seguida. Por ejemplo, el trabajo realizado por la gravedad (calculado por la integral de línea) cuando una bicicleta es transportada a un departamento en un sexto piso es el mismo si se usa una escalera con trayectoria en zigzag o un elevador en línea recta ascendente.

Cuando un campo vectorial es independiente de la trayectoria podemos definir la *energía potencial* de un cuerpo; cuando éste se mueve a otra posición, la energía potencial cambia en una cantidad igual al trabajo realizado por el campo vectorial, que depende sólo de las posiciones inicial y final. Si el trabajo realizado no fuera independiente de la trayectoria, la energía potencial dependería tanto de la posición actual del cuerpo *como* de la manera en que llegó ahí, lo cual hace imposible definir una energía potencial útil.

El problema 22 de la página 381 explica por qué los campos vectoriales de fuerza independientes de la trayectoria también reciben el nombre de campos vectoriales *conservativos:* cuando una partícula se mueve bajo la influencia de un campo vectorial conservativo, la *energía total* de la partícula *se conserva.* Resulta que el campo de fuerza se obtiene del gradiente de la función de energía potencial.

Campos independientes de la trayectoria y campos de gradiente

Hemos visto que todo campo de gradiente es independiente de la trayectoria. ¿Qué hay del recíproco? Es decir, dado un campo vectorial independiente de la trayectoria $\vec{F}$, ¿podemos encontrar una función f tal que $\vec{F} = \text{grad } f$? La respuesta es afirmativa.

Cómo se construye f a partir de $\vec{F}$

Primero, observe que hay muchas opciones diferentes para f, ya que podemos sumar una constante a f sin cambiar el gradiente de f. Si escogemos un punto fijo inicial P, entonces al sumar o restar una constante a f podemos asegurar que $f(P) = 0$. Para cualquier otro punto Q, definimos $f(Q)$ por la fórmula

$$f(Q) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \text{donde } C \text{ es cualquier trayectoria de } P \text{ a } Q$$

Como $\vec{F}$ es independiente de la trayectoria, no importa cuál trayectoria escojamos de P a Q. Por otro lado, si $\vec{F}$ no es independiente de la trayectoria, entonces opciones diferentes podrían dar valores diferentes para $f(Q)$, así que f no sería una función (una función tiene que tener un solo valor en cada punto).

Todavía falta demostrar que el gradiente de la función f es realmente $\vec{F}$; lo dejamos para la página 378. Sin embargo, al construir una función f de esta manera tenemos el siguiente resultado:

> Si $\vec{F}$ es un campo vectorial independiente de la trayectoria, entonces $\vec{F} = \text{grad } f$ para alguna f.

Al combinar los dos resultados tenemos

> Un campo vectorial $\vec{F}$ es independiente de la trayectoria si y sólo si $\vec{F}$ es un campo vectorial de gradiente.

La función f es suficientemente importante como para darle un nombre especial:

> Si un campo vectorial $\vec{F}$ es de la forma $\vec{F} = \text{grad } f$ para alguna función escalar f, entonces f se llama **función potencial** para el campo vectorial $\vec{F}$.

Atención

Los físicos tienen la convención de que una función ϕ es una función potencial para un campo vectorial $\vec{F}$ si $\vec{F} = -\text{grad } \phi$. Véase el problema 21 en la página 381.

Ejemplo 3 Demostrar que el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = y \cos x\,\vec{i} + \operatorname{sen} x\,\vec{j}$ es independiente de la trayectoria.

Solución Si podemos encontrar una función potencial f, entonces $\vec{F}$ debe ser independiente de la trayectoria. Buscamos que grad $f = \vec{F}$. Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos x,$$

f debe ser de la forma

$$f(x, y) = y \operatorname{sen} x + g(y) \qquad \text{donde } g(y) \text{ es una función sólo de } y.$$

Además, como grad $f = \vec{F}$, debemos tener

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{sen} x,$$

y diferenciando $f(x, y) = y \operatorname{sen} x + g(y)$ resulta

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{sen} x + g'(y).$$

Entonces, debemos tener $g'(y) = 0$, así que $g(y) = C$ donde C es alguna constante. Entonces,

$$f(x, y) = y \operatorname{sen} x + C$$

es una función potencial para $\vec{F}$. Por lo tanto, $\vec{F}$ es independiente de la trayectoria.

Ejemplo 4 El campo de fuerza gravitacional $\vec{F}$ de un objeto de masa M, está dado por

$$\vec{F} = \frac{GM}{r^3}\vec{r}.$$

Demuestre que $\vec{F}$ es un campo gradiente al encontrar una función potencial para $\vec{F}$.

Solución Todos los vectores de fuerza apuntan hacia el origen. Si $\vec{F}$ = grad f, los vectores de fuerza deben ser perpendiculares a las superficies de nivel de f, así que éstas deben ser esferas. Del mismo modo, si grad $f = \vec{F}$, entonces $\| \text{grad } f \| = \| \vec{F} \| = GM / r^2$ es la rapidez de cambio de f en la dirección hacia el origen. Ahora, diferenciar con respecto a r indica la rapidez de cambio en dirección radial hacia afuera. Por lo tanto, si $w = f(x, y, z)$, tenemos

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{GM}{r^2} = GM\left(-\frac{1}{r^2}\right) = GM\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Así que intentemos

$$w = \frac{GM}{r} \quad \text{o} \quad f(x, y, z) = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Calculamos

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{-GMx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{-GMy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$f_z = \frac{\partial}{\partial z}\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{-GMz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Así que

$$\text{grad } f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k} = \frac{GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{GM}{r^3}\vec{r} = \vec{F}.$$

Nuestros cálculos demuestran que $\vec{F}$ es un campo de gradiente y que $f = GM/r$ es una función potencial para $\vec{F}$.

Por qué los campos vectoriales independientes de la trayectoria son campos de gradiente: demostración de que grad $f = \vec{F}$

Supongamos que $\vec{F}$ es un campo vectorial independiente de la trayectoria. En la página 376 definimos la función f, que esperamos que satisfaga grad $f = \vec{F}$, así:

$$f(x_0, y_0) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

donde C es una trayectoria desde un punto inicial fijo P hasta un punto $Q = (x_0, y_0)$. Esta integral tiene el mismo valor para cualquier trayectoria de P a Q porque $\vec{F}$ es independiente de la trayectoria. Ahora demostraremos por qué grad $f = \vec{F}$. Consideremos campos vectoriales en dos dimensiones; el argumento en tres dimensiones es esencialmente el mismo.

Primero escribimos la integral de línea en términos de las componentes $\vec{F}(x, y) = F_1(x, y)\vec{i} + F_2(x, y)\vec{j}$ y las componentes $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$:

$$f(x_0, y_0) = \int_C F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy.$$

Deseamos calcular las derivadas parciales de f, es decir, la rapidez de cambio de f en (x_0, y_0) paralela a los ejes. Para hacer esto con facilidad, escogemos una trayectoria que llegue al punto (x_0, y_0) en un segmento de recta vertical u horizontal. Sea C' una trayectoria desde P que se detiene poco antes de Q en un punto fijo (a, b) y sean L_x y L_y las trayectorias que se muestran en la figura 18.34. Entonces podemos dividir la integral de línea en tres secciones. Puesto que $d\vec{r} = \vec{j}\,dy$ en L_y y $d\vec{r} = \vec{i}\,dx$ en L_x, tenemos:

$$f(x_0, y_0) = \int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{Ly} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{Lx} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_b^{y_0} F_2(a, y)\,dy + \int_a^{x_0} F_1(x, y_0)\,dx.$$

En las primeras dos integrales no interviene x_0. Si consideramos x_0 como variable y diferenciamos con respecto a ella misma, resulta

$$f_{x_0}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x_0}\int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \frac{\partial}{\partial x_0}\int_b^{y_0} F_2(a, y)\,dy + \frac{\partial}{\partial x_0}\int_a^{x_0} F_1(x, y_0)\,dx.$$

$$= 0 + 0 + F_1(x_0, y_0) = F_1(x_0, y_0),$$

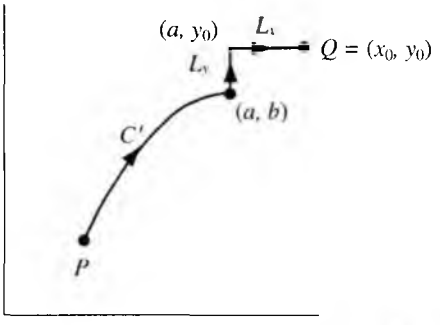


Figura 18.34 La trayectoria $C' + L_y + L_x$ se utiliza para demostrar que $f_x = F_1$.

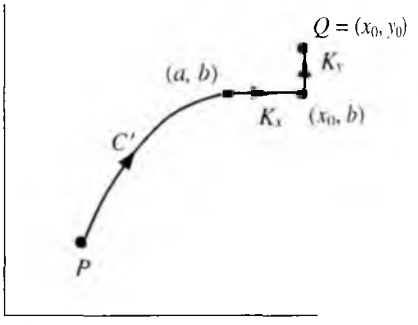


Figura 18.35 La trayectoria $C' + K_x + K_y$

y, por lo tanto,

$$f_x(x, y) = F_1(x, y)$$

Un cálculo similar para y usando la trayectoria de P a Q que se muestra en la figura 18.35 resulta en

$$f_{y_0}(x_0, y_0) = F_2(x_0, y_0).$$

Por lo tanto, como ya se indicó,

$$\text{grad } f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} = \vec{F}$$

Resumen

Hemos estudiado dos tipos aparentemente diferentes de campo vectorial: campos vectoriales independientes de la trayectoria y campos vectoriales de gradiente. Resulta que son los mismos. El siguiente es un resumen de las definiciones y propiedades de estos campos vectoriales:

- **Los campos vectoriales independientes de la trayectoria** tienen la propiedad de que para dos puntos P y Q cualesquiera, la integral de línea a lo largo de una trayectoria de P a Q es la misma sin importar la trayectoria que se escoja.
- **Los campos vectoriales de gradiente** son de la forma grad f para alguna función escalar f, llamada la función potencial del campo vectorial.
- **Los campos vectoriales de gradiente son independientes de la trayectoria** por el teorema fundamental de integrales de línea

$$\int_C \text{grad } f \cdot d\vec{r} = f(Q) - f(P).$$

- **Los campos vectoriales independientes de la trayectoria son campos de gradiente** porque puede usarse una integral de línea y la condición de independencia de trayectoria para construir una función potencial.

Problemas para la sección 18.3

1. El campo vectorial $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ es independiente de la trayectoria. Calcule geométricamente las integrales de línea sobre las trayectorias A, B y C que se muestran en la figura 18.36 de (1, 0) a (0, 1) y verifique que sean iguales. En este ejemplo A es una porción de un círculo, B es una recta y C está formada por dos segmentos de recta que se cortan en ángulo recto.

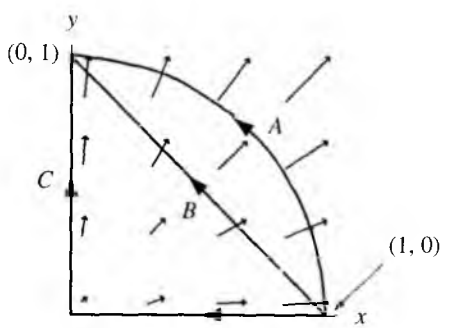


Figura 18.36

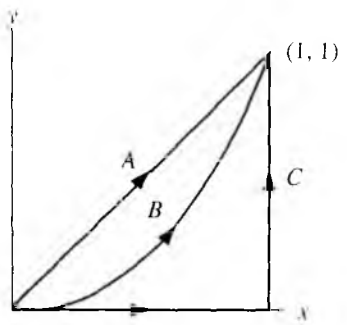


Figura 18.37

2. El campo vectorial $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ es independiente de la trayectoria. Calcule algebraicamente las integrales de línea sobre las trayectorias A, B y C que se muestran en la figura 18.37 de (0, 0) a (1, 1) y verifique que sean iguales. En este ejemplo A es un segmento de recta, B es parte de la gráfica de $f(x) = x^2$, y C está formada por dos segmentos de recta que se encuentran en ángulo recto.

Para los problemas del 3 al 6, diga si los campos vectoriales dados podrían o no ser campos vectoriales de gradiente. Dé una justificación de su respuesta.

3. $\vec{F}(x, y) = x\vec{i}$

4. $\vec{G}(x, y) = (x^2 - y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j}$

5. $\vec{F}(x, y, z) = \dfrac{-z}{\sqrt{x^2 + z^2}}\vec{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}\vec{j} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}\vec{k}$

6. $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} / \|\vec{r}\|^3$, donde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Para los campos vectoriales de los problemas del 7 al 10, encuentre la integral de línea a lo largo de la curva C desde el origen a lo largo del eje x al punto (3, 0), y luego en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia del círculo $x^2 + y^2 = 9$ al punto $\left(3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2}\right)$.

7. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$

8. $\vec{H} = -y\vec{i} + x\vec{j}$

9. $\vec{F} = y(x + 1)^{-1}\vec{i} + \ln(x + 1)\vec{j}$

10. $G = (ye^{xy} + \cos(x + y))\vec{i} + (xe^{xy} + \cos(x + y))\vec{j}$

11. Suponga que $f = 2xe^{y^2}\operatorname{sen} y\vec{i} + e^{y^2}\cos y\vec{j}$. Encuentre el cambio en f entre (0, 0) y $(1, \pi/2)$:

    a) Calculando una integral de línea b) Valuando f.

12. La integral de línea de $\vec{F}(x + y)\vec{i} + x\vec{j}$ a lo largo de cada una de las trayectorias siguientes es 3/2:

    i) La trayectoria (t, t^2), con $0 \le t \le 1$.

    ii) La trayectoria (t^2, t), con $0 \le t \le 1$.

    iii) La trayectoria (t, t^n), con $n > 0$ y $0 \le t \le 1$.

    Verifique lo anterior

    a) Calculando la integral de línea con la parametrización dada.

    b) Empleando el teorema fundamental del cálculo para integrales de línea.

13. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = x\vec{j}$ que se muestra en la figura 18.38.

    a) Encuentre las trayectorias C_1, C_2 y C_3 de P a Q tales que

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \qquad \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} > 0, \qquad \text{y} \qquad \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} < 0.$$

    b) ¿Es $\vec{F}$ un campo de gradiente?

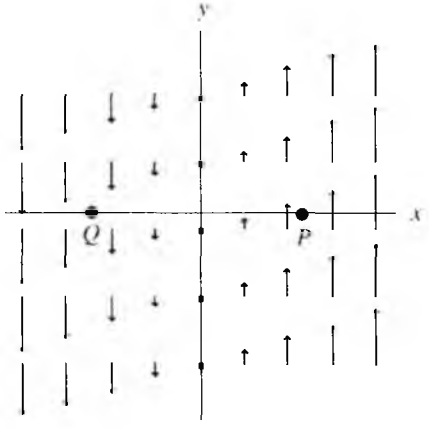


Figura 18.38

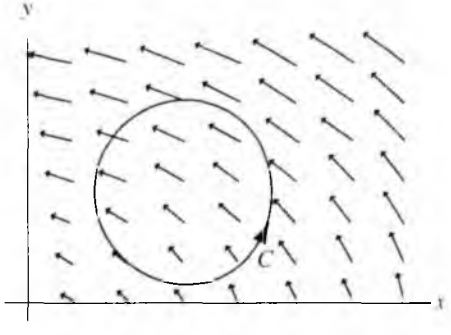


Figura 18.39

14. Considere el campo vectorial $\vec{F}$ graficado en la figura 18.39.
    a) ¿Es la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ positiva, negativa o cero?
    b) De la respuesta al inciso a, ¿se puede determinar si $\vec{F} = \text{grad } f$ para alguna función f ?
    c) De las siguientes fórmulas, ¿cuál se ajusta mejor a este campo vectorial?

$$\vec{F}_1 = \frac{x}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\vec{j}, \qquad \vec{F}_2 = -y\vec{i} + x\vec{j}, \qquad \vec{F}_3 = \frac{-y}{(x^2+y^2)^2}\vec{i} + \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\vec{j}.$$

En los problemas del 15 al 18, cada uno de los enunciados es *falso*. Explique por qué o encuentre un contraejemplo.

15. Si $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para una trayectoria cerrada C en particular, entonces $\vec{F}$ es independiente de la trayectoria.
16. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es el cambio total en $\vec{F}$ a lo largo de C.
17. Si $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$ para dos campos vectoriales $\vec{F}$ y $\vec{G}$ y una trayectoria particular C, entonces $\vec{F} = \vec{G}$.
18. Si el cambio total de una función f a lo largo de una curva C es cero, entonces C debe ser un contorno de f.
19. Suponga que una partícula sometida a una fuerza $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$ se mueve en el sentido de las manecillas del reloj a lo largo del arco del círculo unitario, con centro en el origen, que comienza en $(-1, 0)$ y termina en $(0, 1)$.
    a) Encuentre el trabajo realizado por $\vec{F}$. Explique el signo de su respuesta.
    b) ¿Es $\vec{F}$ independiente de la trayectoria? Explique.
20. Una partícula se mueve con vector de posición $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = z(t)\vec{k}$. Sean $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ sus vectores de velocidad y aceleración. Demuestre que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\vec{v}(t)\right\|^2 = \vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t).$$

21. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial independiente de la trayectoria. En física, suele ser necesario que la función potencial ϕ satisfaga la ecuación $\vec{F} = -\nabla\phi$. Este problema ilustra la importancia del signo negativo.[3]
    a) Sea el plano xy una parte de la superficie terrestre con el eje z apuntando en dirección al espacio exterior. (Se supone que la escala es suficientemente pequeña para que un plano constituya una buena aproximación a la superficie de la Tierra.) Sea $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ el vector de posición de una roca de masa unitaria, con $z \geq 0$, y x, y, z en metros. La función de energía potencial gravitacional para la roca es $\phi(x, y, z) = gz$, donde $g \approx 9.8$ m/s^2. Describa verbalmente las superficies de nivel de ϕ. La energía potencial ¿aumenta o disminuye con la altura sobre la Tierra?
    b) ¿Cuál es la relación entre el vector gravitacional, $\vec{F}$, y el vector $\nabla\phi$? Explique la importancia del signo negativo en la ecuación $\vec{F} = -\nabla\phi$.
22. En este problema se establece el principio de conservación de la energía. La energía cinética de una partícula de masa m que se mueve con rapidez v es $(1/2)mv^2$. Suponga que la partícula tiene energía potencial $f(r)$ en la posición $\vec{r}$ debido a un campo de fuerza $\vec{F} = -\nabla f$. Si la partícula se mueve con vector de posición $\vec{r}(t)$ y velocidad $\vec{v}(t)$, entonces el principio de conservación de la energía dice que

$$\text{Energía total} = \text{energía cinética} + \text{energía potencial} = \frac{1}{2}m\left\|\vec{v}(t)\right\|^2 + f(\vec{r}(t)) = \text{constante}.$$

---

[3] Adaptado de V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2a. edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer.

Sean P y Q dos puntos en el espacio y C una trayectoria de P a Q parametrizada por $\vec{r}(t)$ para $t_0 \le t \le t_1$, donde $\vec{r}(t_0) = P$ y $\vec{r}(t_1) = Q$.

a) Con el resultado del problema 20 y la ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, demuestre que

$$\text{Trabajo realizado por } \vec{F} \text{ conforme la partícula se desplaza a lo largo de } C = \text{energía cinética en } Q - \text{energía cinética en } P.$$

b) Utilice el teorema fundamental del cálculo para integrales de línea para demostrar que

$$\text{Trabajo realizado por } \vec{F} \text{ conforme la partícula se desplaza a lo largo de } C = \text{energía potencial en } P - \text{energía potencial en } Q.$$

c) Utilice los incisos a y b para demostrar que la energía total en P es la misma que en Q.

Este problema explica por qué los campos vectoriales de fuerza que son *independientes de la trayectoria* suelen recibir el nombre de campos vectoriales *conservativos* (de fuerza).

18.4 CAMPOS VECTORIALES DEPENDIENTES DE LA TRAYECTORIA Y EL TEOREMA DE GREEN

Supongamos que nos dan un campo vectorial pero no nos indican si es independiente de la trayectoria. ¿Cómo podemos saber si tiene una función potencial, es decir, si es un campo gradiente?

Cómo saber si un campo vectorial es dependiente de la trayectoria mediante integrales de línea

Ejemplo 1 ¿Es el campo vectorial $\vec{F}$, que se muestra en la figura 18.40, independiente de la trayectoria? En cualquier punto, $\vec{F}$ tiene magnitud igual a la distancia desde el origen y dirección perpendicular a la línea que une el punto al origen.

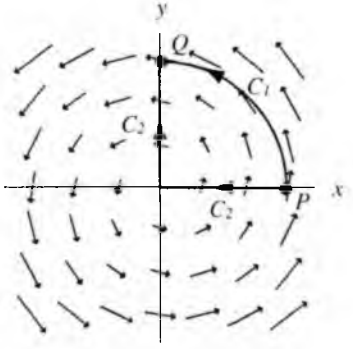


Figura 18.40 ¿Es este campo vectorial independiente de la trayectoria?

Solución Escogemos $P = (1, 0)$ y $Q = (0, 1)$ y dos trayectorias entre ellos: C_1, un cuarto de círculo de radio 1, y C_2, formada por partes de los ejes x y y (véase Fig. 18.40.) A lo largo de C_1, la integral de línea $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} > 0$, porque $\vec{F}$ apunta en la dirección de la curva, pero, a lo largo de C_2, tenemos $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, porque $\vec{F}$ es perpendicular a C_2 en todas partes. Por lo tanto, $\vec{F}$ no es independiente de la trayectoria.

Campos dependientes de la trayectoria y la circulación

Observe que el campo vectorial del ejemplo anterior tiene circulación diferente de cero alrededor del origen. ¿Qué se puede decir en general acerca de la circulación de un campo vectorial general independiente de la trayectoria alrededor de una curva cerrada, C? Supongamos que C es una curva cerrada *simple*, es decir, una curva que no se cruza a sí misma. Si P y Q son dos puntos cualesquiera de la trayectoria, entonces podemos considerar que C (orientada como se muestra en la figura 18.41) está formada por la trayectoria C_1 seguida por $-C_2$. Como $\vec{F}$ es independiente de la trayectoria, sabemos que

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Por lo tanto, vemos que la circulación alrededor de C es cero:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Si la curva C se cruza a sí misma, la descomponemos en curvas cerradas simples como se muestra en la figura 18.42 y aplicamos el mismo argumento a cada una.

Ahora supongamos que sabemos que la integral de línea alrededor de cualquier curva cerrada es cero. Para dos puntos cualesquiera, P y Q, con dos trayectorias, C_1 y C_2, entre ellas, creamos una curva cerrada, C, como en la figura 18.41. Como la circulación alrededor de esta curva cerrada es cero, las integrales de línea a lo largo de las dos trayectorias, C_1 y C_2, son iguales. Por lo tanto, $\vec{F}$ es independiente de la trayectoria.

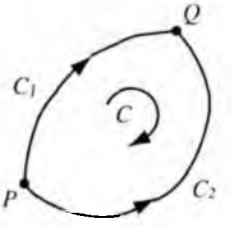


Figura 18.41 Una curva cerrada simple C descompuesta en dos partes, C_1 y C_2.

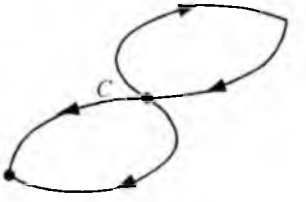


Figura 18.42 Una curva C, que se cruza a sí misma, se puede descomponer en curvas cerradas simples.

En consecuencia, tenemos el siguiente resultado:

> Un campo vectorial es independiente de la trayectoria si y sólo si $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para toda curva cerrada C.

Por lo tanto, para ver si un campo es *dependiente de la trayectoria,* buscamos una trayectoria cerrada con circulación diferente de cero. Por ejemplo, el campo vectorial del ejemplo 1 tiene circulación diferente de cero alrededor de un círculo alrededor del origen, lo cual muestra que es dependiente de la trayectoria.

Cómo saber si un campo vectorial es dependiente de la trayectoria algebraicamente: el rotacional

Ejemplo 2 ¿Tiene el campo vectorial $\vec{F} = 2xy\vec{i} + xy\vec{j}$ una función potencial? Si es así, encuéntrela.

Solución Supongamos que $\vec{F}$ tiene una función potencial, f, de modo que $\vec{F} = \text{grad } f$. Esto significa que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xy.$$

Si se integra la expresión para $\partial f / \partial x$ se demuestra que debemos tener

$$f(x, y) = x^2y + C(y) \qquad \text{donde } C(y) \text{ es una función de } y.$$

Al diferenciar esta expresión para $f(x, y)$ con respecto a y y usar el hecho de que $\partial f / \partial y = xy$, resulta

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + C'(y) = xy.$$

Entonces, debemos tener

$$C'(y) = xy - x^2.$$

Pero esta expresión para $C'(y)$ es imposible porque $C'(y)$ es una función sólo de y. El argumento demuestra que no hay función potencial para el campo vectorial $\vec{F}$.

¿Existe una forma más sencilla de ver que un campo vectorial no tenga función potencial, que no sea tratar de encontrar la función potencial sin conseguirlo? La respuesta es afirmativa. Primero veamos un campo vectorial bidimensional $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$. Si $\vec{F}$ es un campo gradiente, entonces hay una función potencial f tal que

$$\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} = \frac{\partial f}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}.$$

Entonces,

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad F_2 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Supongamos que f tiene segundas derivadas parciales continuas. Entonces, por la igualdad de derivadas parciales mixtas

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

De esta manera tenemos el siguiente resultado:

> Si $\vec{F}(x, y) = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$ es un campo vectorial gradiente con derivadas parciales contmuas, entonces
>
> $$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$
>
> $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ recibe el nombre de **rotacional** bidimensional, o escalar, del campo vectorial $\vec{F}$.

Observe que ahora sabemos que si $\vec{F}$ es un campo gradiente, entonces su rotacional es 0. No sabemos (todavía) si el inverso es cierto. (Esto es: si el rotacional es 0, ¿tiene $\vec{F}$ que ser un campo gradiente?) Sin embargo, el rotacional ya permite demostrar que un campo vectorial *no es* un campo gradiente.

Ejemplo 3 Demostrar que $\vec{F} = 2xy\vec{i} + xy\vec{j}$ no puede ser un campo vectorial gradiente.

Solución Tenemos $F_1 = 2xy$ y $F_2 = xy$. Como $\partial F_1/\partial y = 2x$ y $\partial F_2/\partial x = y$, en este caso

$$\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y \neq 0$$

por lo tanto $\vec{F}$ no puede ser un campo gradiente.

Ahora tenemos dos maneras de ver que un campo vectorial $\vec{F}$ del plano es dependiente de la trayectoria. Podemos evaluar $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para alguna curva cerrada y encontrar que no es cero, o podemos demostrar que $\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y \neq 0$. Es natural pensar que las expresiones

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

podrían estar relacionadas. La relación se llama teorema de Green.

Teorema de Green

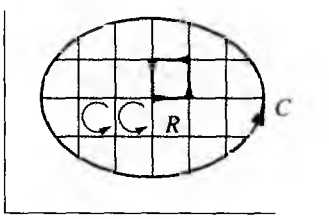


Figura 18.43 Región R limitada por una curva cerrada C y dividida en muchas regiones pequeñas, ΔR.

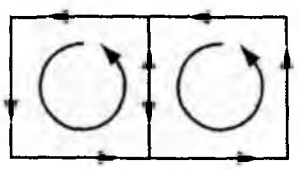


Figura 18.44 Dos pequeñas curvas cerradas adyacentes.

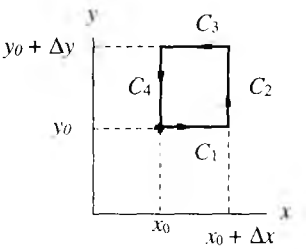


Figura 18.45 Una pequeña curva cerrada ΔC descompuesta en C_1, C_2, C_3 y C_4.

Obtenemos el enunciado del teorema de Green al dividir una región en pedacitos y ver la relación entre la integral de línea y el rotacional en cada una.

En dos dimensiones, una curva cerrada simple C separa el plano en puntos dentro y puntos fuera de C. Consideramos $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde C está orientada como se muestra en la figura 18.43. Dividimos la región R dentro de C en pequeñas partes, cada una de ellas limitada por una curva cerrada con la orientación que se muestra. La figura 18.44 muestra que si sumamos la circulación alrededor de todas estas pequeñas curvas cerradas, cada borde común de un par de curvas adyacentes se cuenta dos veces, una vez en cada dirección. En consecuencia, las integrales a lo largo de estos bordes se cancelan y, de este modo, las integrales de línea a lo largo de todos los bordes dentro de la región R se cancelan, lo que da

$$\begin{array}{c}\text{Circulación de } \vec{F} \\ \text{alrededor de } C\end{array} = \sum_{\Delta C} \begin{array}{l}\text{Circulación de } \vec{F} \text{ alrededor} \\ \text{de una pequeña curva, } \Delta C.\end{array}$$

Ahora estimamos la integral de línea alrededor de una de estas pequeñas curvas cerradas, ΔC. Descomponemos ΔC en C_1, C_2, C_3 y C_4, como se muestra en la figura 18.45. Entonces calculamos las integrales de línea a lo largo de C_1 y C_3, donde $\Delta\vec{r}$ es paralela al eje x, así que

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i}.$$

Entonces, en C_1 y C_3,

$$\vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = (F_1\vec{i} + F_2\vec{j})\cdot\Delta x\vec{i} = F_1\,\Delta x.$$

Sin embargo, la función F_1 debe evaluarse en (x, y_0) en C_1 y en $C_3(x, y_0 + \Delta y)$, por lo cual

$$\begin{aligned}\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{C_1}F_1(x, y_0)\,dx + \int_{C_3}F_1(x, y_0+\Delta y)\,dx\\ &= \int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x}F_1(x, y_0)\,dx + \int_{x_0+\Delta x}^{x=x_0}F_1(x, y_0+\Delta y)\,dx\\ &= \int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x}F_1(x, y_0)\,dx - \int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x}F_1(x, y_0+\Delta y)\,dx\\ &= \int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x}(F_1(x, y_0) - F_1(x, y_0+\Delta y))\,dx.\end{aligned}$$

Como F_1 es diferenciable y Δy es pequeña,

$$F_1(x, y_0) - F_1(x, y_0+\Delta y) = -(F_1(x, y_0+\Delta y) - F_1(x, y_0)) \approx -\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y_0)\,\Delta y.$$

Por lo que se tiene

$$\int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x}(F_1(x, y_0) - F_1(x, y_0+\Delta y))\,dx \approx -\left(\int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x}\frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\right)\Delta y.$$

Si suponemos que $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x, y_0)$ es aproximadamente constante sobre el intervalo $x_0 \le x \le x_0 + \Delta x$, obtenemos

$$-\left(\int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x}\frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\right)\Delta y \approx -\frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0)\left(\int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x}dx\right)\Delta y = -\frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0)\,\Delta x\,\Delta y.$$

Por un argumento similar en C_2 y C_4, tenemos

$$\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_4}\vec{F}\cdot d\vec{r} \approx \frac{\partial F_2}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y.$$

Al combinar estos resultados para C_1, C_2, C_3 y C_4, obtenemos

$$\int_{\Delta C}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_4}\vec{F}\cdot d\vec{r} \approx \frac{\partial F_2}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,\Delta x\Delta y.$$

Al sumar todas las pequeñas regiones ΔC resulta

$$\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r} \approx \sum_{\Delta C}\int_{\Delta C}\vec{F}\cdot d\vec{r} \approx \sum_{\Delta R}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\Delta x\,\Delta y.$$

La última suma es una suma de Riemann que aproxima una integral doble; si se toma el límite a medida que Δx, Δy tienden a cero, se obtiene

¿Por qué son importantes los huecos en el dominio del campo vectorial?

La razón para suponer que el dominio del campo vectorial $\vec{F}$ no tiene huecos es asegurar que la región R dentro de C está realmente contenida en el dominio de $\vec{F}$. De otro modo, no podemos aplicar el teorema de Green. Los siguientes dos ejemplos demuestran que si $\partial F_2 / \partial x - \partial F_1 / \partial y = 0$ pero el dominio de $\vec{F}$ contiene un hueco, entonces $\vec{F}$ puede ser independiente o dependiente de la trayectoria.

Ejemplo 4 Sea $\vec{F}$ el campo vectorial dado por $\vec{F}(x, y) = \dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$.

a) Calcular $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$. ¿Implica la prueba del rotacional que $\vec{F}$ es independiente de la trayectoria?

b) Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde C es el círculo unitario con centro en el origen y orientado en sentido contrario al de las manecillas del reloj. ¿Es $\vec{F}$ un campo vectorial independiente de la trayectoria?

c) Explicar por qué las respuestas a los incisos a y b no contradicen el teorema de Green.

Solución a) Al tomar derivadas parciales, tenemos

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-1}{x^2 + y^2} - \frac{y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Entonces,

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

Como $\vec{F}$ no está definida en el origen, el dominio de $\vec{F}$ contiene un hueco. Por lo tanto, la prueba del rotacional no puede aplicarse.

b) En el círculo unitario, $\vec{F}$ es tangente al círculo y $\|\vec{F}\| = 1$. Entonces,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \|\vec{F}\| \cdot \text{longitud de curva}$$

Como la integral de línea alrededor de la curva cerrada C es diferente de cero, $\vec{F}$ no es independiente de la trayectoria.

c) El dominio de $\vec{F}$ es el "plano perforado", como se muestra en la figura 18.46. Como $\vec{F}$ no está definida en el origen, que está dentro de C, el teorema de Green no es válido. En este caso

$$2\pi = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq \int_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx dy = 0.$$

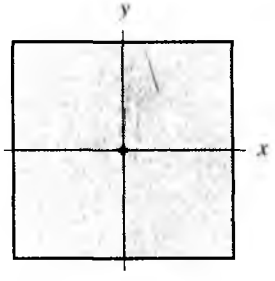


Figura 18.46 El dominio de $\vec{F}(x, y) = \dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$ es el plano menos el origen.

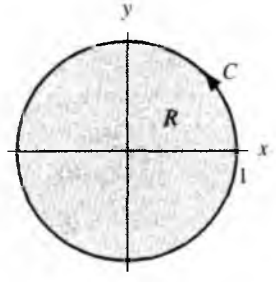


Figura 18.47 La región R *no está* contenida en el dominio de $\vec{F}(x, y) = \dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$.

Aunque el campo vectorial $\vec{F}$ del último ejemplo no está definido en el origen, esto por sí mismo no impide que el campo vectorial sea independiente de la trayectoria como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5 Considerar el campo vectorial $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x, y) = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2 + y^2}$.

a) Calcule $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$. ¿Implica la prueba del rotacional que $\vec{F}$ es independiente de la trayectoria?

b) Explicar cómo sabemos que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, donde C es el círculo unitario con centro en el origen y orientado en sentido contrario al de las manecillas del reloj. ¿Implica esto que $\vec{F}$ sea independiente de la trayectoria?

c) Comprobrar que $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ es una función potencial para $\vec{F}$. ¿Implica esto que $\vec{F}$ sea independiente de la trayectoria?

Solución a) Al tomar derivadas parciales, tenemos

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0.$$

Esto *no* implica que $\vec{F}$ sea independiente de la trayectoria: el dominio de $\vec{F}$ contiene un hueco porque $\vec{F}$ no está definida en el origen. Por lo tanto, la prueba del rotacional no es válida.

b) Como $\vec{F}(x, y) = x\vec{j} + y\vec{j} = \vec{r}$ en el círculo unitario C, el campo $\vec{F}$ en todas partes es perpendicular a C. Por lo tanto

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

El hecho de que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ cuando C es el círculo unitario *no* implica que $\vec{F}$ sea independiente de la trayectoria.

Para estar seguros que $\vec{F}$ es independiente de la trayectoria, tendríamos que demostrar que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para *toda* curva cerrada C del dominio de $\vec{F}$, no sólo el círculo unitario.

c) Para comprobar que grad $f = \vec{F}$, diferenciamos f:

$$f_x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

y

$$f_y = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

de modo que

$$\text{grad } f = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2 + y^2} = \vec{F}.$$

Entonces, $\vec{F}$ es un campo gradiente y por lo tanto es independiente de la trayectoria, aún cuando $\vec{F}$ no esté definido en el origen.

Prueba del rotacional para campos vectoriales en tres dimensiones

La prueba del rotacional es una manera conveniente de determinar si un campo vectorial de dos dimensiones es independiente de la trayectoria. Afortunadamente, existe una prueba análoga para campos vectoriales de tres dimensiones, aun cuando no podemos justificarla sino hasta el capítulo 20.

Si $\vec{F}(x, y, z) = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ es un campo vectorial en tres dimensiones definimos un nuevo campo vectorial, rotacional $\vec{F}$, en tres dimensiones por

$$\text{rotacional } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

El rotacional del campo vectorial $\vec{F}$ se puede utilizar para determinar si el campo vectorial $\vec{F}$ es independiente de la trayectoria.

Prueba del rotacional para campos vectoriales en tres dimensiones

Suponga que $\vec{F}$ es un campo vectorial en tres dimensiones con derivadas parciales continuas, tal que

- El dominio de $\vec{F}$ tiene la propiedad de que toda curva cerrada en él se puede contraer a un punto de una manera uniforme, permaneciendo en todo tiempo dentro del dominio.
- Rotacional $\vec{F} = \vec{0}$.

Entonces $\vec{F}$ es independiente de la trayectoria, así que $\vec{F}$ es un campo gradiente y tiene una función potencial.

Para la prueba del rotacional en dos dimensiones, el dominio de $\vec{F}$ no debe tener huecos. Esto significó que si $\vec{F}$ estaba definido en una curva cerrada C, entonces también lo estaba en todos los puntos dentro de C. Una manera de probar si hay huecos es intentar "lazarlos" con una curva cerrada. Si toda curva cerrada del dominio puede cerrarse alrededor de un punto sin topar con un hueco, es decir, sin salirse del dominio, entonces el dominio no tiene huecos. En tres dimensiones necesitamos que la misma condición se cumpla; debe ser posible cerrar toda curva alrededor de un punto, como un lazo, sin salirnos fuera del dominio.

Ejemplo 6 Decir si los siguientes campos vectoriales son independientes de la trayectoria y si puede aplicarse la prueba del rotacional.

a) $\vec{F} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ b) $\vec{G} = \dfrac{y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$

Solución

a) Suponga que $f = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$. Entonces $f_x = x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$ y de igual manera grad $f = \vec{F}$. Entonces, $\vec{F}$ es un campo de gradiente y por lo tanto independiente de la trayectoria. Los cálculos demuestran que rotacional $\vec{F} = \vec{0}$. El dominio de $\vec{F}$ es todo el espacio de tres dimensiones excepto el origen, y cualquier curva cerrada en el dominio puede ser llevada a un punto sin salir del dominio. Por lo tanto, es válida la prueba del rotacional.

b) Sea C el círculo $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ recorrido en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde el eje positivo de las z. El campo vectorial es en todas partes tangente a esta curva y de magnitud 1, así que

$$\int_C \vec{G} \cdot d\vec{r} = \|\vec{G}\| \cdot \text{longitud de la curva} = 1 \cdot 2\pi = 2\pi$$

Como la integral alrededor de esta curva cerrada es diferente de cero, $\vec{G}$ es dependiente de la trayectoria. Los cálculos demuestran que rotacional $\vec{G} = \vec{0}$, pero el dominio de $\vec{G}$ es todo en el espacio de tres dimensiones menos el eje z, y no satisface el criterio de dominio de la prueba del rotacional. Por ejemplo, el círculo C rodea el eje z, y no puede ser llevado a un punto sin tocar el eje z. Por lo tanto, no vale la prueba del rotacional.

Problemas para la sección 18.4

1. El ejemplo 1 de la página 382 demostró que el campo vectorial de la figura 18.48 no podía ser campo gradiente, al demostrar que no es independiente de la trayectoria. A continuación se da otra manera de llegar al mismo resultado. Supongamos que el campo vectorial fuera el gradiente de una función f. Dibuje y ponga valores a un diagrama que muestre el aspecto que tendrían los contornos de f, y explique por qué no sería posible para f tener un valor único en ningún punto.

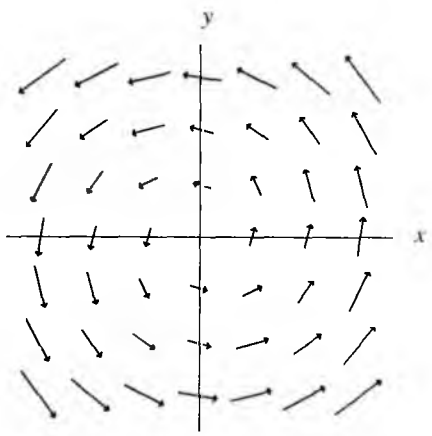


Figura 18.48

2. Repita el problema 1 para el campo vectorial del problema 13 de la página 380.
3. Encuentre f si grad $f = 2xy\vec{i} + (x^2 + 8y^3)\vec{j}$.
4. Encuentre f si $f = (yze^{xyz} + z^2 \cos(xz^2))\vec{i} + xze^{xyz}\vec{j} + (xye^{xyz} + 2xz \cos(xz^2))\vec{k}$.

Para los problemas 5 y 6, diga si el campo vectorial dado es el gradiente de una función f. Si es así, encuentre dicha f; si no, explique por qué no.

5. $y\vec{i} + y\vec{j}$
6. $(x^2 + y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j}$

Los campos vectoriales de los problemas 7 al 10, ¿tienen funciones potenciales, dado que $F = \text{grad } f$? Si es así, calcúlelas.

7. $\vec{F} = (2xy^3 + y)\vec{i} + (3x^2y^2 + x)\vec{j}$
8. $\vec{F} = \dfrac{\vec{i}}{x} + \dfrac{\vec{j}}{y} + \dfrac{\vec{k}}{xy}$
9. $\vec{F} = \dfrac{\vec{i}}{x} + \dfrac{\vec{j}}{y} + \dfrac{\vec{k}}{z}$
10. $\vec{F} = 2x \cos(x^2 + z^2)\vec{i} + \text{sen}(x^2 + z^2)\vec{j} + 2z \cos(x^2 + z^2)\vec{k}$
11. Considere el campo vectorial $\vec{F} = y\vec{i}$.

a) Trace $\vec{F}$ y por lo tanto diga el signo de la circulación de $\vec{F}$ alrededor del círculo unitario con centro en el origen y recorrido en sentido contrario al de las manecillas del reloj.
b) Utilice el teorema de Green para calcular exactamente la circulación de la parte a.

12. Supongamos que $\vec{F} = x\vec{j}$. Demuestre que la integral de línea de $\vec{F}$ alrededor de una curva cerrada del plano xy, orientada como en el teorema de Green, mide el área de la región encerrada por la curva.

Utilice el resultado del problema 12 para calcular el área de la región dentro de las curvas parametrizadas en los problemas 13, 14 y 15. En cada caso, trace la curva.

13. La elipse $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$ parametrizada por $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, para $0 \le t \le 2\pi$.

14. El hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ parametrizado por $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$.

15. La curva de Descartes, $x^3 + y^3 = 3xy$, parametrizada por $x = \dfrac{3t}{1+t^3}, y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$, para $0 \le t \le \infty$.

16. Suponga que R es la región dentro de la mitad superior del círculo unitario, C, con centro en el origen y que se quiere calcular la doble integral

$$\int_R (2x - 2y)e^{x^2+y^2}\, dA$$

a) Explique por qué el convertir esta integral a una integral iterada en coordenadas cartesianas no ayuda a calcularla.
b) Como falla la integración iterada, se usa un método numérico. Demuestre cómo se puede usar el teorema de Green para convertir la integral en una integral de una variable. Luego evalúe la integral de una variable, usando métodos numéricos ordinarios.

18.5 PRUEBA DEL TEOREMA DE GREEN

En esta sección se da una prueba del teorema de Green con base en la fórmula del cambio de variables para integrales dobles. Suponga que el campo vectorial $\vec{F}$ está dado en componentes por

$$\vec{F}(x, y) = F_1(x, y)\vec{i} + F_2(x, y)\vec{j}.$$

Prueba para rectángulos

Se demostrará primero el teorema de Green cuando R es una región rectangular, como se muestra en la figura 18.49. La integral de línea en el teorema de Green puede escribirse como

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_4} \vec{F}\cdot d\vec{r} \\ &= \int_a^b F_1(x, c)\, dx + \int_c^d F_2(b, y)\, dy - \int_a^b F_1(x, d)\, dx - \int_c^d F_2(a, y)\, dy \\ &= \int_c^d (F_2(b, y) - F_2(a, y))\, dy + \int_a^b (-F_1(x, d) + F_1(x, c))\, dx.\end{aligned}$$

Por otra parte, la doble integral del teorema de Green se puede escribir como una integral iterada. Se evalúa la integral interior usando el teorema fundamental del cálculo.

$$\int_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_R \frac{\partial F_2}{\partial x}\, dx\, dy + \int_R -\frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx\, dy$$

$$= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial F_2}{\partial x}\, dx\, dy + \int_a^b \int_c^d -\frac{\partial F_1}{\partial y}\, dy\, dx$$

$$= \int_c^d (F_2(b, y) - F_2(a, y))\, dy + \int_a^b (-F_1(x, d) + F_1(x, c))\, dx.$$

Como la integral de línea y la doble integral son iguales, se ha demostrado el teorema de Green para rectángulos.

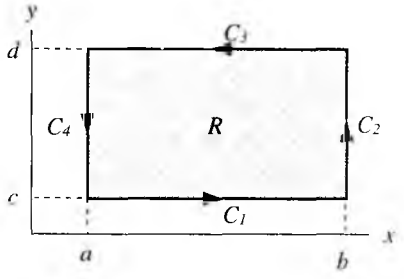


Figura 18.49 Una región rectangular R con frontera C descompuesta en C_1, C_2, C_3 y C_4.

Prueba para regiones parametrizadas por rectángulos

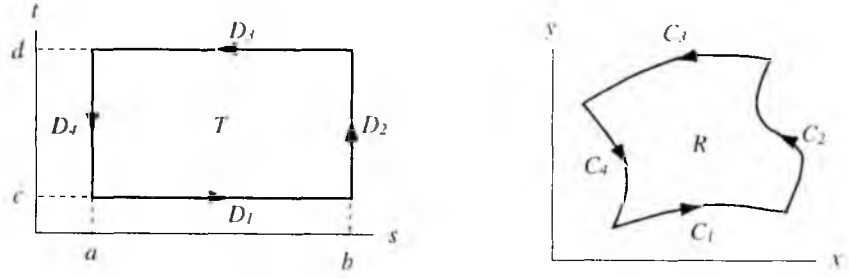


Figura 18.50 Una región curva R del plano xy correspondiente a una región rectangular T del plano st.

Ahora demostramos el teorema de Green para una región R que puede transformarse en una región rectangular. Supongamos que tenemos un cambio liso de coordenadas

$$x = x(s, t), \qquad y = y(s, t)$$

Considere una región curva R del plano xy correspondiente a una región rectangular T del plano st, como en la figura 18.50. Suponemos que el cambio de coordenadas es uno a uno en el interior de T.

Demostramos el teorema de Green para R usando el teorema de Green para T y la fórmula del cambio de variables para integrales dobles de la página 277. Primero expresamos la integral de línea alrededor de C

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

como una integral de línea del plano st alrededor del rectángulo $D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4$. En notación vectorial, el cambio de coordenadas es

$$\vec{r} = \vec{r}\,(s, t) = x\,(s, t)\vec{i} + y\,(s, t)\vec{j}$$

y, por lo tanto,

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F}\,(\vec{r}\,(s, t)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\, ds + \vec{F}\,(\vec{r}\,(s, t)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\, dt.$$

Definimos un campo vectorial $\vec{G}$ en el plano st con componentes

$$G_1 = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \quad \text{y} \quad G_2 = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}.$$

Entonces, si $\vec{u}$ es el vector de posición de un punto del plano st, tenemos $\vec{F} \cdot d\vec{r} = G_1 ds + G_2 dt = \vec{G} \cdot d\vec{u}$. En el problema 5 del final de esta sección se pide demostrar que la fórmula para integrales de línea a lo largo de trayectorias parametrizadas lleva al siguiente resultado:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_D \vec{G} \cdot d\vec{u}.$$

Además, aplicando la regla del producto y la de la cadena podemos demostrar que

$$\frac{\partial G_2}{\partial s} - \frac{\partial G_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$$

(Véase el problema 6 al final de esta sección.) Por lo tanto, por la fórmula del cambio de variables para integrales dobles de la página 277,

$$\int_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_T \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} ds\, dt = \int_T \left(\frac{\partial G_2}{\partial s} - \frac{\partial G_1}{\partial t} \right) ds\, dt.$$

De esta manera se ha demostrado que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_D \vec{G} \cdot d\vec{u}$$

y que

$$\int_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_T \left(\frac{\partial G_2}{\partial s} - \frac{\partial G_1}{\partial t} \right) ds\, dt.$$

Las integrales del lado derecho son iguales, por el teorema de Green para rectángulos; en consecuencia, las integrales del lado izquierdo también son iguales, que es el teorema de Green para la región R.

Unión de regiones

Para terminar, demostramos que el teorema de Green se cumple para una región formada al unir regiones que se pueden transformar en rectángulos. La figura 18.51 muestra dos regiones R_1 y R_2 que se combinan para formar una región R. Descomponemos la frontera de R en C_1, la parte que corresponde a R_1, y C_2, la parte correspondiente a R_2. Hacemos que C sea la parte de la frontera de R_1 que comparte en común con R_2. Por esto,

$$\text{Frontera de } R = C_1 + C_2, \qquad \text{Frontera de } R_1 = C_1 + C, \qquad \text{Frontera de } R_2 = C_2 + (-C).$$

Observe que cuando la curva C es considerada como parte de la frontera de R_2, recibe la orientación opuesta de la que recibe como parte de la frontera de R_1. Entonces

$$\int_{\text{Frontera de } R_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\text{Frontera de } R_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1+C} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2+(-C)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{\text{Frontera de } R} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Así, al aplicar el teorema de Green para R_1 y R_2, obtenemos

$$\int_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{R_1} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy + \int_{R_2} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= \int_{\text{Frontera de } R_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\text{Frontera de } R_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{\text{Frontera de } R} \vec{F}\cdot d\vec{r},$$

que es el teorema de Green para R. Entonces, hemos demostrado el teorema de Green para cualquier región formada al unir regiones que están parametrizadas de manera lisa por rectángulos.

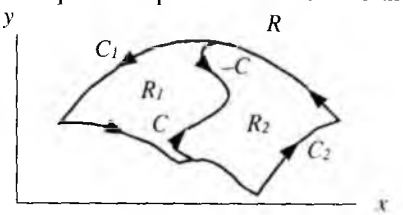


Figura 18.51 Dos regiones R_1 y R_2 unidas para formar una región R.

Ejemplo 1 Sea R el anillo con centro en el origen, con radio interior 1 y radio exterior 2. Mediante coordenadas polares, demostrar que la prueba del teorema de Green es válida para R. Véase la figura 18.52.

Solución En coordenadas polares, $x = r\cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$, el anillo corresponde al rectángulo del plano rt $1 \le r \le 2$, $0 \le t \le 2\pi$. Los lados $t = 0$ y $t = 2\pi$ están unidos en el plano xy a lo largo del eje x; los otros dos lados se convierten en los círculos interior y exterior del anillo. Entonces R se forma al pegar los extremos de un rectángulo.

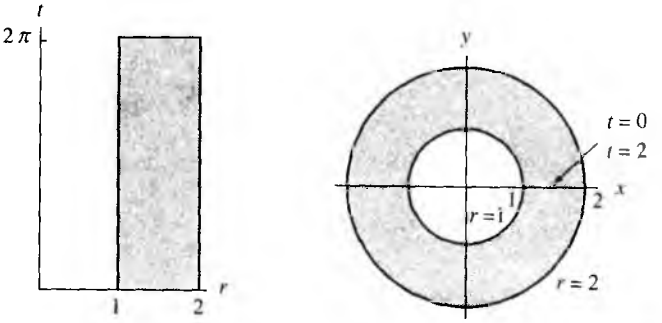


Figura 18.52 El anillo R del plano xy y el rectángulo correspondiente $1 \le r \le 2$, $0 \le t \le 2\pi$ del plano rt.

Problemas para la sección 18.5

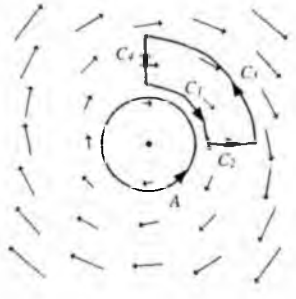
1. Sea R el anillo con centro en $(-1, 2)$, con radio interior 2 y radio exterior 3. Demuestre que R puede ser parametrizada por un rectángulo.
2. Sea R la región bajo el primer arco de la gráfica de la función seno. Demuestre que R puede ser parametrizada por un rectángulo.
3. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones lisas, y suponga que $f(x) \le g(x)$ para $a \le x \le b$. Sea R la región $f(x) \le y \le g(x)$, $a \le x \le b$.
   a) Dibuje una región de este tipo.
   b) Para una constante x_0, parametrice el segmento de línea vertical en R donde $x = x_0$. Seleccione su parametrización de modo que el parámetro empiece en 0 y termine en 1.
   c) Al unir las parametrizaciones del inciso b para diferentes valores de x_0, demuestre que R puede ser parametrizada por un rectángulo.
4. Sean $f(y)$ y $g(y)$ dos funciones uniformes, y suponga que $f(y) \le g(y)$ para $c \le y \le d$. Sea R la región $f(y) \le x \le g(y)$, $c \le y \le d$.
   a) Dibuje una región de este tipo.
   b) Para una constante y_0, parametrice el segmento de línea horizontal R donde $y = y_0$. Seleccione su parametrización de modo que el parámetro empiece en 0 y termine en 1.
   c) Al unir las parametrizaciones del inciso b para diferentes valores de y_0, demuestre que R puede ser parametrizada por un rectángulo.
5. Utilice la fórmula para calcular integrales de línea por parametrización para demostrar el enunciado de la página 394:
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_D \vec{G} \cdot d\vec{u}\,.$$
6. Utilice la regla del producto y la de la cadena para demostrar la fórmula de la página 394:
$$\frac{\partial G_2}{\partial s} - \frac{\partial G_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

PROBLEMAS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO DIECIOCHO

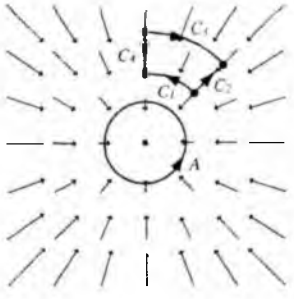
Para los problemas 1 y 2, considere el campo vectorial $\vec{F}$ que se muestra. Diga si se espera que la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ sea positiva, negativa o cero a lo largo de

a) A b) C_1, C_2, C_3, C_4 c) C, la curva cerrada formada por todas las C juntas.

1.



2.



Para los problemas 3, 4 y 5, calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para $\vec{F}$ y C según se indica.

3. $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + (y^2 + x)\vec{j}$ y C es la parábola $y = x^2 + 1$ recorrida de (0, 1) a (1, 2).
4. $\vec{F} = (3x - 2y)\vec{i} + (y + 2z)\vec{j} - x^2\vec{k}$ y C es la trayectoria formada por la línea que une el punto (0, 0, 0) a (1, 1, 1).
5. $\vec{F} = (2x - y + 4)\vec{i} + (5y + 3x - 6)\vec{j}$ y C es el triángulo con vértices (0, 0), (3, 0), (3, 2) recorridos en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Los enunciados de los problemas del 6 al 9, ¿son verdaderos o falsos? Explique por qué o dé un ejemplo en contrario.

6. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es un vector.
7. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F}(Q) - \vec{F}(P)$ cuando P y Q son puntos finales de C.
8. El hecho de que la integral de línea de un campo vectorial $\vec{F}$ sea cero alrededor del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ significa que $\vec{F}$ debe ser un campo vectorial gradiente.
9. Suponga que C_1 es el cuadrado unitario que une los puntos (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1) orientado en el sentido de las manecillas del reloj, y C_2 es el mismo cuadrado, pero recorrido dos veces en dirección opuesta. Si $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 3$, entonces $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -6$.
10. Sea $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ y sean C_1 la línea que une el punto (1, 0) al punto (0, 2) y C_2 la línea que une el punto (0, 2) al punto (−1, 0). Es $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$? Explique.
11. ¿Cuál es el valor de $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si C es una curva orientada que va del punto (2, −6) al punto (4, 4) y $\vec{F} = 6\vec{i} - 7\vec{j}$?
12. Suponga que P y Q están en el mismo contorno de f. ¿Qué se puede decir acerca del cambio total en f de P a Q? Explique su respuesta en términos de $\int_C$ grad $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde C es una parte del contorno que va de P a Q.
13. En este problema, se ve cómo el teorema fundamental para integrales de línea puede derivarse del teorema fundamental para integrales definidas ordinarias. Suponga que $(x(t), y(t))$, para $a \le t \le b$, es una parametrización de C, con puntos extremos $P = (x(a), y(a))$ y $Q = (x(b), y(b))$. Los valores de f a lo largo de C están dados por la función de una sola variable $h(t) = f(x(t), y(t))$.
    a) Utilice la regla de la cadena para demostrar que
    $$h'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$
    b) Utilice el teorema fundamental del cálculo, aplicado a $h(t)$, para demostrar que
    $$\int_C \text{grad } f \cdot d\vec{r} = f(Q) - f(P).$$
14. Sea $\vec{F}(x, y)$ el campo vectorial independiente de la trayectoria de la figura 18.53. El campo vectorial $\vec{F}$ asocia a cada punto un vector unitario que apunta radialmente hacia fuera. Las curvas C_1, C_2, ... , C_7 tienen las direcciones que se muestran. Considere las integrales de línea $\int_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, $i = 1$, ..., 7. Sin calcular ninguna de las integrales
    a) Haga una lista con las integrales de línea que deben ser cero.
    b) Haga una lista con las integrales de línea que deben ser negativas.
    c) Ordene las integrales de línea positivas en lo que considere sea orden ascendente.

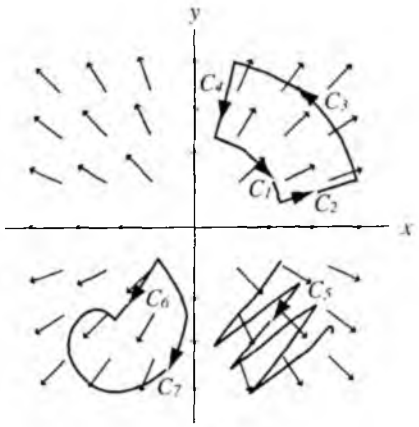


Figura 18.53

15. Un *vórtice libre* que circula alrededor del origen del plano xy (o alrededor del eje z en tres dimensiones) tiene el campo vectorial $\vec{v} = K(x^2 + y^2)^{-1}(-y\vec{i} + x\vec{j})$, donde K es una constante. El modelo de Rankine de un tornado considera la hipótesis de un núcleo interior que gira a velocidad angular constante, rodeado por un vórtice libre. Suponga que el núcleo interior tiene radio de 100 metros y que $\|\vec{v}\| = 3 \cdot 10^5$ m/h a una distancia de 100 metros desde el centro.
    a) Si se supone que el tornado gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj (visto desde arriba del plano xy) y que $\vec{v}$ es continua, determine ω y K tales que
    $$\vec{v} = \begin{cases} \omega(-y\vec{i} + x\vec{j}) & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} < 100 \\ K(x^2 + y^2)^{-1}(y\vec{i} + x\vec{j}) & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \geq 100. \end{cases}$$
    b) Dibuje el campo vectorial $\vec{v}$.
    c) Calcule la circulación de $\vec{v}$ alrededor del círculo de radio r con centro en el origen, recorrido en sentido contrario al de las manecillas del reloj.
16. La figura 18.54 muestra la velocidad tangencial como función del radio para el tornado que azotó Dallas en abril 2 de 1957. Utilícela junto con el problema 15, para estimar K y ω para el modelo Rankine de este tornado.[4]

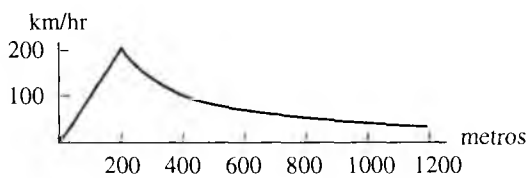


Figura 18.54

17. Un *campo vectorial central* es un campo vectorial cuya dirección es siempre hacia (o alejándose de) un punto fijo O (el centro) y cuya magnitud en un punto P es una función sólo de la distancia de P a O. En dos dimensiones, esto significa que el campo vectorial tiene magnitud constante a lo largo de círculos con centro en O. Los campos gravitacional y eléctrico de fuentes con simetría esférica son campos centrales.

[4] Adaptado de *Encyclopedia Britannica, Macropedia*, Vol. 16, página 477, *"Climate and the Weather", Tornadoes and Waterspouts*, 1991.

CAPÍTULO DIECINUEVE

INTEGRALES DE FLUJO

En el capítulo anterior estudiamos la forma de integrar campos vectoriales a lo largo de curvas. En este capítulo definiremos una nueva clase de integral, la integral de flujo, que corre sobre una superficie en lugar de a lo largo de una curva. Si vemos un campo vectorial como una representación de la velocidad del flujo de un fluido, la integral de flujo nos informa acerca de la rapidez con la que el fluido atraviesa una superficie. La integral de flujo aparece también en teoría de electricidad y magnetismo.

19.1 LA IDEA DE UNA INTEGRAL DE FLUJO

Flujo a través de una superficie

Imaginemos el agua que fluye a través de una red de pesca que se tiende en un arroyo. Supongamos que se desea medir la cantidad de agua que pasa por la red, es decir, el volumen de fluido que cruza la superficie por unidad de tiempo (véase Fig. 19.1.) Esta cantidad (o gasto) de agua recibe el nombre de *flujo* del fluido que atraviesa la superficie. Podemos también calcular el flujo de otros campos vectoriales, tales como los campos eléctrico y magnético, donde no existe un flujo real.



Figura 19.1 El *flujo* mide la rapidez con la que el fluido atraviesa una superficie

Orientación de una superficie

Antes de calcular el flujo de un campo vectorial a través de una superficie, necesitamos determinar cuál es la dirección positiva de flujo a través de la superficie; esto se describe como elección de una orientación.[1]

> En cada punto de una superficie lisa hay dos normales unitarias, una en cada dirección. **Elegir una orientación** quiere decir que se escoge una de estas normales para cada punto de la superficie en una forma continua. El vector normal en la dirección de la orientación se denota por $\vec{n}$. Por lo general, para una superficie cerrada se escoge la dirección que apunta hacia el exterior.

Decimos que el flujo a través de una parte de la superficie es positivo si el flujo tiene lugar en la dirección de la orientación y negativo si ocurre en la dirección opuesta (véase Fig. 19.2.)

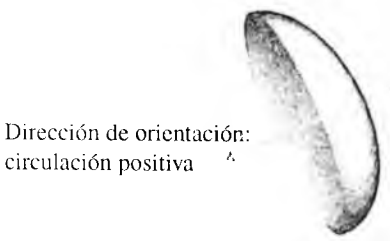


Figura 19.2 Una superficie orientada mostrando direcciones positiva y negativa de flujo.

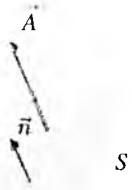


Figura 19.3 Vector de área $\vec{A} = \vec{n}\,A$ de una superficie plana con área A y orientación $\vec{n}$.

[1] Aun cuando no se estudiarán, existen unas pocas superficies para las cuales esto no puede hacerse. Véase página 409.

Vector de área

El flujo que atraviesa una superficie plana depende tanto del área de la superficie como de su orientación. Por lo tanto, es útil representar esta área por un vector como se muestra en la figura 19.3

El **vector de área** de una superficie plana orientada, es un vector $\vec{A}$ tal que

- La magnitud de $\vec{A}$ es el área de la superficie.
- La dirección de $\vec{A}$ es la dirección del vector de orientación $\vec{n}$.

Flujo de un campo vectorial constante a través de una superficie plana

Suponga que el campo vectorial de velocidad, $\vec{v}$, de un fluido es constante y $\vec{A}$ es el vector de área de una superficie plana. El flujo que pasa por esta superficie es el volumen de fluido que pasa en una unidad de tiempo. El volumen de la caja oblicua de la figura 19.4 tiene área de sección transversal $\|\vec{A}\|$ y altura $\|\vec{v}\| \cos\theta$, por lo cual su volumen es $(\|\vec{v}\| \cos\theta)\,\|\vec{A}\| = \vec{v} \cdot \vec{A}$. Entonces tenemos el siguiente resultado:

Si $\vec{v}$ es constante y $\vec{A}$ es el vector de área de una superficie plana, entonces

$$\text{Flujo que pasa por una superficie} = \vec{v} \cdot \vec{A}.$$

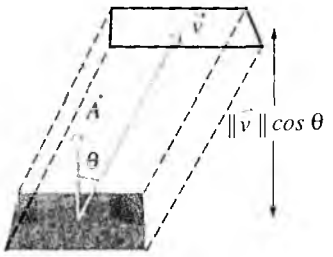


Figura 19.4 El flujo de $\vec{v}$ a través de una superficie con vector de área $\vec{A}$ es el volumen de esta caja sesgada.

Ejemplo 1 Fluye agua por un tubo cilíndrico de 2 cm de radio, con una velocidad de 3 cm/s. Encontrar el flujo del campo vectorial de velocidad que pasa por la región en forma de elipse que se muestra en la figura 19.5. La normal a la elipse hace un ángulo de θ con la dirección de flujo y el área de la elipse es $4\pi/(\cos\theta)$ cm^2.

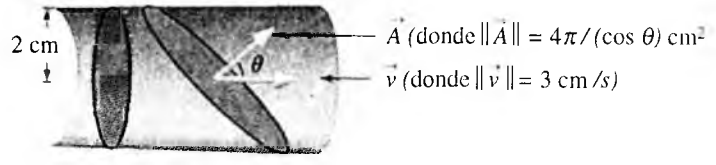


Figura 19.5 Flujo a través de una sección de un tubo cilíndrico en forma de elipse.

Solución Este problema puede abordarse de dos maneras. Una de ellas consiste en utilizar la fórmula que acabamos de derivar y que resulta en

$$\text{Flujo a través de la elipse} = \vec{v} \cdot \vec{A} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{A}\| \cos\theta = 3 \text{ (Área de la elipse) } \cos\theta$$

$$= 3\left(\frac{4\pi}{\cos\theta}\right)\cos\theta = 12\pi \text{ cm}^3/\text{s}.$$

La segunda forma es observar que el flujo que pasa por la elipse es igual al flujo que pasa por el círculo perpendicular al tubo de la figura 19.5. Como el flujo es la rapidez a la que fluye el agua por el tubo, tenemos

$$\text{Flujo por el círculo} = \begin{matrix}\text{velocidad}\\ \text{del agua}\end{matrix} \times \begin{matrix}\text{área}\\ \text{círculo}\end{matrix} = \left(3\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right)(\pi\, 2^2 \text{ cm}^2) = 12\pi \text{ cm}^3/\text{s}$$

Cuando el campo vectorial no es constante o la superficie no es plana, dividimos la superficie en pequeñas secciones, casi planas, tales que el campo vectorial sea aproximadamente constante en cada una, como sigue.

La integral de flujo

Para calcular el flujo de un campo vectorial $\vec{F}$ que no es necesariamente constante a través de una superficie S curva, orientada, dividimos la superficie en un conjunto de pequeñas secciones aproximadamente planas (como una representación en forma de tela de alambre de la superficie) como se muestra en la figura 19.6. Supongamos que un cuadrito tiene área $\Delta\vec{A}$. Escogemos un vector de orientación $\vec{n}$ en un punto del cuadrito y definimos el vector de área del cuadrito, $\Delta\vec{A}$, como

$$\Delta\vec{A} = \vec{n}\Delta A.$$

(Véase Fig. 19.6.) Si los cuadritos son suficientemente pequeños, podemos suponer que $\vec{F}$ es aproximadamente constante en cada uno. Entonces sabemos que

$$\text{Flujo que atraviesa el cuadrito} \approx \vec{F} \cdot \Delta\vec{A}$$

y, por lo tanto,

$$\text{Flujo que atraviesa toda la superficie} \approx \sum \vec{F} \cdot \Delta\vec{A},$$

donde la suma agrega los flujos que atraviesan todas las pequeñas secciones. A medida que cada cuadrito se haga más pequeño y $\|\Delta\vec{A}\| \to 0$, la aproximación mejora y obtenemos

$$\text{Flujo a través de } S = \lim_{\|\Delta\vec{A}\| \to 0} \sum \vec{F} \cdot \Delta\vec{A}.$$

Por lo tanto, hacemos la siguiente definición:

La **integral de flujo** del campo vectorial $\vec{F}$ que atraviesa la superficie orientada S es

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \lim_{\|\Delta\vec{A}\| \to 0} \sum \vec{F} \cdot \Delta\vec{A}.$$

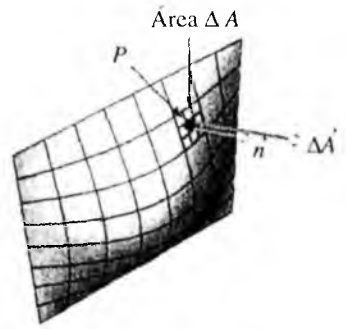


Figura 19.6 Superficie S dividida en pequeñas partes, casi planas, mostrando un vector de orientación típico n y vector de área ΔA.

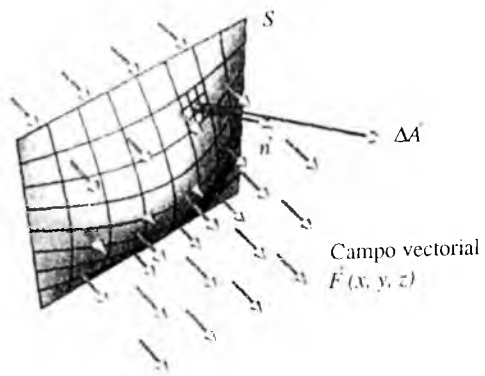


Figura 19.7 Flujo de un campo vectorial a través de una superficie curva S.

Al calcular una integral de flujo, tenemos que dividir la superficie en una forma razonable; de otra manera, el límite podría no existir. En la práctica rara vez se presenta este problema, pero una forma de evitarlo es usar el método para calcular integrales de flujo que se discute en la sección 19.3 como definición de la integral de flujo.

La integral de flujo y el flujo de un fluido

Si v es el campo vectorial de velocidad de un fluido, tenemos

Rapidez con que el fluido atraviesa la superficie S	=	Flujo de v a través de S	=	$\int_S v \cdot dA$

La rapidez de flujo de un fluido se mide en unidades de volumen por unidad de tiempo.

Ejemplo 2 Encontrar el flujo del campo vectorial que se muestra en la figura 19.8, dado por

$$B(x, y, z) = \frac{-yi + xj}{x^2 + y^2},$$

a través del cuadrado S de lado 2 que se muestra en la figura 19.9, orientado en la dirección j.

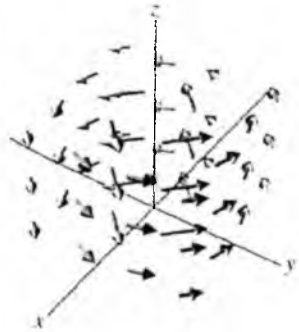


Figura 19.8 El campo vectorial $B(x, y, z) = \dfrac{-yi + xj}{x^2 + y^2}$

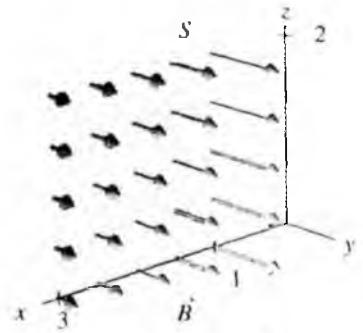


Figura 19.9 Flujo de B a través del cuadrado S de lado 2 del plano xy, orientado en la dirección j.

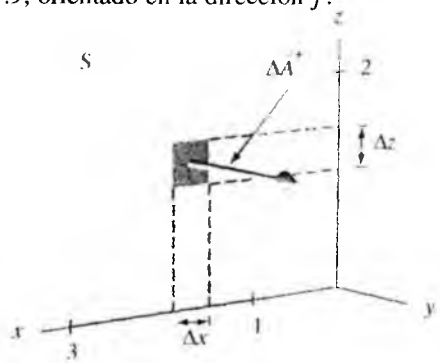


Figura 19.10 Cuadrito con área $\|\Delta A\| = \Delta x \Delta z$

Solución Considere un pedacito rectangular con vector de área $\Delta\vec{A}$ en S, con lados Δx y Δz de modo que $\|\Delta\vec{A}\| = \Delta x\,\Delta z$. Como $\Delta\vec{A}$ apunta en la dirección $\vec{j}$, tenemos $\Delta\vec{A} = \vec{j}\,\Delta x\,\Delta z$ (véase Fig. 19.10.)

En el punto $(x, 0, z)$ en S, al sustituir $y = 0$ en $\vec{B}$ resulta $\vec{B}\,(x, 0, z) = (1/x)\vec{j}$. Entonces tenemos

$$\text{Flujo a través de un cuadrito} \approx \vec{B}\cdot\Delta\vec{A} = \left(\frac{1}{x}\vec{j}\right)\cdot(\vec{j}\,\Delta x\Delta z) = \frac{1}{x}\,\Delta x\,\Delta z.$$

Por lo tanto,

$$\text{Flujo a través de la superficie} = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = \lim_{\|\Delta\vec{A}\|\to 0}\sum \vec{B}\cdot\Delta\vec{A} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta z\to 0}}\sum \frac{1}{x}\,\Delta x\Delta z$$

Esta última expresión es una suma de Riemann para la doble integral $\int_R \frac{1}{x}\,dA$, donde R es el cuadrado $1 \le x \le 3,\ 0 \le z \le 2$. Entonces,

$$\text{Flujo a través de la superficie} = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int_R \frac{1}{x}\,dA = \int_0^2\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx\,dz = 2\ln 3.$$

El resultado es positivo porque el campo vectorial atraviesa la superficie en la dirección positiva.

Ejemplo 3 Cada uno de los campos vectoriales de la figura 19.11 está formado completamente por vectores paralelos al plano xy, y es constante en la dirección z (esto es, el campo vectorial se ve igual en cualquier plano paralelo al plano xy). Para cada uno, determine si el flujo que pasa por una superficie cerrada que rodea el origen será positivo, negativo o cero. En el inciso a, la superficie es un cubo cerrado con caras paralelas a los ejes; en los incisos b y c, la superficie es un cilindro cerrado. En cada caso escogemos la orientación hacia afuera (véase Fig. 19.12.)

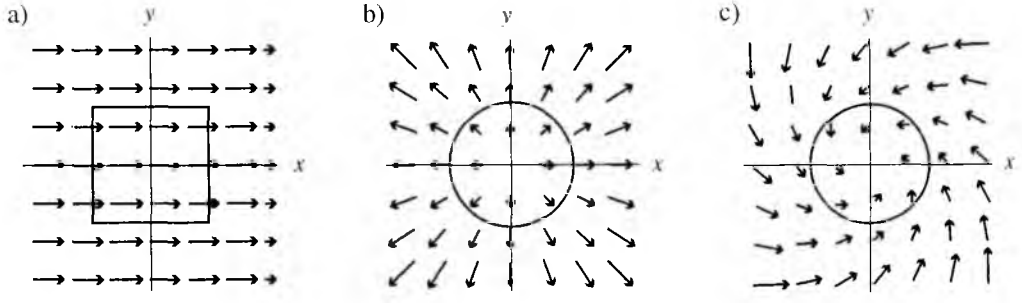


Figura 19.11 Flujo de un campo vectorial a través de superficies cerradas cuyas secciones transversales se muestran en el plano xy.

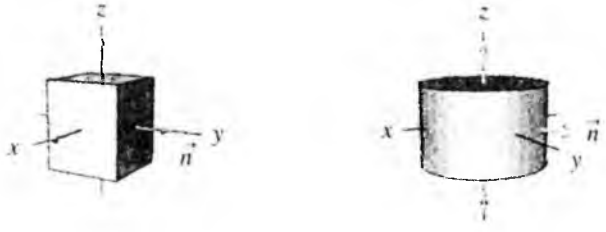


Figura 19.12 Cubo cerrado y cilindro cerrado, ambos orientados hacia afuera.

Solución a) Como el campo vectorial parece ser paralelo a las caras del cubo que son perpendiculares a los ejes y y z, esperamos que el flujo a través de estas caras sea cero. Los flujos a través de las dos caras perpendiculares al eje x parecen ser iguales en magnitud y opuestos en signo, así que el flujo neto debe ser cero.

b) Como las tapas del cilindro son paralelas al flujo, el flujo a través de ellas es cero. En la superficie circular del cilindro, $\vec{v}$ y $\Delta\vec{A}$ parecen ser en todas partes paralelos y en la misma dirección, así que esperamos que cada término $\vec{v} \cdot \Delta\vec{A}$ sea positivo, y por lo tanto la integral de flujo $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{A}$ sea positiva.

c) Al igual que en el inciso b, el flujo a través de las partes superior e inferior del cilindro es cero. En este caso $\vec{v}$ y $\Delta\vec{A}$ no son paralelas a la superficie circular del cilindro, pero como el flujo parece estar fluyendo hacia dentro al tiempo que gira, esperamos que cada término $\vec{v} \cdot \Delta\vec{A}$ sea negativo, y por lo tanto que la integral de flujo sea negativa.

Cálculo de integrales de flujo mediante $d\vec{A} = \vec{n}\, dA$

Para un cuadrito de superficie ΔS con normal $\vec{n}$ y área ΔA, el vector de área es $\Delta\vec{A} = \vec{n}\, \Delta A$. El siguiente ejemplo muestra la forma en que podemos utilizar esta relación para calcular una integral de flujo.

Ejemplo 4 Una carga eléctrica q se coloca en el origen en tres dimensiones. El campo eléctrico resultante $\vec{E}(\vec{r})$ en el punto con vector de posición $\vec{r}$ está dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = q\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}, \qquad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

Encontrar el flujo de $\vec{E}$ fuera de la esfera de radio R con centro en el origen (véase Fig. 19.13).

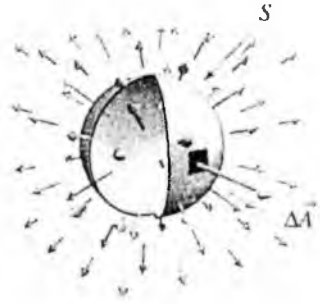


Figura 19.13 Flujo de $\vec{E} = q\vec{r}\,/\,\|\vec{r}\|^3$ a través de la superficie de una esfera de radio R con centro en el origen.

Solución Este campo vectorial apunta radialmente hacia afuera desde el origen, en la misma dirección que $\vec{n}$. Entonces, como $\vec{n}$ es un vector unitario,

$$\vec{E} \cdot \Delta\vec{A} = \vec{E} \cdot \vec{n}\, \Delta A = \|\vec{E}\|\, \Delta A.$$

En la esfera, $\|\vec{E}\| = q/R^2$, así que

$$\int_S E \cdot dA = \lim_{\|\Delta\vec{A}\| \to 0} \sum E \cdot \Delta A = \lim_{\Delta A \to 0} \sum \frac{q}{R^2}\, \Delta A = \frac{q}{R^2} \lim_{\Delta A \to 0} \sum \Delta A.$$

La última suma aproxima el área superficial de la esfera. En el límite, a medida que las subdivisiones se hacen más pequeñas, tenemos

$$\lim_{\Delta A \to 0} \sum \Delta A = \text{Área superficial de esfera.}$$

Por lo tanto, el flujo está dado por

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{R^2} \lim_{\Delta A \to 0} \sum \Delta A = \frac{q}{R^2} \cdot \text{ área superficial de esfera} = \frac{q}{R^2}(4\pi R^2) = 4\pi q.$$

Este resultado se conoce como ley de Gauss.

En lugar de usar sumas de Riemann, con frecuencia escribimos $d\vec{A} = \vec{n}\, dA$, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5 Suponga que S es la superficie del cubo limitada por los seis planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, y $z = \pm 1$. Calcular el flujo hacia afuera del campo eléctrico $\vec{E}$ del ejemplo anterior, a través de S.

Solución Es suficiente calcular el flujo de $\vec{E}$ a través de una de las caras, por ejemplo la cara superior S_1 definida por $z = 1$, donde $-1 \le x \le 1$ y $-1 \le y \le 1$. Por simetría, el flujo de $\vec{E}$ a través de las otras cinco caras de S debe ser el mismo.

En la cara superior, S_1, tenemos $d\vec{A} = \vec{k}\, dx\, dy$ y

$$\vec{E}(x, y, 1) = q \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k}}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}}.$$

La correspondiente integral de flujo está dada por

$$\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = q \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k}}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}} \cdot \vec{k}\, dx\, dy = q \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}}\, dx\, dy.$$

El cálculo numérico de esta integral demuestra que

$$\text{Flujo a través de la cara superior} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} \approx 2.0944q$$

Entonces,

$$\text{Flujo total de } \vec{E} \text{ hacia afuera del cubo} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \approx 6(2.0944q) = 12.5664q$$

El ejemplo 4 de la página 407 demostró que el flujo de $\vec{E}$ a través de una esfera de radio R con centro en el origen es $4\pi q$. Como $4\pi \approx 12.5664$, el ejemplo 5 sugiere que

$$\text{Flujo total de } \vec{E} \text{ fuera del cubo} = 4\pi q.$$

Al calcular exactamente la integral de flujo del ejemplo 5, es posible verificar que los flujos de $\vec{E}$ a través del cubo y la esfera son exactamente iguales. Cuando encontremos el teorema de la divergencia en el capítulo 20 veremos por qué.

Notas acerca de la orientación

En la elección de una orientación pueden presentarse dos dificultades. La primera es que si la superficie no es lisa, puede no tener un vector normal en todos sus puntos. Por ejemplo, un cubo no tiene un vector normal a lo largo de sus aristas. Cuando tenemos una superficie, por ejemplo un cubo, que está formado por un número finito de secciones lisas, escogemos una orientación por separado para cada una. La mejor manera de hacerlo suele ser evidente. Por ejemplo, en el cubo elegimos la orientación hacia afuera en cada cara (véase Fig. 19.14.)

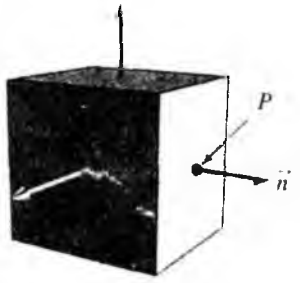


Figura 19.14 El campo vectorial de orientación $\vec{n}$ en la superficie cúbica determinado por la elección del vector unitario normal en el punto P.

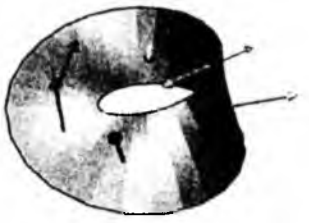


Figura 19.15 La banda de Möbius es un ejemplo de una superficie no orientable.

La segunda dificultad es que hay superficies que no pueden orientarse en absoluto, como la *banda de Möbius* de la figura 19.15.

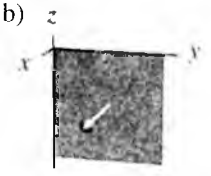
Problemas para la sección 19.1

1. Sea $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{i}$. Para cada una de las superficies de la (a) a la (e), determine si el flujo de $\vec{F}$ que pasa por la superficie es positivo, negativo o cero. En cada caso, la orientación de la superficie está indicada por el vector normal dado.

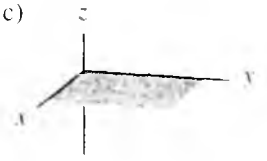
a)



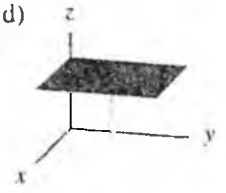
b)



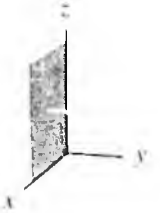
c)



d)



e)



2. Repita el problema 1 con $\vec{F}(x, y, z) = -z\vec{i} + \vec{xk}$
3. Repita el problema 1 con el campo vectorial $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$.

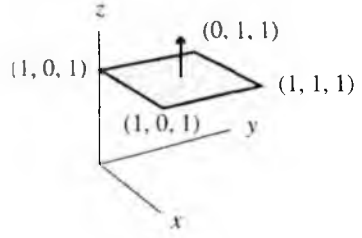
4. Ordene las siguientes integrales de flujo, $\int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{A}$,

con $i = 1, 2, 3, 4$ en orden ascendente si $\vec{F} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y S_i son las siguientes superficies:

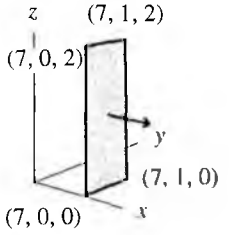
- S_1 es un cuadrado horizontal de lado 1 con un vértice en (0, 0, 2), arriba del primer cuadrante del plano xy, orientado hacia arriba.
- S_2 es un cuadrado horizontal de lado 1 con un vértice en (0, 0, 3), arriba del tercer cuadrante del plano xy, orientado hacia arriba.
- S_3 es un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ del plano xz con un vértice en el origen, un lado a lo largo del eje x positivo, otro a lo largo del eje z negativo, orientado en la dirección y negativa.
- S_4 es un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ con un vértice en el origen, un lado a lo largo del eje y positivo, un vértice en (1, 0, 1), orientado hacia arriba.

5. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ que pasa por cada una de las regiones rectangulares de la (a) a la (d); suponiendo que cada una está orientada como se muestra.

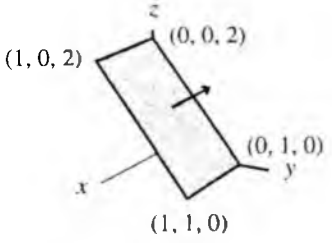
(a)



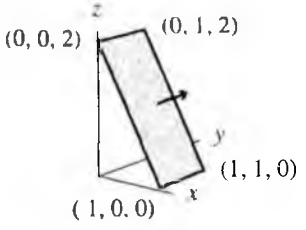
(b)



(c)



(d)



6. La figura 19.16 muestra una sección transversal del campo magnético de la Tierra. Determine si el flujo magnético que pasa por una placa horizontal, orientada hacia el cielo, es positivo, negativo o cero si la placa está en

a) el Polo norte b) el Polo sur c) el ecuador

[Nota: Puede suponerse que los polos magnético y geográfico de la Tierra coinciden.]

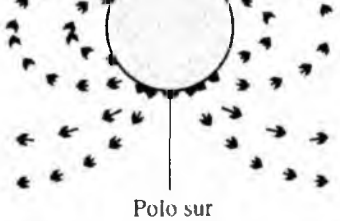


Figura 19.16

7. a) ¿Cuál considera el lector que es el flujo eléctrico a través de la superficie cilíndrica que está colocada como se muestra en el campo eléctrico constante de la figura 19.17? ¿Por qué?
   b) ¿Qué ocurre si el cilindro se coloca hacia arriba cómo se muestra en la figura 19.18? Explique.



Figura 19.17



Figura 19.18

Para los problemas del 8 al 14, calcule la integral de flujo del campo vectorial que pasa por la superficie S dada.

8. $\vec{F} = 2\vec{i}$ y S es un disco de radio 2 en el plano $x + y + z = 2$, orientado hacia arriba.
9. $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ y S es la placa cuadrada del plano yz con vértices en $(0, 1, 1)$, $(0, -1, 1)$, $(0, 1, -1)$ y $(0, -1, -1)$, orientada en la dirección x positiva.
10. $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ y S es el disco del plano xy con radio 2, orientado hacia arriba y con centro en el origen.
11. $\vec{F} = \vec{r}$ y S es el disco de radio 2 paralelo al plano xy orientado hacia arriba y con centro en $(0, 0, 2)$.
12. $\vec{F} = (2 - x)\vec{i}$ y S es el cubo cuyos vértices incluyen los puntos $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 3)$ y orientado hacia afuera.
13. $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + xy\vec{j}$ y S es el cuadrado del plano xy con vértices en $(1, 1, 0)$, $(-1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$, $(-1, -1, 0)$, y orientado hacia arriba.
14. $\vec{F} = \vec{r} / r^2$ y S es la esfera de radio R con centro en el origen, orientada hacia afuera.
15. Sea S el cubo de arista 2, caras paralelas a los planos coordenados y centro en el origen.
    a) Calcule el flujo total del campo vectorial $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ fuera de S, calculando separadamente el flujo que pasa por cada cara.
    b) Calcule el flujo fuera de S para cualquier campo vectorial constante $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.
    c) ¿Tienen sentido sus respuestas a los incisos a y b? Explique.
16. Sea S el tetraedro con vértices en el origen y en $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.
    a) Calcule el flujo total del campo vectorial constante $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ fuera de S calculando separadamente el flujo que pasa por cada cara.
    b) Calcule el flujo fuera de S del inciso a para cualquier campo vectorial constante $\vec{v}$.
    c) ¿Tienen sentido sus respuestas a los incisos a y b? Explique.

17. Suponga que el eje z lleva una densidad de carga eléctrica constante de λ unidades de carga por unidad de longitud, con $\lambda > 0$, y que $\vec{E}$ es el campo eléctrico resultante.

    a) Dibuje el campo eléctrico, $\vec{E}$, del plano xy, dado que

    $$\vec{E}(x, y, z) = 2\lambda \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2 + y^2}.$$

    b) Calcule el flujo de $\vec{E}$ hacia afuera a través del cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, para $0 \le z \le h$.

18. Explique por qué si $\vec{F}$ tiene magnitud constante en S y es en todas partes normal a S y en la dirección de orientación, entonces

    $$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \|\vec{F}\| \cdot \text{área de } S$$

19. Sea $P(x, y, z)$ la presión en el punto (x, y, z) en un fluido. Sea $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{k}$. Sea S la superficie de un cuerpo sumergido en el fluido. Si S está orientada hacia dentro, demuestre que $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$ es la fuerza ascendente sobre el cuerpo, esto es, la fuerza hacia arriba sobre el cuerpo debida a la presión del fluido que lo rodea. [Sugerencia: $\vec{F} \cdot d\vec{A} = P(x, y, z)\vec{k} \cdot d\vec{A} = (P(x, y, z)d\vec{A}) \cdot \vec{k}$.]

20. Considere la función $\rho(x, y, z)$ que indica la densidad de carga eléctrica en puntos del espacio. El campo vectorial $\vec{J}(x, y, z)$ indica la densidad de corriente eléctrica en cualquier punto del espacio y está definido de modo que la corriente que pasa por una pequeña área $d\vec{A}$ está dada por

    $$\text{Corriente a través de una pequeña área} \approx \vec{J} \cdot d\vec{A}.$$

    Suponga que S es una superficie cerrada que comprende un volumen W.

    a) ¿Qué representan las siguientes integrales en términos de electricidad?

    i) $\int_W \rho dV$ ii) $\int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$

    b) Usando el hecho de que una corriente eléctrica a través de una superficie es la rapidez con la que una carga eléctrica atraviesa la superficie por unidad de tiempo, explique por qué

    $$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_W \rho\, dV\right).$$

21. Un fluido está circulando a lo largo de un tubo cilíndrico de radio a en la dirección $\vec{i}$. La velocidad del fluido a una distancia radial r del centro del tubo es $\vec{v} = u(1 - r^2/a^2)\vec{i}$.

    a) ¿Cuál es la importancia de la constante u?
    b) ¿Cuál es la velocidad del fluido en la pared del tubo?
    c) Encuentre el flujo a través de una sección transversal circular del tubo.

22. Suponga que una región en el espacio tiene una temperatura que varía de punto a punto. Sea $T(x, y, z)$ la temperatura en un punto (x, y, z). La ley de Newton del enfriamiento dice que el gradiente de T es proporcional al campo vectorial de flujo de calor, $\vec{F}$, donde $\vec{F}$ apunta en la dirección en la que el calor fluye y tiene magnitud igual a la rapidez de flujo de calor.

    a) Suponga $\vec{F} = k \operatorname{grad} T$ para alguna constante k. ¿Cuál es el signo de k?
    b) Explique por qué tiene sentido esta forma de la ley de Newton del enfriamiento.
    c) Sea W una región de espacio limitada por la superficie S. Explique por qué

    $$\begin{matrix}\text{Rapidez de pérdida} \\ \text{de calor de } W\end{matrix} = k \int_S (\operatorname{grad} T) \cdot d\vec{A}$$

23. Este problema investiga el comportamiento del campo eléctrico producido por un alambre uniformemente cargado, recto e infinitamente largo. (No hay corriente por el alambre; todas las cargas son fijas.) Suponer que el alambre es infinitamente largo quiere decir que podemos considerar que el campo eléctrico es normal a cualquier cilindro que tiene el alambre como eje, y que la magnitud del campo es constante en cualquiera de dichos cilindros. Denote por E_r la magnitud del campo eléctrico debida al alambre en un cilindro de radio r (véase Fig. 19.19.)

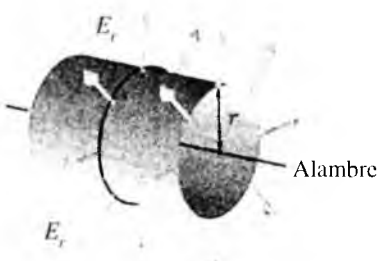


Figura 19.19

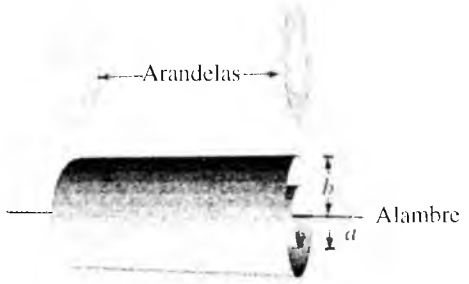


Figura 19.20

Imagine una superficie cerrada S formada por dos cilindros, uno de radio a y otro de radio más grande, b, ambos coaxiales con el alambre, y las dos arandelas que cierran los extremos (véase Fig. 19.20.) Observe que la orientación hacia afuera de S quiere decir que una normal sobre el cilindro exterior apunta alejándose del alambre, y una normal sobre el cilindro interior apunta hacia el alambre.

a) Explique por qué el flujo de $\vec{E}$, el campo eléctrico, a través de las arandelas, es 0.
b) La ley de Gauss expresa que el flujo de un campo eléctrico que pasa por una superficie cerrada S es proporcional a la cantidad de carga eléctrica dentro de S. Explique por qué la ley de Gauss implica que el flujo que pasa por el cilindro interior es el mismo que el flujo que pasa por el cilindro exterior. (Observe que la carga sobre el alambre *no está* dentro de la superficie S.)
c) Utilice el inciso b para demostrar que $E_b/E_a = a/b$.
d) Explique por qué el inciso c demuestra que la intensidad del campo debida a un alambre uniformemente cargado, e infinitamente, largo es proporcional a $1/r$.

24. Considere una lámina plana infinita, uniformemente cubierta con carga. Al igual que en el caso del alambre del problema 23, la simetría demuestra que el campo eléctrico $\vec{E}$ es perpendicular a la lámina y tiene la misma magnitud en todos los puntos que están a la misma distancia de ella. Utilice la ley de Gauss (descrita en el problema 23), para explicar por qué el campo debido a la lámina cargada es el mismo en todos los puntos del espacio fuera de ella, en cualquiera de sus lados. [Sugerencia: Considere el flujo que pasa por la caja con lados paralelos a la hoja que se muestra en la figura 19.21.]

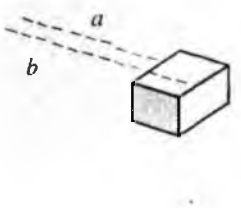


Figura 19.21

19.2 INTEGRALES DE FLUJO PARA GRÁFICAS, CILINDROS Y ESFERAS

En la sección 19.1 calculamos integrales de flujo en ciertos casos sencillos. En esta sección vemos cómo calcular el flujo a través de superficies que son la gráfica de una función, de cilindros y de esferas. En la sección 19.3 veremos cómo calcular un flujo que atraviesa superficies más generales.

Flujo de un campo vectorial a través de la gráfica de $z = f(x, y)$

Suponga que S es la gráfica de la función diferenciable $z = f(x, y)$, orientada hacia arriba, y que $\vec{F}$ es un campo vectorial liso. En la sección 19.1 subdividimos la superficie en cuadritos con vector de área $\Delta\vec{A}$ y definimos el flujo de $\vec{F}$ a través de S como sigue:

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \lim_{\|\Delta\vec{A}\| \to 0} \sum \vec{F} \cdot \Delta\vec{A}.$$

¿Cómo dividimos S en cuadritos? Una forma de hacerlo es por medio de secciones transversales de f con x o y constante y considerar los cuadros de esta representación de malla de alambre de la superficie. Por lo tanto, debemos calcular el vector de área de uno de estos cuadros, que aproximadamente tiene la forma de un paralelogramo.

El vector de área de un pedazo en forma de paralelogramo

Según la definición geométrica del producto cruz de la página 90, el vector $\vec{v} \times \vec{w}$ tiene magnitud igual al área del paralelogramo formado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$, y dirección perpendicular a este paralelogramo siguiendo la regla de la mano derecha. Entonces, tenemos

> Vector de área del paralelogramo $= \vec{A} = \vec{v} \times \vec{w}$.

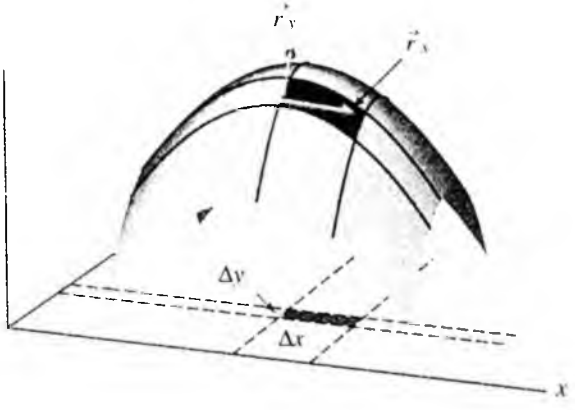


Figura 19.22 Superficie mostrando un rectángulo de parámetro y sus vectores tangentes $\vec{r}_x$ y $\vec{r}_y$.



Figura 19.23 Pedazo en forma de paralelogramo en el plano tangente a la superficie.

Considere el pedazo de superficie arriba de la región rectangular con lados Δx y Δy del plano xy que se muestra en la figura 19.22. Aproximamos el vector de área, $\Delta\vec{A}$, de este pedazo por el vector de

área del pedazo correspondiente en el plano tangente a la superficie. Véase la figura 19.23. Este pedazo es el paralelogramo determinado por los vectores $\vec{v}_x$ y $\vec{v}_y$, así que su vector de área está dado por

$$\Delta\vec{A} \approx \vec{v}_x \times \vec{v}_y.$$

Para encontrar $\vec{v}_x$ y $\vec{v}_y$, observe que un punto sobre la superficie tiene vector de posición $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}$. Por lo tanto, una sección transversal de S con y constante tiene vector tangente

$$\vec{r}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{i} + f_x\vec{k}.$$

y una sección transversal con x constante tiene vector tangente

$$\vec{r}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{j} + f_y\vec{k}.$$

Los vectores $\vec{r}_x$ y $\vec{v}_x$ son paralelos porque ambos son tangentes a la superficie y están en el plano xz. Como la componente x de $\vec{r}_x$ es $\vec{i}$ y la componente de x de $\vec{v}_x$ es $(\Delta x)\vec{i}$, tenemos $\vec{v}_x = (\Delta x)\vec{r}_x$. Análogamente, tenemos $\vec{v}_y = (\Delta y)\vec{r}_y$. Por esta razón, el vector de área que apunta hacia arriba del paralelogramo es

$$\Delta\vec{A} \approx \vec{v}_x \times \vec{v}_y = (\vec{r}_x \times \vec{r}_y)\,\Delta x\,\Delta y = (-f_x\vec{i} - f_y\vec{j} + \vec{k})\,\Delta x\,\Delta y.$$

Ésta es nuestra aproximación del vector de área $\Delta\vec{A}$ sobre la superficie. Al sustituir $\Delta\vec{A}$, Δx, y Δy por $d\vec{A}$, dx y dy, escribimos

$$d\vec{A} = (-f_x\vec{i} - f_y\vec{j} + \vec{k})\,dx\,dy$$

El flujo de $\vec{F}$ a través de una superficie dada por la gráfica de $z = f(x, y)$

Suponga que la superficie S es la parte de la gráfica de $z = f(x, y)$ arriba de la región R del plano xy, y suponga que S está orientada hacia arriba. El flujo de $\vec{F}$ a través de S es

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_R \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot (-f_x\vec{i} - f_y\vec{j} + \vec{k})\,dx\,dy.$$

Ejemplo 1 Calcule $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$ donde $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{k}$ y S es la placa rectangular con esquinas en (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 3), (1, 1, 3), orientada hacia arriba.

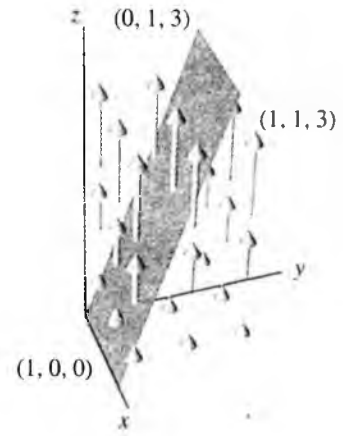


Figura 19.24 El campo vectorial $\vec{F} = z\vec{k}$ sobre la superficie rectangular S.

Solución Encontramos la ecuación para el plano S en la forma $z = f(x, y)$. Como f es lineal, con pendiente x igual a 0 y pendiente y igual a 3, y $f(0, 0) = 0$, tenemos

$$z = f(x, y) = 0 + 0x + 3y = 3y.$$

Entonces, tenemos

$$d\vec{A} = (-f_x\vec{i} - f_y\vec{j} + \vec{k})\,dx\,dy = (0\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})\,dx\,dy = (-3\vec{j} + \vec{k})\,dx\,dy$$

La integral de flujo es, por lo tanto,

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^1 \int_0^1 3y\vec{k} \cdot (-3\vec{j} + \vec{k})\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 3y\,dx\,dy = 1.5.$$

Flujo de un campo vectorial a través de una superficie cilíndrica

Considere el cilindro de radio R con centro en el eje z que se ilustra en la figura 19.25, orientado alejándose del eje z. El pequeño pedazo de superficie, o rectángulo de parámetro, de la figura 19.26, tiene área superficial dada por

$$\Delta A \approx R\Delta\theta\,\Delta z.$$

La normal unitaria hacia afuera $\vec{n}$ apunta en la dirección de $x\vec{i} + y\vec{j}$, por lo que

$$\vec{n} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\|x\vec{i} + y\vec{j}\|} = \frac{R\cos\theta\vec{i} + R\,\text{sen}\,\theta\vec{j}}{R} = \cos\theta\vec{i} + \text{sen}\,\theta\vec{j}.$$

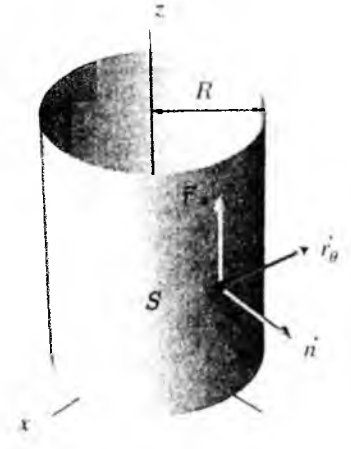


Figura 19.25 Cilindro orientado hacia afuera.

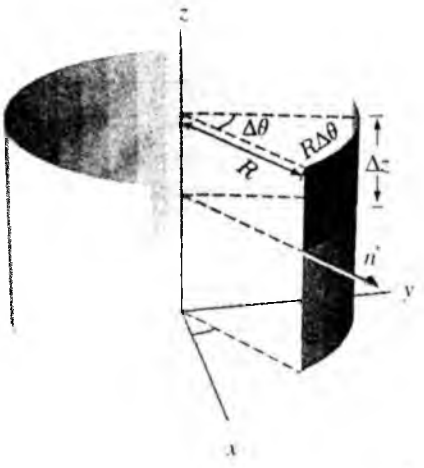


Figura 19.26 Pedacito con área $\Delta\vec{A}$ en la superficie de un cilindro.

Por lo tanto, el vector de área del rectángulo de parámetro está aproximado por

$$\Delta\vec{A} = \vec{n}\,\Delta A \approx (\cos\theta\vec{i} + \text{sen}\,\theta\vec{j})\,R\,\Delta z\,\Delta\theta.$$

Al sustituir $\Delta\vec{A}$, Δz y $\Delta\theta$ por $d\vec{A}$, dz, y $d\theta$, escribimos

$$d\vec{A} = (\cos\theta\vec{i} + \text{sen}\,\theta\vec{j})\,R\,dz\,d\theta$$

Esto da el siguiente resultado:

Flujo de un campo vectorial a través de un cilindro

El flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie cilíndrica S, de radio R y orientada alejándose del eje z, está dado por

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_T \vec{F}(R, \theta, z) \cdot (\cos\theta \vec{i} + \operatorname{sen}\theta \vec{j})\, R\, dz\, d\theta,$$

donde T es la región θz correspondiente a S.

Ejemplo 2 Calcular $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$ donde $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{j}$ y S es la parte del cilindro de radio 2 con centro en el eje z con $x \geq 0$, $y \geq 0$, y $0 \leq z \leq 3$. La superficie está orientada hacia el eje z.

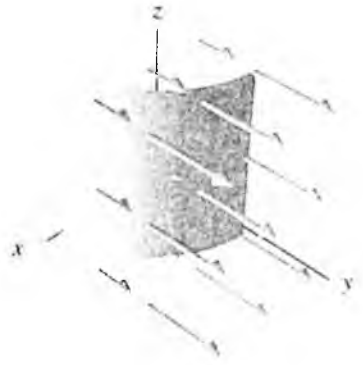


Figura 19.27 El campo vectorial $\vec{F} = y\vec{j}$ sobre la superficie S.

Solución En coordenadas cilíndricas, tenemos $R = 2$ y $\vec{F} = y\vec{j} = 2 \operatorname{sen}\theta \vec{j}$. Como la orientación de S es hacia el eje z, el flujo a través de S está dado por

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = -\int_T 2 \operatorname{sen}\theta \vec{j} \cdot (\cos\theta \vec{i} + \operatorname{sen}\theta \vec{j})\, 2\, dz\, d\theta = -4 \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \operatorname{sen}^2\theta\, dz\, d\theta = -3\pi$$

Flujo de un campo vectorial a través de una superficie esférica

Considere la parte de la esfera de radio R con centro en el origen, orientada hacia afuera, que se ilustra en la figura 19.28. El pequeño rectángulo de parámetro de la figura 19.28 tiene área superficial dada por

$$\Delta A \approx R^2 \operatorname{sen}\phi\, \Delta\phi\, \Delta\theta.$$

La normal unitaria hacia afuera $\vec{n}$ apunta en la dirección de $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, así que

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \operatorname{sen}\phi \cos\theta \vec{i} + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \vec{j} + \cos\phi \vec{k}.$$

Por lo tanto, el vector de área del rectángulo de parámetro está aproximado por

$$\Delta\vec{A} \approx \vec{n}\,\Delta A = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\,\Delta A = \left(\operatorname{sen}\phi\cos\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\phi\ \operatorname{sen}\theta\vec{j} + \cos\phi\vec{k}\right) R^2 \operatorname{sen}\phi\,\Delta\phi\Delta\theta.$$

Al sustituir $\Delta\vec{A}$, $\Delta\phi$, y $\Delta\theta$ por $d\vec{A}$, $d\phi$, y $d\theta$, escribimos

$$d\vec{A} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\,dA = \left(\operatorname{sen}\phi\cos\theta i + \operatorname{sen}\phi\quad \operatorname{sen}\theta j + \cos\phi k\right) R^2 \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta.$$

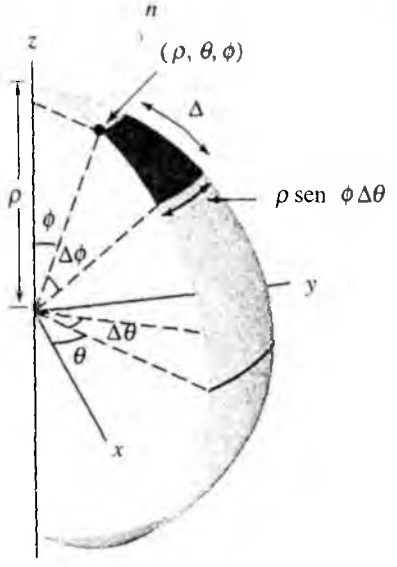


Figura 19.28 Pedacito con área $\Delta\vec{A}$ en la superficie de una esfera.

Por lo tanto, obtenemos el siguiente resultado:

Flujo de un campo vectorial a través de una esfera

El flujo de $\vec{F}$ a través de una superficie esférica S, con radio R y orientada hacia afuera desde el origen, está dado por

$$\int_S \vec{F}\cdot d\vec{A} = \int_S \int_S \vec{F}\cdot\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\,dA$$

$$= \int_T \vec{F}(R,\theta,\phi)\cdot\left(\operatorname{sen}\phi\cos\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\vec{j} + \cos\phi\vec{k}\right) R^2 \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta,$$

donde T es la región $\theta\phi$ correspondiente a S.

Ejemplo 3 Encontrar el flujo de $\vec{F} = z\vec{k}$ a través de S, el hemisferio superior de radio 2 con centro en el origen, orientado hacia afuera.

Solución El hemisferio S está parametrizado por coordenadas esféricas θ y ϕ, con $0 \le \theta \le 2\pi$ y $0 \le \phi \le \pi/2$. Como $R = 2$ y $\vec{F} = z\vec{k} = 2\cos\phi\vec{k}$, el flujo es

$$\int_S \vec{F}\cdot d\vec{A} = \int_S 2\cos\phi\vec{k}\cdot(\operatorname{sen}\phi\cos\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\vec{j} + \cos\phi\vec{k})\,4\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi 2} 8\operatorname{sen}\phi\cos^2\phi\,d\phi\,d\theta = 2\pi\left(8\left(\frac{-\cos^3\phi}{3}\right)\Big|_{\phi=0}^{\pi/2}\right) = \frac{16\pi}{3}.$$

Ejemplo 4 El campo magnético $\vec{B}$ debido a un *dipolo magnético ideal*, $\vec{\mu}$, ubicado en el origen, está definido por

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\vec{\mu}}{\|\vec{r}\|^3} + \frac{3(\vec{\mu}\cdot\vec{r})\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5}.$$

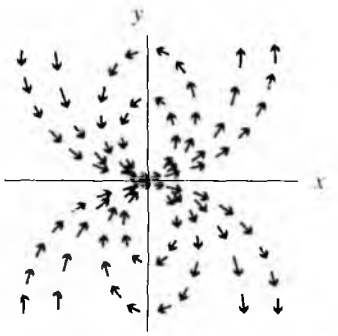


Figura 19.29 El campo magnético de un dipolo, $\vec{i}$, en el origen:
$$\vec{B} = \frac{-\vec{i}}{\|\vec{r}\|^3} + \frac{3(\vec{i}\cdot\vec{r})\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5}.$$

La figura 19.29 muestra un dibujo de $\vec{B}$ en el plano $z = 0$ para el dipolo $\vec{\mu} = \vec{i}$. Obsérvese que $\vec{B}$ es similar al campo magnético de un imán de barra con su polo norte en la punta del vector $\vec{i}$ y su polo sur en la cola del vector $\vec{i}$.

Calcular el flujo de $\vec{B}$ hacia afuera a través de la esfera S con centro en el origen y radio R.

Solución Como $\vec{i}\cdot\vec{r} = x$ y $\|\vec{r}\| = R$ en la esfera de radio R, tenemos

$$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int_S \left(-\frac{\vec{i}}{\|\vec{r}\|^3} + \frac{3(\vec{i}\cdot\vec{r})\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5}\right)\cdot\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\,dA = \int_S \left(-\frac{\vec{i}\cdot\vec{r}}{\|\vec{r}\|^4} + \frac{3(\vec{i}\cdot\vec{r})\|\vec{r}\|^2}{\|\vec{r}\|^6}\right)dA$$

$$= \int_S \frac{2\vec{i}\cdot\vec{r}}{\|\vec{r}\|^4}\,dA = \int_S \frac{2x}{\|\vec{r}\|^4}\,dA = \frac{2}{R^4}\int_S x\,dA,$$

Pero la esfera S está centrada en el origen. Por lo tanto, la contribución a la integral de cada valor x positivo se cancela por la contribución del correspondiente valor x negativo; por ello $\int_S x\,dA = 0$. En consecuencia,

$$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = \frac{2}{R^4}\int_S x\,dA = 0$$

Problemas para la sección 19.2

En los problemas del 1 al 12 calcule el flujo del campo vectorial, $\vec{F}$, a través de la superficie, S.

1. $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + z\vec{j} + 3x\vec{k}$ y S es la parte del plano $z = x + y$ arriba del rectángulo $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$, orientada hacia arriba.

2. $\vec{F} = \vec{r}$ y S es la parte del plano $x + y + z = 1$ arriba del rectángulo $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$, orientada hacia abajo.

3. $\vec{F} = \vec{r}$ y S es la parte de la superficie $z = x^2 + y^2$ arriba del disco $x^2 + y^2 \le 1$, orientada hacia abajo.

4. $\vec{F}(x, y, z) = 2x\vec{j} + y\vec{k}$ y S es la parte de la superficie $z = -y + 1$ arriba del cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, orientada hacia arriba.

5. $\vec{F} = 3x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ y S es la parte de la superficie $z = -2x - 4y + 1$ arriba del triángulo R del plano xy con vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, orientado hacia arriba.

6. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ y S es la parte de la superficie $z = 25 - (x^2 + y^2)$ arriba del disco de radio 5 con centro en el origen, orientada hacia arriba.

7. $\vec{F} = \cos(x^2 + y^2)\vec{k}$ y S es como en el problema 6.

8. $\vec{F} = -y\vec{j} + z\vec{k}$ y S es la parte de la superficie $z = y^2 + 5$ sobre el rectángulo $-2 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, orientada hacia arriba.

9. $\vec{F}(x, y, z) = -xz\vec{i} - yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ y S es el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ para $0 \le z \le 6$, orientado hacia arriba.

10. $\vec{F} = y\vec{i} + \vec{j} - xz\vec{k}$ y S es la superficie $y = x^2 + z^2$, con $x^2 + z^2 \le 1$, orientada en la dirección y positiva.

11. $\vec{F} = xz\vec{i} + y\vec{k}$ y S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \ge 0$, orientado hacia arriba.

12. $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ y S es la superficie triangular orientada que se muestra en la figura 19.30.

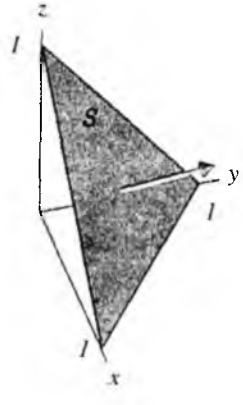


Figura 19.30

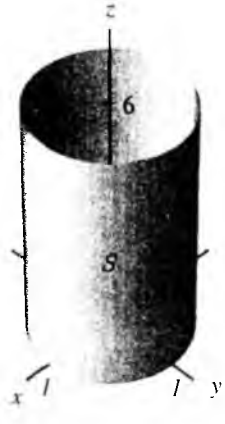


Figura 19.31

En los problemas 13 y 14, calcule el flujo del campo vectorial, $\vec{F}$, a través de la superficie cilíndrica que se muestra en la figura 19.31, orientada lejos del eje z.

13. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$

14. $\vec{F} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^3\vec{k}$

En los problemas 15 y 16, calcule el flujo del campo vectorial, $\vec{F}$, a través de la superficie esférica dada, S.

15. $\vec{F} = z^2\vec{k}$ y S es el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, orientada lejos del origen.

16. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ y S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, orientada hacia afuera.

Para los problemas 17 y 18, una carga eléctrica q se coloca en el origen en tres dimensiones. El campo eléctrico inducido $\vec{E}(\vec{r})$ en el punto con el vector de posición $\vec{r}$ está dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = q\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}, \qquad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

17. Sea S el cilindro abierto de altura $2H$ y radio R dado por $x^2 + y^2 = R^2$, $-H \leq z \leq H$, orientado hacia afuera.

    a) Demuestre que el flujo del campo eléctrico $\vec{E}$, a través de S, está dado por

    $$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi q \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}}.$$

    b) ¿Cuáles son los límites del flujo $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$ si

    i) $H \to 0$ o $H \to \infty$ cuando R es fija?

    ii) $R \to 0$ o $R \to \infty$ cuando H es fija?

18. Sea S el cilindro cerrado, orientado hacia afuera, de altura $2H$ y radio R, cuya superficie curva está dada por $x^2 + y^2 = R^2$, $-H \leq z \leq H$, cuya parte superior está dada por $z = H$, $x^2 + y^2 \leq R^2$, y la inferior por $z = -H$, $x^2 + y^2 \leq R^2$. Utilice el resultado del problema 17 para demostrar que el flujo del campo eléctrico $\vec{E}$ que atraviesa S está dado por

    $$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi q.$$

    Observe que el flujo es independiente de la altura H y del radio R del cilindro.

19. Calcule el flujo de

    $$\vec{F} = (xze^{yz})\vec{i} + xz\vec{j} + (5 + x^2 + y^2)\vec{k}$$

    que pasa por el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ del plano xy, orientado hacia arriba.

20. Calcule el flujo de

    $$\vec{H} = (e^{xy} + 3z + 5)\vec{i} + (e^{xy} + 5z + 3)\vec{j} + (3z + e^{xy})\vec{k}$$

    que pasa por el cuadrado de lado 2 con un vértice en el origen, un lado a lo largo del eje positivo de las y, un lado en el plano xz con $x > 0$, $z > 0$ y la normal $\vec{n} = \vec{i} - \vec{k}$.

19.3 NOTAS SOBRE INTEGRALES DE FLUJO SOBRE SUPERFICIES PARAMETRIZADAS

La mayoría de las integrales de flujo con las que comúnmente nos toparemos pueden calcularse empleando los métodos de las secciones 19.1 y 19.2. En esta sección consideramos brevemente el caso general: cómo calcular el flujo de un campo vectorial liso $\vec{F}$ a través de una superficie orientada, S, parametrizada por

$$\vec{r} = \vec{r}(s, t),$$

para (s, t) en alguna región R del espacio de parámetros. El método es semejante al empleado para gráficas en la sección 19.2. Consideramos un rectángulo de parámetro en la superficie S correspondiente a una región rectangular con lados Δs y Δt del espacio de parámetros (véase Fig. 19.32.)

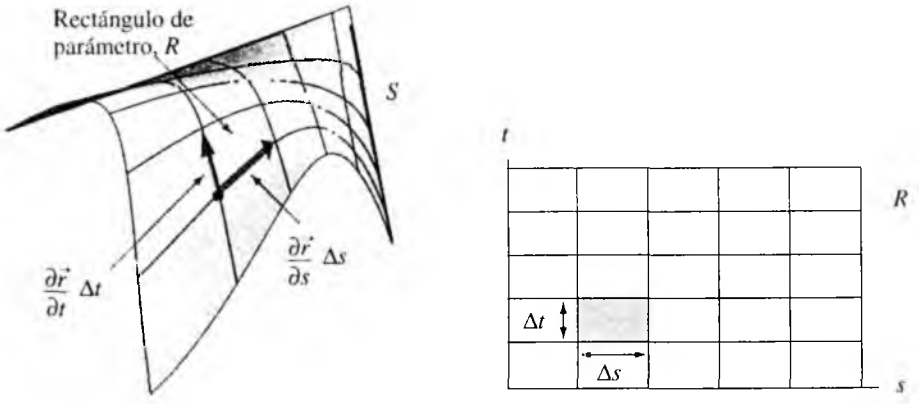


Figura 19.32 Rectángulo de parámetro sobre la superficie S correspondiente a una pequeña región rectangular en el espacio de parámetros, R.

Si Δs y Δt son pequeños, el vector de área $\Delta \vec{A}$ del pedazo es aproximadamente el vector de área del paralelogramo definido por los vectores

$$\vec{r}(s + \Delta s, t) - \vec{r}(s, t) \approx \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\Delta s, \qquad \text{y} \qquad \vec{r}(s, t + \Delta t) - \vec{r}(s, t) \approx \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\Delta t.$$

Entonces

$$\Delta \vec{A} \approx \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\,\Delta s\,\Delta t.$$

Suponemos que el vector $\partial \vec{r}/\partial s \times \partial \vec{r}/\partial t$ nunca es cero y apunta en la dirección del vector unitario normal de orientación $\vec{n}$. Si el vector $\partial \vec{r}/s \times \partial \vec{r}/\partial t$ apunta en la dirección opuesta de $\vec{n}$, invertimos el orden del producto cruz. Al sustituir $\Delta \vec{A}$, Δs y Δt por $d\vec{A}$, ds y dt, escribimos

$$\Delta \vec{A} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) ds\, dt.$$

El flujo de un campo vectorial a través de una superficie parametrizada

El flujo de un campo vectorial liso $\vec{F}$ a través de una superficie S orientada y lisa, parametrizada por $\vec{r} = \vec{r}(s, t)$, donde (s, t) varía en una región de parámetros R, está dado por

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_R \vec{F}(\vec{r}(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) ds\, dt.$$

Escogemos la parametrización de modo que $\partial\vec{r}/\partial s \times \partial\vec{r}/\partial t$ nunca sea cero y apunte en la dirección de $\vec{n}$ en todas partes.

Ejemplo 1 Encontrar el flujo del campo vectorial $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ que pasa por la superficie S, orientada hacia abajo y dada por

$$x = 2s, \quad y = s + t, \quad z = 1 + s - t, \quad \text{donde } 0 \le s \le 1, \quad 0 \le t \le 1.$$

Solución Como S está parametrizada por

$$\vec{r}(s, t) = 2s\vec{i} + (s + t)\vec{j} + (1 + s - t)\vec{k}.$$

tenemos

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad y \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{j} - \vec{k},$$

así que

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Como el vector $-2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ apunta hacia arriba, utilizamos $2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ para la orientación hacia abajo. Entonces, la integral de flujo está dada por

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \int_0^1 \int_0^1 (2s\vec{i} + (s + t)\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k})\, ds\, dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (4s - 2s - 2t)\, ds\, dt = \int_0^1 \int_0^1 (2s - 2t)\, ds\, dt \\ &= \int_0^1 \left(s^2 - 2st \Big|_{s=0}^{s=1} \right) dt = \int_0^1 (1 - 2t)\, dt = t - t^2 \Big|_0^1 = 0. \end{aligned}$$

Área de una superficie parametrizada

El área de ΔA de un pequeño rectángulo de parámetro es la magnitud de su vector de área $\Delta\vec{A}$. Por lo tanto,

$$\text{Área de } S = \sum \Delta A = \sum \| \Delta \vec{A} \| \approx \sum \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right\| \Delta s\, \Delta t.$$

Tomar el límite, a medida que el área del rectángulo de parámetro tiende a cero, nos lleva a la siguiente expresión para el área de S.

Área de una superficie parametrizada

El área de una superficie S que está parametrizada por $\vec{r} = \vec{r}(s, t)$, donde (s, t) varía en una región de parámetros R, está dada por

$$\int_S dA = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right\| ds\, dt.$$

Ejemplo 2 Calcular el área superficial de una esfera de radio a.

Solución Tomamos la esfera S de radio a con centro en el origen y la parametrizamos con coordenadas esféricas ϕ y θ. La parametrización es

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = a \cos \phi, \quad \text{para} \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \phi \le \pi.$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= (a \cos \theta \vec{i} + a \cos \phi \operatorname{sen} \theta \vec{j} - a \operatorname{sen} \phi \vec{k}) \times (-a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \vec{i} + a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \vec{j}). \\ &= a^2 (\operatorname{sen}^2 \phi \cos \theta \vec{i} + \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen} \theta \vec{j} + \operatorname{sen} \phi \cos \phi \vec{k}). \end{aligned}$$

y así

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = a^2 \operatorname{sen} \phi.$$

Entonces, vemos que el área superficial de la esfera S está dada por

$$\text{Área superficial} = \int_S dA = \int_R \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| d\phi\, d\theta = \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} a^2 \operatorname{sen} \phi\, d\theta\, d\phi = 4\pi a^2.$$

Problemas para la sección 19.3

En los problemas del 1 al 5 calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}$ a través de la superficie parametrizada S.

1. $\vec{F} = z\vec{k}$ y S está orientada hacia el eje z y dada por
$$x = s + t, \quad y = s - t, \quad z = s^2 + t^2, \quad 0 \le s \le 1, \ 0 \le t \le 1.$$
2. $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$ y S está orientada alejándose del eje z y dada por
$$x = 3 \operatorname{sen} s, \quad y = 3 \cos s, \quad z = t + 1, \quad 0 \le s \le \pi, \ 0 \le t \le 1.$$
3. $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j}$ y S está orientada hacia arriba y dada por
$$x = s^2, \quad y = 2s + t^2, \quad z = 5t, \quad 0 \le s \le 1, \ 1 \le t \le 3.$$
4. $\vec{F} = -\frac{2}{x}\vec{i} + \frac{2}{y}\vec{j}$ y S está orientada hacia arriba y parametrizada por a y θ, donde
$$x = a \cos \theta, \quad y = a \operatorname{sen} \theta, \quad z = \operatorname{sen} a^2, \quad 1 \le a \le 3, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

5. $\vec{F} = x^2y^2z\vec{k}$ y S es el cono $\sqrt{x^2 + y^2} = z$, con $0 \le z \le R$, orientado hacia abajo. Parametrice el cono usando coordenadas cilíndricas (véase Fig. 19.33.)

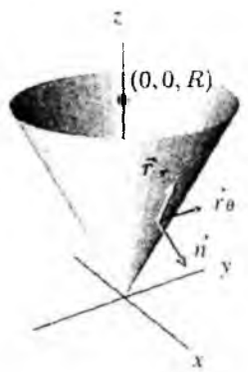


Figura 19.33

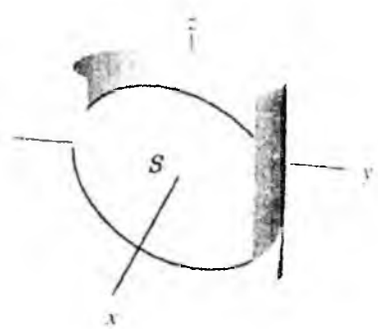


Figura 19.34

6. Encuentre el área de la elipse S recortada en el plano $2x + y + z = 2$ por el cilindro circular $x^2 + y^2 = 2x$. (véase Fig. 19.34.)

7. Evalúe $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$, donde $\vec{F} = (bx/a)\vec{i} + (ay/b)\vec{j}$ y S es el cilindro elíptico orientado lejos del eje z, y dado por $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $|z| \le c$, donde a, b, c son constantes positivas.

8. Considere la superficie S formada al girar la gráfica de $y = f(x)$ alrededor del eje x entre $x = a$ y $x = b$. Suponga que $f(x) \ge 0$ para $a \le x \le b$. Demuestre que el área superficial de S es $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$.

Como hicimos notar en la sección 19.1, el límite que define una integral de flujo pudiera no existir si subdividimos la superficie de un modo equivocado. Una manera de evitar esto es tomar la fórmula para una integral de flujo sobre una superficie parametrizada que hemos desarrollado en la sección 19.3, y usarla como la *definición* de la integral de flujo. En los problemas del 9 al 12 exploramos la manera en que esto funciona.

9. Utilice una parametrización para verificar la fórmula para una integral de flujo sobre la gráfica de una superficie de la página 415.

10. Utilice una parametrización para verificar la fórmula para una integral de flujo sobre una superficie cilíndrica de la página 417.

11. Utilice una parametrización para verificar la fórmula para una integral de flujo sobre una superficie esférica de la página 418.

12. Un problema al definir la integral de flujo empleando una parametrización es que la integral parece depender de la elección de la parametrización. Sin embargo, el flujo a través de una superficie no debería depender de cómo es que se parametriza la superficie. Suponga que la superficie S tiene dos parametrizaciones, $\vec{r} = \vec{r}(s, t)$, para (s, t) en la región R del espacio st, y también $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ para

(u, v) en la región T en el espacio uv, y suponga que las dos parametrizaciones están relacionadas por el cambio de variables

$$u = u(s, t) \qquad v = v(s, t).$$

Suponga que el determinante jacobiano $\partial (u,v)/\partial (s, t)$ es positivo en todo punto (s, t) en R. Utilice la fórmula del cambio de variables para integrales dobles de la página 277 para demostrar que el cálculo de la integral de flujo mediante cualquier parametrización da el mismo resultado.

PROBLEMAS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO DIECINUEVE

Para los problemas 1 y 2, sea $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ y sea S una placa cuadrada perpendicular al eje z y centrada en el eje z. Trace, como función del tiempo, el flujo de $\vec{F}$ a través de S a medida que S se mueve en la forma indicada.

1. S se mueve desde un punto muy alto sobre el eje z positivo hasta muy abajo del eje z negativo. Suponga que S está orientada hacia arriba.
2. S gira alrededor de un eje paralelo al eje x, que pasa por el centro de S. Suponga que S está muy arriba del eje z de modo que $\vec{r}$ es aproximadamente constante sobre S a medida que S gira, y que S está inicialmente orientada hacia arriba.
3. Repita los problemas 1 y 2 con $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}/r^3$, donde $\vec{r} = \|\vec{r}\|$.

Para los problemas del 4 al 7 encuentre el flujo del campo vectorial constante $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ que pasa a través de la superficies dadas.

4. Un disco de radio 2 del plano xy orientado hacia arriba.
5. Una placa triangular de área 4 del plano yz orientada en la dirección x positiva.
6. Una placa cuadrada de área 4 del plano yz orientada en la dirección x positiva.
7. La placa triangular con vértices (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), orientada lejos del origen.

En los problemas del 8 al 15 calcule el flujo del campo vectorial dado, $\vec{F}$, que pasa por la superficie S dada.

8. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + (z^2 + 3)\vec{k}$ y S es el rectángulo $z = 4$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$, orientado en la dirección z positiva.
9. $\vec{F} = z\vec{i} + y\vec{j} + 2x\vec{k}$ y S es el rectángulo $z = 4$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$, orientado en la dirección z positiva.
10. $\vec{F} = (x + \cos z)\vec{i} + y\vec{j} + 2x\vec{k}$ y S es el rectángulo $x = 2$, $0 \le y \le 3$, $0 \le z \le 4$, orientado en la dirección x positiva.
11. $\vec{F} = x^2\vec{i} + (x + e^y)\vec{j} - \vec{k}$, y S es el rectángulo $y = -1$, $0 \le x \le 2$, $0 \le z \le 4$, orientado en la dirección y negativa.
12. $\vec{F} = (5 + xy)\vec{i} + z\vec{j} + yz\vec{k}$ y S es la placa cuadrada de 2×2 en el plano yz con centro en el origen, orientada en la dirección x positiva.

13. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ y S es la superficie de un cilindro cerrado de radio 2 y altura 3 con centro en el eje z y base en el plano xy.

14. $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$ y S es la superficie de un cilindro cerrado de radio 1 con centro en el eje z con base en el plano $z = -1$ y la parte superior en el plano $z = 1$.

15. $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z\vec{k}$ y S es el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, orientado hacia arriba con $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

16. Suponga que fluye agua por un tubo cilíndrico de 2 cm de radio y que la rapidez es $(3 - (3/4)r^2)$ cm/s a una distancia de r cm del centro del tubo. Encuentre el flujo a través de la sección transversal circular del tubo, orientada de modo que el flujo sea positivo.

17. Suponga que $\vec{E}$ es un campo eléctrico *uniforme* en tres dimensiones, de modo que $\vec{E}(x, y, z) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, para todos los puntos (x, y, z), donde a, b y c son constantes. Demuestre, con argumentos de simetría, que el flujo de $\vec{E}$ a través de cada una de las siguientes superficies cerradas S es cero:

    a) S es el cubo limitado por los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, y $z = \pm 1$
    b) S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
    c) S es el cilindro limitado por $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, y $z = 2$

18. Según la ley de Coulomb, el campo electrostático $\vec{E}$ en el punto con vector de posición $\vec{r}$ en tres dimensiones, debido a una carga q en el origen, está dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = q\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}.$$

    Sea S_a la esfera orientada hacia afuera en tres dimensiones, de radio $a > 0$ y centro en el origen. Demuestre que el flujo del campo eléctrico resultante $\vec{E}$ a través de la superficie S_a es igual a $4\pi q$, para cualquier radio a. Ésta es la ley de Gauss para una sola carga puntual.

19. Un alambre recto infinitamente largo colocado a lo largo del eje z lleva una corriente eléctrica I que circula en la dirección $\vec{k}$ positiva. La ley de Ampère en magnetostática estipula que la corriente origina un campo magnético $\vec{B}$ dado por

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{I}{2\pi}\frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}.$$

    a) Dibuje el campo $\vec{B}$ en el plano xy.
    b) Suponga que S_1 es un disco con centro en $(0, 0, h)$, radio a y paralelo al plano xy, orientado en la dirección $\vec{k}$. ¿Cuál es el flujo de $\vec{B}$ a través de S_1? ¿Es razonable su respuesta?
    c) Suponga que S_2 es el rectángulo dado por $x = 0$, $a \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq h$, y orientado en la dirección $-\vec{i}$. ¿Cuál es el flujo de $\vec{B}$ a través de S_2? ¿Le parece razonable su respuesta?

20. Un *dipolo eléctrico ideal* en electrostática se caracteriza por su posición en tres dimensiones y su vector de momento dipolar $\vec{p}$. El campo eléctrico $\vec{D}$, en el punto con vector de posición $\vec{r}$, de un dipolo eléctrico ideal situado en el origen con momento dipolar $\vec{p}$, está dado por

$$\vec{D}(\vec{r}) = 3\frac{(\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5} - \frac{\vec{p}}{\|\vec{r}\|^3}.$$

    Suponga que $\vec{p} = p\vec{k}$, de modo que el dipolo apunta en la dirección $\vec{k}$ y tiene magnitud p.

a) ¿Cuál es el flujo de $\vec{D}$ a través de una esfera S con centro en el origen y radio $a > 0$?

b) El campo $\vec{D}$ es una aproximación útil al campo eléctrico $\vec{E}$ producido por dos cargas "iguales y opuestas" q en $\vec{r}_2$ y $-q$ en $\vec{r}_1$, cuando la distancia $\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$ es pequeña. El momento dipolar de esta configuración de cargas está definido como $q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$. La ley de Gauss en electrostática estipula que el flujo de $\vec{E}$ que pasa por S es igual a 4π veces la carga total encerrada por S. ¿Cuál es el flujo de $\vec{E}$ que pasa por S si las cargas en $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_1$ están encerradas por S? ¿Cómo se compara esto con su respuesta para el flujo de $\vec{D}$ que pasa por S si $p = q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$?

io $a > 0$?
os cargas "iguales
momento dipolar
s en electrostática
l encerrada por S.
las por S? ¿Cómo
$r_2 - r_1$)?

CAPÍTULO VEINTE

CÁLCULO DE CAMPOS VECTORIALES

Hemos visto dos maneras de integrar campos vectoriales en tres dimensiones, a lo largo de curvas y sobre superficies, ahora veremos dos maneras de diferenciarlos. Si vemos un campo vectorial como el campo de velocidades de un fluido, entonces un método de diferenciación (la divergencia) nos indica la intensidad neta del flujo que emana de un punto, y el otro método (el rotacional), la intensidad de rotación del flujo alrededor de un punto. Cada uno de estos dos métodos se acopla con una de las modalidades de integración para formar un análogo vectorial del teorema fundamental del cálculo: el teorema de la divergencia, que relaciona la divergencia con la integral de flujo, y el teorema de Stokes, que relaciona el rotacional con la circulación alrededor de una trayectoria cerrada.

20.1 LA DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL

Imagine que los campos vectoriales de las figuras 20.1 y 20.2 son campos vectoriales de velocidad que describen el flujo de un fluido.[1] La figura 20 sugiere que el flujo emana del origen; por ejemplo, podría representar la nube de materia en expansión en la teoría de la gran explosión que dio origen al universo. Decimos que el origen es una *fuente*. La figura 20.2 sugiere que el flujo se pierde en el origen; en este caso decimos que el origen es un *sumidero*.

En esta sección utilizaremos el flujo a través de una superficie cerrada alrededor de un punto para medir en dicho punto la cantidad de flujo que sale por unidad de volumen, también llamada *divergencia* o *densidad de flujo.*.

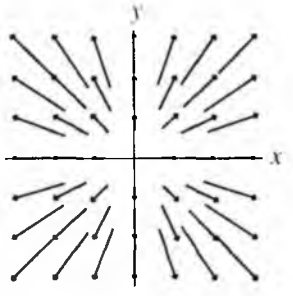


Figura 20.1 Campo vectorial mostrando una fuente.

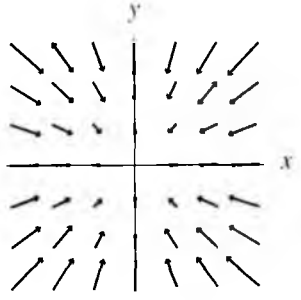


Figura 20.1 Campo vectorial mostrando un sumidero.

Definición de divergencia

Para medir la cantidad de flujo de un campo vectorial que sale por unidad de volumen en un punto, calculamos el flujo a través de una pequeña esfera con centro en el punto, dividido entre el volumen encerrado por la esfera; luego tomamos el límite del cociente entre este flujo y el volumen, a medida que la esfera se contrae alrededor del punto.

Definición geométrica de divergencia

La divergencia, o densidad de flujo, de un campo vectorial uniforme, $\vec{F}$, escrito **div** $\vec{F}$, es una función escalar definida por

$$\text{Div } \vec{F}\,(x, y, z) = \lim_{\text{volumen} \to 0} \frac{\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A}}{\text{Volumen de } S}$$

Aquí, S es una esfera con centro en (x, y, z), orientada hacia afuera, que se contrae a (x, y, z) en el límite.

[1] Aunque no todos los campos vectoriales representan flujos físicamente plausibles, es útil imaginarlos de este modo.

El límite se puede calcular usando igualmente otros cuerpos geométricos, tales como los cubos del ejemplo 2. El problema 2 de la página 475 explica por qué se justifica esto.

Definición de divergencia en coordenadas cartesianas

Si $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$, entonces

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Ejemplo 1 Calcular la divergencia de $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ en el origen.

a) Usando la definición geométrica.

b) Usando la definición en coordenadas cartesianas.

Solución a) En el ejemplo 4 de la página 407, encontramos que el flujo de $\vec{F}$ fuera de la esfera de radio a, con centro en el origen, era de $4\pi a^3$. Por lo tanto,

$$\operatorname{div} \vec{F}\,(0, 0, 0) = \lim_{a \to 0} \frac{\text{Flujo}}{\text{Volumen}} = \lim_{a \to 0} \frac{4\pi a^3}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \lim_{a \to 0} 3 = 3.$$

b) En coordenadas, $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, por lo cual

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

El siguiente ejemplo demuestra que la divergencia puede ser negativa si hay entrada neta de flujo a ese punto.

Ejemplo 2 a) Mediante la definición geométrica, encontrar la divergencia de $\vec{v} = -x\vec{i}$ en: (*i*) (0, 0, 0) (*ii*) (2, 2, 0).

b) Confirmar que la definición en coordenadas produce los mismos resultados.

Solución a) i) El campo vectorial de $\vec{v} = -x\vec{i}$ es paralelo al eje x, como se muestra en la figura 20.3. Para calcular la densidad de flujo utilizamos un cubo S_1, con centro en el origen y aristas paralelas a los ejes, de longitud $2c$. Entonces el flujo a través de las caras perpendiculares a los ejes y y z es cero (porque el campo vectorial es paralelo a estas caras). En las caras perpendiculares al eje x, el campo vectorial y la normal hacia afuera son paralelas pero apuntan en direcciones opuestas. En la cara situada en $x = c$, tenemos

$$\vec{v} \cdot \Delta\vec{A} = -c\,\|\Delta\vec{A}\|.$$

En la cara en $x = -c$, el producto punto sigue siendo negativo, y

$$\vec{v} \cdot \Delta\vec{A} = -c\,\|\Delta\vec{A}\|.$$

Por lo tanto, el flujo a través del cubo está dado por

$$\int_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{cara } x = -c} \vec{v} \cdot d\vec{A} + \int_{\text{cara } x = c} \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

$$= -c \cdot \text{Área de una cara} + (-c) \cdot \text{Área de la otra cara} = -2c\,(2c)^2 = -8c^3$$

Entonces,

$$\operatorname{div} \vec{v}\,(0, 0, 0) = \lim_{\text{Volumen} \to 0} \frac{\int_S \vec{v} \cdot d\vec{A}}{\text{volumen del cubo}} = \lim_{c \to 0} \left(\frac{-8c^3}{(2c)^3}\right) = -1.$$

Como el campo vectorial apunta hacia adentro, al plano yz, es lógico que la divergencia sea negativa en el origen.

ii) Tome S_2 como un cubo igual que antes, pero esta vez con centro en el punto (2, 2, 0). Véase la figura 20.3. Al igual que antes, el flujo a través de las caras perpendiculares a los ejes y y z es cero. En la cara en $x = 2 + c$,

$$\vec{v} \cdot \Delta\vec{A} = -(2 + c)\ \|\Delta\vec{A}\|.$$

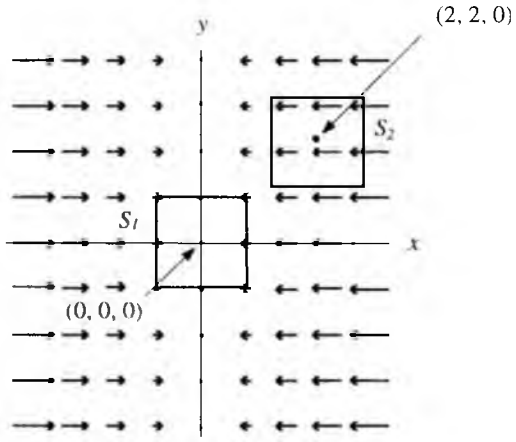


Figura 20.3 Campo vectorial $\vec{v} = -x\vec{i}$

En la cara en $x = 2 - c$ con normal hacia afuera, el producto punto es positivo, y

$$\vec{v} \cdot \Delta\vec{A} = -(2 - c)\ \|\Delta\vec{A}\|.$$

Por lo tanto, el flujo que pasa por el cubo está dado por

$$\int_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{cara } x=2-c} \vec{v} \cdot d\vec{A} + \int_{\text{cara } x=2+c} \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Entonces, como antes,

$$\operatorname{div} \vec{v}\,(2, 2, 0) = \lim_{\text{volumen} \to 0} \frac{\int_S \vec{v} \cdot d\vec{A}}{\text{volumen del cubo}} = \lim_{c \to 0} \left(\frac{-8c^3}{(2c)^3}\right) = -1$$

Aun cuando el campo vectorial fluye alejándose del punto (2, 2, 0) hacia la izquierda, este fluj saliente es menor en magnitud que el flujo hacia adentro por la derecha, de manera que el fluj neto de salida es negativo.

b) Como $\vec{v} = -x\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$, la fórmula resulta en

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(-x) + \frac{\partial}{\partial y}(0) \frac{\partial}{\partial z}(0) = -1 + 0 + 0 = -1.$$

¿Por qué las dos definiciones de divergencia dan el mismo resultado?

La definición geométrica define div $\vec{F}$ como la densidad de flujo de $\vec{F}$. Para ver por qué la definició en coordenadas es también la densidad de flujo, imagine el cálculo de la salida de flujo de una pequeña superficie S en forma de caja en (x_0, y_0, z_0) con lados de longitud Δx, Δy, Δz paralelos a los ejes. En S_1 (la cara posterior de la caja que se muestra en la figura 20.4, donde $x = x_0$), la normal hacia afuera apunta en la dirección x negativa, así que $d\vec{A} = -dy\, dz\, \vec{i}$. Si se supone que $\vec{F}$ es aproximadamente constante en S_1, tenemos

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{S_1} \vec{F} \cdot (-\vec{i}\,)\, dy\, dz \approx -F_1(x_0, y_0, z_0) \int_{S_1} dy\, dz$$

$$= -F_1(x_0, y_0, z_0) \cdot \text{Área de } S_1 = -F_1(x_0, y_0, z_0)\, \Delta y\, \Delta z.$$

En S_2, la cara donde $x = x_0 + \Delta x$, la normal hacia afuera apunta en la dirección x positiva, así que $d\vec{A} = dy\, dz\, \vec{i}$. Por lo tanto,

$$\int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{i}\; dy\, dz \approx F_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) \int_{S_2} dy\, dz$$

$$= -F_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) \cdot \text{Área de } S_2 = F_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)\, \Delta y\, \Delta z.$$

Entonces

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} \approx F_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)\, \Delta y \Delta z - F_1(x_0, y_0, z_0)\, \Delta y\, \Delta z$$

$$= \frac{F_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - F_1(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z.$$

$$\approx \frac{\partial F_1}{\partial x}\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z.$$

Por un argumento análogo, la contribución al flujo de S_3 y S_4 (las superficies perpendiculares al eje y) es aproximadamente

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z.$$

y la contribución al flujo de S_5 y S_6 es aproximadamente

$$\frac{\partial F_3}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Entonces, al sumar estas contribuciones, tenemos

$$\text{Flujo total a través de } S \approx \frac{\partial F_1}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z + \frac{\partial F_2}{\partial y}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z + \frac{\partial F_3}{\partial z}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Como el volumen de la caja es $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, la densidad de flujo es

$$\frac{\text{Flujo total a través de } S}{\text{Volumen de la caja}} \approx \frac{\dfrac{\partial F_1}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z + \dfrac{\partial F_2}{\partial y}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z + \dfrac{\partial F_3}{\partial z}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

El problema 2 de la página 476 contiene una justificación más detallada de que las dos definiciones dan el mismo resultado.

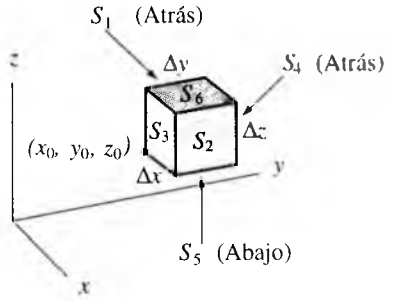


Fig. 20.4 Caja utilizada para encontrar div $\vec{F}$ en (x_0, y_0, z_0)

Campos vectoriales sin divergencia

Se dice que un campo vectorial $\vec{F}$ carece de divergencia o es *solenoidal* si $\operatorname{div}\vec{F} = 0$ en todas partes donde $\vec{F}$ está definida.

Ejemplo 3 La figura 20.5 muestra, para tres valores de la constante p, el campo vectorial

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^p}, \qquad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

a) Encontrar una fórmula para $\operatorname{div}\vec{E}$.

b) ¿Hay un valor de p para el que $\vec{E}$ sea solenoidal? Si es así, encontrarlo.

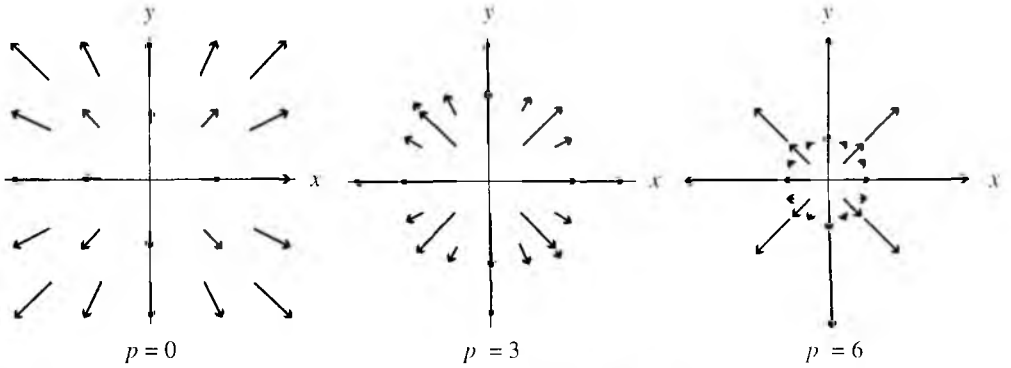


Figura 20.5 El campo vectorial $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{r}/\|\vec{r}\|^p$ para $p = 0$, 3 y 6.

Solución a) Las componentes de $\vec{E}$ son

$$\vec{E} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{p/2}}\vec{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{p/2}}\vec{j} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{p/2}}\vec{k}.$$

dos definiciones

Calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{p/2}}\right) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{p/2}} - \frac{px^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{(p/2)+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{p/2}}\right) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{p/2}} - \frac{py^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{(p/2)+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{p/2}}\right) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{p/2}} - \frac{pz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{(p/2)+1}}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{E} &= \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{p/2}} - \frac{p(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{p/2+1}} \\ &= \frac{3 - p}{(x^2 + y^2 + z^2)^{p/2}} = \frac{3 - p}{\|\vec{r}\|^p}.\end{aligned}$$

las partes donde

b) La divergencia es cero cuando $p = 3$, así que $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}/\|\vec{r}\|^3$ es un campo vectorial sin divergencia.

Campos magnéticos

Una clase importante de campos vectoriales sin divergencia es la de los campos magnéticos. Una de las leyes de Maxwell del electromagnetismo establece que el campo magnético $\vec{B}$ satisface la ecuación

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0.$$

Ejemplo 4 Un circuito cerrado de corriente infinitesimal, similar al que se muestra en la figura 20.6, se denomina *dipolo magnético.* Su magnitud está descrita por un vector constante $\vec{\mu}$, llamado momento dipolar. El campo magnético debido a un dipolo magnético con momento $\vec{\mu}$ es

$$\vec{B} = -\frac{\vec{\mu}}{\|\vec{r}\|^3} + \frac{3(\vec{\mu}\cdot\vec{r})\,\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5}, \qquad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

Demostrar que div $\vec{B} = 0$.

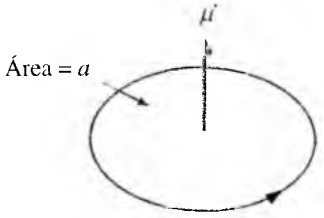


Fig. 20.6 Un lazo de corriente.

Solución Para demostrar que div $\vec{B} = 0$ podemos utilizar la siguiente versión de la regla del producto para la divergencia: si g es una función escalar y $\vec{F}$ un campo vectorial, entonces

$$\text{div}\,(g\vec{F}) = (\text{grad}\,g)\cdot\vec{F} + g\,\text{div}\,\vec{F}.$$

(Ver problema 12 en la página 437). Entonces, puesto que div $\vec{\mu} = 0$, tenemos

$$\text{div}\left(\frac{\vec{\mu}}{\|\vec{r}\|^3}\right) = \text{div}\left(\frac{1}{\|\vec{r}\|^3}\vec{\mu}\right) = \text{grad}\left(\frac{1}{\|\vec{r}\|^3}\right)\cdot\vec{\mu} + \frac{1}{\|\vec{r}\|^3}\cdot 0$$

y

$$\text{div}\left(\frac{(\vec{\mu}\cdot\vec{r})\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5}\right) = \text{grad}(\vec{\mu}\cdot\vec{r})\cdot\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5} + (\vec{\mu}\cdot\vec{r})\,\text{div}\left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5}\right).$$

De los problemas 18 y 19 de la página 140 y el ejemplo 3 de la página 435 tenemos

$$\text{grad}\left(\frac{1}{\|\vec{r}\|^3}\right) = \frac{-3\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5}, \qquad \text{grad}(\vec{\mu}\cdot\vec{r}) = \vec{\mu}, \qquad \text{div}\left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5}\right) = \frac{-2}{\|\vec{r}\|^5}.$$

Al reunir estos resultados obtenemos

$$\begin{aligned}\text{div}\,\vec{B} &= -\,\text{grad}\left(\frac{1}{\|\vec{r}\|^3}\right)\cdot\vec{\mu} + 3\,\text{grad}\,(\vec{\mu}\cdot\vec{r})\cdot\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5} + 3\,(\vec{\mu}\cdot\vec{r})\,\text{div}\left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5}\right)\\ &= \frac{3\vec{r}\cdot\vec{\mu}}{\|\vec{r}\|^5} + \frac{3\vec{\mu}\cdot\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5} - \frac{6\vec{\mu}\cdot\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Notación opcional para divergencia

Al utilizar $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, podemos escribir

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot (F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Problemas para la sección 20.1

1. Dibuje dos campos vectoriales que tengan divergencia positiva en todas partes.
2. Dibuje dos campos vectoriales que tengan divergencia negativa en todas partes.
3. Dibuje dos campos vectoriales que tengan divergencia cero en todas partes.

En los problemas del 4 al 10, encuentre la divergencia del campo vectorial dado. (Nota: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.)

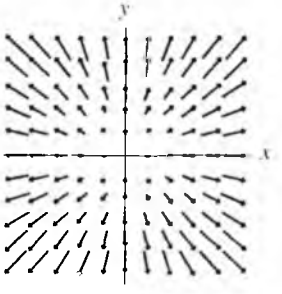
4. $\vec{F}(x, y) = -x\vec{i} + y\vec{j}$
5. $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$
6. $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j}$
7. $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{a} \times \vec{r}$
8. $\vec{F}(x, y) = \dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$
9. $\vec{F}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{r} - \vec{r}_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{r}_0$
10. $\vec{F}(x, y, z) = (-x + y)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (-z + x)\vec{k}$
11. Demuestre que si $\vec{a}$ es un vector constante y $f(x, y, z)$ es una función, entonces div $(f\vec{a}) = (\text{grad } f) \cdot \vec{a}$.
12. Demuestre que si $g(x, y, z)$ es una función escalar y $\vec{F}(x, y, z)$ un campo vectorial, entonces

$$\text{div } (g\vec{F}) = (\text{grad } g) \cdot \vec{F} + g \text{ div } \vec{F}.$$

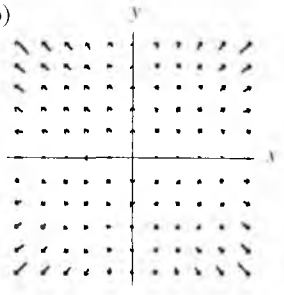
En los problemas 13, 14 y 15, utilice el problema 12 con $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ para hallar la divergencia del campo vectorial dado.

13. $\vec{F}(\vec{r}) = \dfrac{1}{\|\vec{r}\|^p}\vec{a} \times \vec{r}$
14. $\vec{B} = \dfrac{1}{x^a}\vec{r}$
15. $\vec{G}(\vec{r}) = (\vec{b} \cdot \vec{r})\,\vec{a} \times \vec{r}$
16. De los dos campos vectoriales siguientes, ¿cuál tiene la mayor divergencia en el origen? Suponga que las escalas son las mismas en cada uno.

a)

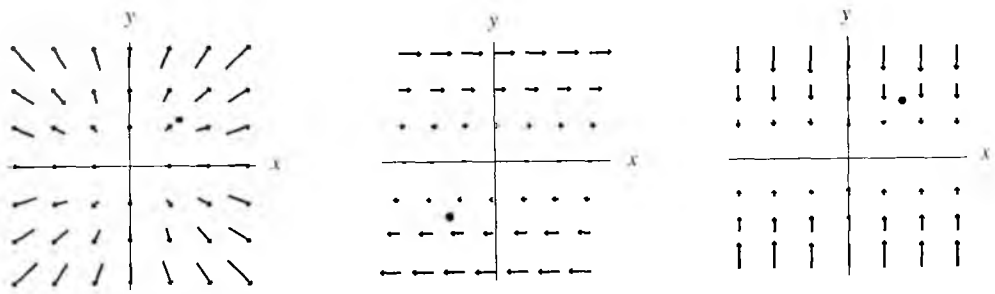


b)



17. Para cada uno de los siguientes campos vectoriales, determine si la divergencia es positiva, cero o negativa en el punto indicado.

(a) (b) (c)



18. Sea $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{k}$.

a) Calcule div $\vec{F}$.

b) Dibuje $\vec{F}$. ¿Parece ser divergente? ¿Está esto de acuerdo con su respuesta al inciso a?

19. Sea $\vec{F} = \vec{r}/\|\vec{r}\|^3$, (en tres dimensiones), $\vec{r} \neq \vec{0}$.

a) Calcule div $\vec{F}$.

b) Dibuje $\vec{F}$. ¿Parece ser divergente? ¿Está esto de acuerdo con su respuesta al inciso a?

Para los problemas 20, 21 y 22,

a) Encuentre el flujo del campo vectorial dado a través de un cubo en el primer octante con longitud c de arista, una esquina en el origen y aristas a lo largo de los ejes.

b) Utilice su respuesta al inciso a para encontrar $\vec{F}$ en el origen usando la definición geométrica.

c) Calcule $\vec{F}$ en el origen usando derivadas parciales.

20. $\vec{F} = x\vec{i}$ 21. $\vec{F} = 2\vec{i} + y\vec{j} + 3\vec{k}$ 22. $\vec{F} = \vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$

23. a) Encuentre el flujo del campo vectorial $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ a través de la superficie del cilindro cerrado de radio c y altura c, con centro en el eje z y base en el plano xy (véase Fig. 20.7.)

b) Utilice su respuesta al inciso a para encontrar $\vec{F}$ en el origen usando la definición geométrica.

c) Calcule $\vec{F}$ en el origen usando derivadas parciales.

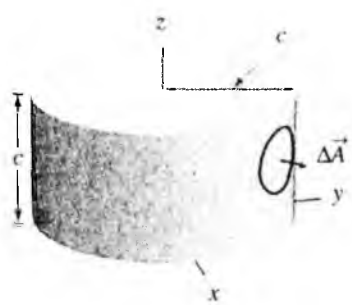


Figura 20.7

En los problemas 24 y 25 intervienen campos eléctricos. Una carga eléctrica produce un campo vectorial $\vec{E}$ llamado campo eléctrico, que representa la fuerza en una carga positiva unitaria colocada en el

punto. Dos cargas positivas o negativas se repelen entre sí, en tanto que dos cargas de signo contrario se atraen entre sí. La divergencia de $\vec{E}$ es proporcional a la densidad de la carga eléctrica (esto es, la carga por unidad de volumen), con una constante positiva de proporcionalidad.

24. Suponga que cierta distribución de carga eléctrica produce el campo eléctrico que se muestra en la figura 20.8. ¿En dónde están concentradas las cargas que produjeron este campo eléctrico? ¿Cuáles concentraciones son positivas y cuáles negativas?

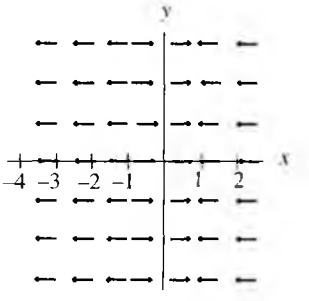


Figura 20.8

25. El campo eléctrico en el punto $\vec{r}$, como resultado de una carga puntual en el origen, es $\vec{E}(\vec{r}) = k\vec{r}/\|\vec{r}\|^3$

    a) Calcule div $\vec{E}$ para $\vec{r} \neq \vec{0}$.
    b) Calcule el límite sugerido por la definición geométrica de div $\vec{E}$ en el punto (0, 0, 0).
    c) Explique lo que significan sus respuestas en términos de densidad de carga.

26. La divergencia de un campo vectorial magnético $\vec{B}$ debe ser cero en todas partes. De los siguientes campos vectoriales, ¿cuál no puede ser magnético?

    a) $\vec{B}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + (x + y)\vec{k}$
    b) $\vec{B}(x, y, z) = -z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$
    c) $\vec{B}(x, y, z) = (x^2 - y^2 - x)\vec{i} + (y - 2xy)\vec{j}$

27. Si $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ son funciones con derivadas parciales segundas continuas, demuestre que

$$\text{div}(\text{grad } f \times \text{grad } g) = 0$$

28. En el problema 22 de la página 412 se demostró que la rapidez de pérdida de calor de un volumen V, en una región de temperatura no uniforme, es igual a $k \int_S (\text{grad } T) \cdot d\vec{A}$ donde k es una constante, S es la superficie que delimita V, y $T(x, y, z)$ es la temperatura en el punto (x, y, z) en el espacio. Al tomar ! límite a medida que V se contrae a un punto, demuestre que $\partial T/\partial t = B$ div grad T en ese punto, donde B es una constante con respecto a x, y, z, pero puede depender del tiempo, t.

29. Un campo vectorial del plano es una *fuente puntual* en el origen si apunta alejándose del origen en todo punto; si su magnitud depende sólo de la distancia desde el origen, y si su divergencia es cero lejos del origen.
    a) Explique por qué una fuente puntual en el origen debe ser de la forma $\vec{v} = \left[f(x^2 + y^2)\right](x\vec{i} + y\vec{j})$ para alguna función positiva f.
    b) Demuestre que $\vec{v} = K(x^2 + y^2)^{-1}(x\vec{i} + y\vec{j})$ es una fuente puntual en el origen si $K > 0$.
    c) Determine la magnitud de $\|\vec{v}\|$ la fuente del inciso b como función de la distancia desde su centro.
    d) Dibuje el campo vectorial $\vec{v} = -(x^2 + y^2)^{-1}(x\vec{i} + y\vec{j})$.
    e) Demuestre que $\phi = \frac{K}{2}\log(x^2 + y^2)$ es una función potencial para la fuente del inciso b.

30. Un campo vectorial del plano es un *sumidero puntual* en el origen si su dirección es hacia el origen en todo punto, su magnitud depende sólo de la distancia desde el origen, y su divergencia es cero lejos del origen.
    a) Explique por qué un sumidero puntual en el origen debe ser de la forma $\vec{v} = \left[f(x^2 + y^2)\right](x\vec{i} + y\vec{j})$ para alguna función negativa f.
    b) Demuestre que $\vec{v} = K(x^2 + y^2)^{-1}(x\vec{i} + y\vec{j})$ es un sumidero puntual en el origen si $K < 0$.
    c) Determine la magnitud $\|\vec{v}\|$ del sumidero del inciso b como función de la distancia desde su centro.
    d) Dibuje el campo vectorial $\vec{v} = -(x^2 + y^2)^{-1}(x\vec{i} + y\vec{j})$.
    e) Demuestre que $\phi = \frac{K}{2}\log(x^2 + y^2)$ es una función potencial para el sumidero del inciso b.

20.2 EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

El teorema de la divergencia es un análogo en varias variables del teorema fundamental del cálculo. Estipula que la integral de la densidad de flujo sobre una región sólida es igual a la integral de flujo sobre la frontera de la región.

La frontera de una región sólida

La frontera de una región sólida puede considerarse como la piel entre el interior de la región y el espacio a su alrededor. Por ejemplo, la frontera de una bola sólida es una superficie esférica, la de un cubo sólido es el conjunto de sus seis caras, y la de un cilindro sólido es un tubo sellado por discos en ambos extremos (véase Fig. 20.9.) Una superficie que es la frontera de una región sólida se denomina *superficie cerrada.*



Figura 20.9 Algunas regiones sólidas y sus fronteras.

Cálculo del flujo a partir de la densidad de flujo

Considere una región sólida W en tres dimensiones cuya frontera es la superficie cerrada S. Existen dos métodos para encontrar el flujo total de un campo vectorial $\vec{F}$ que sale de W; uno de ellos es calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de S:

$$\text{Flujo que sale de } W = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

El otro método consiste en utilizar div $\vec{F}$, la cual indica la densidad de flujo en cualquier punto de W. Subdividimos W en pequeñas cajas, como se muestra en la figura 20.10 y, para una cajita de volumen ΔV,

$$\text{Flujo que sale de la caja} \approx \text{densidad de flujo} \cdot \text{volumen} = \text{div } \vec{F}\, \Delta V.$$

¿Qué sucede cuando sumamos los flujos que salen de todas las cajas? Considere dos cajas adyacentes, como se muestra en la figura 20.11. El flujo a través de la pared compartida se cuenta dos veces, una por cada una de las cajas. Cuando se suman los flujos, estas dos contribuciones se cancelan, así que se obtiene el flujo de salida de la región sólida formada al unir las dos cajas. Si se continúa de esta manera encontramos que

$$\text{Flujo que sale de } W = \sum \text{Flujo que sale de las cajitas} \approx \sum \text{div } \vec{F}\, \Delta V.$$

Hemos aproximado el flujo mediante una suma de Riemann. A medida que la subdivisión se haga más fina, la suma se aproxima a una integral, por lo que

$$\text{Flujo que sale de } W = \int_W \text{div } \vec{F}\, dV.$$

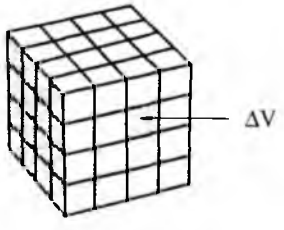


Figura 20.10 Subdivisión de una región en cajitas.

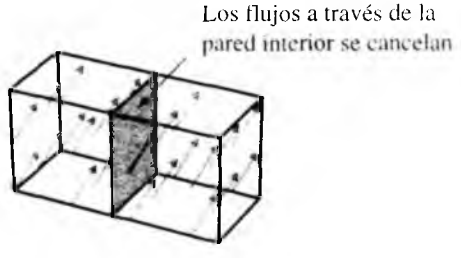


Figura 20.11 Suma de los flujos salida de cajas adyacentes.

Hemos calculado el flujo de dos maneras, como integral de flujo y como integral de volumen. Por lo tanto, estas dos integrales deben ser iguales. Este resultado se cumple aun cuando W no sea un sólido rectangular, como se muestra en la figura 20.10. Entonces tenemos el siguiente resultado.

El teorema de la divergencia

Si W es una región sólida cuya frontera S es una superficie lisa por partes, y si $\vec{F}$ es un campo vectorial liso definido en todo punto de W y de S, entonces

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_W \text{div } \vec{F}\, dV.$$

donde se elige para S la orientación hacia afuera.

En la sección 20.6 daremos una prueba del teorema de la divergencia, usando la definición en coordenadas de la divergencia.

Ejemplo 1 Utilizar el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ a través de la esfera de radio a con centro en el origen.

Solución En el ejemplo 4 de la página 407 calculamos directamente la integral de flujo:

$$\int_S \vec{r} \cdot d\vec{A} = 4\pi a^3$$

Ahora empleamos div $\vec{F} = 3$ y el teorema de la divergencia:

$$\int_S \vec{r} \cdot d\vec{A} = \int_W \text{div } \vec{F}\, dV = \int_W 3\, dV = 3(\tfrac{4}{3}\pi a^3) = 4\pi a^3$$

Ejemplo 2 Utilizar el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + (x^2 + z^2)\vec{k}$$

a través del cubo de la figura 20.12.

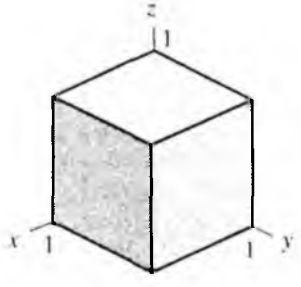


Figura 20.12

Solución La divergencia de $\vec{F}$ es div $\vec{F} = 2x + 2y + 2z$. Como div $\vec{F}$ es positiva en todas partes en el primer cuadrante, el flujo que pasa por S es positivo. Por el teorema de la divergencia,

si $\vec{F}$ es un campo

lefinición en coorde-

$\vec{r}) = \vec{r}$ a través de la

tes en el primer

$$\int_S F \cdot dA = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2(x + y + z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^1 x^2 + 2x(y + z) \Big|_0^1 dy\, dz$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 1 + 2(y + z)\, dy\, dz = \int_0^1 y + y^2 + 2yz \Big|_0^1 dz$$
$$= \int_0^1 (2 + 2z)\, dz = 2z + z^2 \Big|_0^1 = 3.$$

El teorema de la divergencia y los campos vectoriales sin divergencia

Una aplicación importante del teorema de la divergencia es el estudio de campos vectoriales sin divergencia.

Ejemplo 3 En el ejemplo 3 de la página 435 se vio que el siguiente campo vectorial no tiene divergencia:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \frac{\vec{r}}{\| \vec{r} \|^3}, \qquad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

Calcular $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$, usando el teorema de la divergencia si es posible, para las siguientes superficies:

a) S_1 es la esfera de radio a con centro en el origen.

b) S_2 es la esfera de radio a con centro en el punto $(2a, 0, 0)$.

Solución

a) No se puede usar el teorema de la divergencia directamente porque $\vec{F}$ no está definida en todas partes dentro de la esfera (no está definida en el origen). Como $\vec{F}$ apunta hacia afuera en todas partes en S_1, el flujo de salida de S_1 es positivo. En S_1,

$$\vec{F} \cdot d\vec{A} = \| \vec{F} \|\, dA = \frac{a}{a^3}\, dA,$$

y

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{a^2} (\text{Área de } S_1) = \frac{1}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi.$$

Observe que el flujo no es cero, aun cuando div $\vec{F}$ es cero en todas las partes donde está definida.

b) Suponga que W es la región sólida encerrada por S_2. Como div $\vec{F} = 0$ en todas partes en W, podemos usar el teorema de la divergencia en este caso, obteniendo

$$\int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_W \text{div}\vec{F} \cdot dV = \int_W 0\, dV = 0.$$

El teorema de la divergencia se aplica a cualquier región sólida W y su frontera S, aun en casos donde la frontera se encuentre formada por dos o más superficies. Por ejemplo, si W es la región sólida entre la esfera S_1 de radio 1 y la esfera S_2 de radio 2, ambas con centro en el mismo punto, entonces la frontera de W está formada por S_1 y S_2. El teorema de la divergencia exige orientación hacia afuera, que en S_2 apunta alejándose del centro y en S_1 apunta hacia el centro (véase Fig. 20.13).

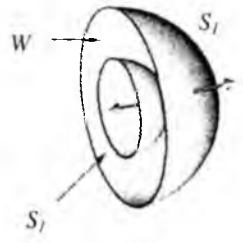


Figura 20.13 Vista en corte de la región W entre dos esferas, mostrando los vectores de orientación.

Ejemplo 4 Sea S_1 la esfera de radio 1 con centro en el origen y S_2 el elipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$, ambos orientados hacia afuera. Para

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}, \qquad \vec{r} \neq \vec{0},$$

demostrar que

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A},$$

Solución El elipsoide contiene a la esfera; sea W la región sólida entre ellos. Como W no contiene al origen, div $\vec{F}$ está definida y es igual a cero en todos los puntos de W. Por lo tanto, si S es la frontera de W

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_W \operatorname{div} \vec{F}\, dV = 0.$$

Pero S está formada de S_2, orientada hacia afuera, y S_1, orientada hacia adentro, por lo cual

$$0 = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} - \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{A},$$

y entonces

$$\int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{A}.$$

En el ejemplo 3 demostramos que $\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 4\pi$, así que también $\int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 4\pi$. Observe que habría sido más difícil calcular la integral directamente sobre el elipsoide.

Campos eléctricos

El campo eléctrico producido por una carga puntual positiva q colocada en el origen es

$$\vec{E} = q \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}.$$

Del ejemplo 3 vemos que el flujo del campo eléctrico que pasa por cualquier esfera con centro en el origen es $4\pi q$. De hecho, usando la idea del ejemplo 4, puede demostrarse que el flujo de $\vec{E}$ a través de cualquier superficie cerrada simple que contiene al origen es $4\pi q$. Véanse los problemas 20 y 21

de la página 479. Éste es un caso especial de la ley de Gauss, según la cual el flujo de un campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga total encerrada por la superficie. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) también descubrió el teorema de la divergencia, que a veces se le llama teorema de Gauss.

Funciones armónicas

Se dice que una función ø de tres variables x, y y z es *armónica* en una región si div(grad ø) = 0 en todos los puntos de la región. Esta ecuación también se escribe $\nabla^2\phi = 0$, porque div(grad ϕ) = $\nabla \cdot (\nabla\phi)$. Por ejemplo, la temperatura en estado estacionario en una región del espacio es armónica, como lo es el potencial eléctrico en una región espacial sin cargas. Varias de las propiedades básicas de las funciones armónicas se pueden deducir del teorema de la divergencia (véanse los problemas 19, 23 y 25).

Ejemplo 5 Se sabe que una función armónica ϕ no constante no puede tener un máximo local. Mediante el teorema de la divergencia explicar por qué esto tiene sentido.

Solución Suponga que una función ϕ no constante tiene un máximo local en (x, y, z). Para la mayoría de las funciones con que nos encontraremos, esto significa que, cerca de (x, y, z), el campo vectorial grad ϕ apunta aproximadamente hacia (x, y, z), porque apunta en la dirección de ϕ creciente. Al tomar una pequeña esfera S con centro en (x, y, z), orientada hacia afuera, tenemos

$$\int_S \text{grad } \phi \cdot d\vec{A} < 0.$$

Pero esto es imposible si ϕ es armónica, ya que por el teorema de la divergencia

$$\int_S \text{grad } \phi \cdot d\vec{A} = \int_W \text{div}(\text{grad } \phi) dV = 0,$$

donde W es la bola encerrada por S. Por lo tanto, una función armónica no puede tener un máximo local.

Una característica importante de las funciones armónicas es su propiedad del valor medio, descubierta por Gauss. Si f es una función armónica en la región encerrada por una esfera, entonces el valor de ϕ en el centro de la esfera es igual al valor medio de ϕ sobre la esfera. Por ejemplo, en equilibrio, la temperatura en un punto del espacio es igual al valor promedio de la temperatura sobre cualquier esfera con centro en el punto.

Problemas para la sección 20.2

Para los problemas 1, 2 y 3, calcule la integral de flujo $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$ en dos maneras, si es posible: directamente y usando el teorema de la divergencia. En cada caso, S es cerrada y orientada hacia afuera.

1. $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ y S es el cubo que encierra el volumen $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$, y $0 \le z \le 2$.
2. $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{j}$ y S es un cilindro vertical de altura 2, siendo su base un círculo de radio 1 en el plano xy, con centro en el origen. S incluye los discos que lo cierran en la parte superior e inferior.
3. $\vec{F}(x, y, z) = -z\vec{i} + x\vec{k}$ y S es una pirámide cuadrada con altura 3 y base en el plano xy de longitud 1 en sus lados.

4. Suponga que V_1 y V_2 son los sólidos rectangulares del primer cuadrante que se muestran en la figura 20.14. Ambos tienen lados de longitud 1 paralelos a los ejes; V_1 tiene una esquina en el origen, en tanto que V_2 tiene su esquina correspondiente en el punto (1, 0, 0). Suponga que S_1 y S_2 son las superficies de seis caras de V_1 y V_2, respectivamente. Suponga que V es el volumen en forma de caja formado por V_1 y V_2 juntos, y cuya superficie exterior es S. ¿Es cierto o falso lo siguiente? Dé sus razones.

   a) Si $\vec{F}$ es un campo vectorial constante, $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0$.

   b) Si S_1, S_2 y S están todas orientadas hacia afuera y $\vec{F}$ es cualquier campo vectorial

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

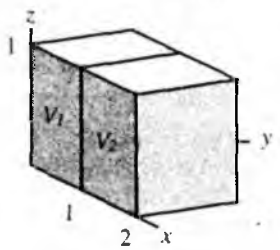


Figura 20.14

5. Calcule $\int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A}$ donde $\vec{F} = x^2\vec{i} + 2y^2\vec{j} + 3z^2\vec{k}$ y S_2 es como en el problema 4. Haga esto directamente y usando el teorema de la divergencia.
6. Utilice el teorema de la divergencia para evaluar la integral de flujo $\int_S (x^2\vec{i} + (y - 2xy)\vec{j} + 10z\vec{k}) \cdot d\vec{A}$, donde S es la esfera de radio 5 con centro en el origen, orientada hacia afuera.
7. Utilice el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = -z\vec{i} + x\vec{k}$ a través de la esfera de radio a con centro en el origen. Dé una explicación geométrica para su respuesta.
8. Suponga que $\vec{F}$ es un campo vectorial con div $\vec{F} = 10$. Encuentre el flujo de $\vec{F}$ que sale de un cilindro de altura a y radio a, con centro en el eje z y con base en el plano xy.
9. Considere el campo vectorial $\vec{F} = \vec{r}/\|\vec{r}\|^3$.
   a) Calcule div $\vec{F}$ para $\vec{r} \neq \vec{0}$.
   b) Encuentre el flujo de $\vec{F}$ que sale de una caja de lado a con centro en el origen y lados paralelos a los ejes.
10. Suponga que $\vec{G}$ es un campo vectorial con la propiedad de que $\vec{G} = \vec{r}$ para $2 \leq \|\vec{r}\| \leq 7$ y que el flujo de $\vec{G}$ a través de la esfera de radio 3 con centro en el origen es 8π. Encuentre el flujo de $\vec{G}$ a través de la esfera de radio 5 con centro en el origen.
11. Suponga que un campo vectorial $\vec{F}$ satisface div $\vec{F} = 0$ en todas partes. Demuestre que $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0$ para toda superficie cerrada S.
12. El campo gravitacional, $\vec{F}$, de un planeta de masa m situado en el origen está dado por

$$\vec{F} = -Gm \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}.$$

Utilice el teorema de la divergencia para demostrar que el flujo del campo gravitacional a través de la esfera de radio a es independiente de a. [Sugerencia: Considere la región limitada por dos esferas concéntricas.]

13. Una propiedad básica del campo eléctrico $\vec{E}$ es que su divergencia es cero en puntos donde no hay carga. Suponga que la única carga está sobre el eje z y que el campo eléctrico $\vec{E}$ apunta radialmente hacia afuera desde el eje z y su magnitud depende sólo de la distancia r al eje z. Utilice el teorema de la divergencia para demostrar que la magnitud del campo es proporcional a $1/r$. [Sugerencia: Considere una región sólida formada por un cilindro de longitud finita cuyo eje es el eje de las z, a la que se le ha quitado un cilindro concéntrico más pequeño.]

14. Si una superficie S se sumerge en un fluido incompresible, la presión del fluido ejerce una fuerza $\vec{F}$ en el exterior de la superficie. Si seleccionamos un sistema coordenado donde el eje z es vertical, con la dirección positiva hacia arriba y la superficie del fluido en $z = 0$, entonces la componente de fuerza en la dirección de un vector unitario $\vec{u}$ está dada por la siguiente ecuación:

$$\vec{F} \cdot \vec{u} = -\int_S z\rho g\vec{u} \cdot d\vec{A},$$

donde ρ es la densidad del fluido (masa/volumen), g la aceleración debida a la gravedad, y la superficie está orientada en la dirección opuesta a aquella desde donde se aplica la fuerza. En este problema consideraremos una superficie cerrada totalmente sumergida que encierra un volumen V. Nos interesa la fuerza del líquido en la superficie externa, de modo que S está orientada hacia adentro.

a) Utilice el teorema de la divergencia para demostrar que la fuerza en las direcciones $\vec{i}$ y $\vec{j}$ es cero.

b) Utilice el teorema de la divergencia para demostrar que la fuerza en la dirección $\vec{k}$ es ρgV, que es el peso del fluido que cabe en V. Éste es el *principio de Arquímedes.*

15. La desintegración radiactiva genera calor en el interior de la Tierra. Suponga que este calor se genera uniformemente en todo el planeta a razón de 30 watts por kilómetro cúbico. (Un watt mide la rapidez de producción de calor.) El calor fluye entonces a la superficie y luego se disipa en el espacio. Denotemos por $\vec{F}(x, y, z)$ el flujo de calor por kilómetro cuadrado, medido en watts. Por definición, el flujo de $\vec{F}$ a través de una superficie es la cantidad de calor que fluye a través de la superficie por unidad de tiempo.

a) ¿Cuál es el valor de div $\vec{F}$? Incluya unidades.

b) Suponga que el calor fluye simétricamente hacia afuera. Verifique que $\vec{F} = \alpha\vec{r}$, donde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ y α es una constante apropiada, satisface las condiciones dadas. Encuentre α.

c) Denotemos por $T(x, y, z)$ la temperatura del interior de la Tierra. El calor fluye según la ecuación $\vec{F} = -k$ grad T, donde k es una constante. Explique por qué razón esto tiene sentido físicamente.

d) Si T está en °C, entonces $k = 30\,000$ watts/km°C. Si suponemos que nuestro planeta es una esfera con radio de 6400 km y una temperatura en la superficie de 20°C, ¿cuál es la temperatura en el centro?

16. Demuestre que $\nabla^2 \phi(x, y, z) = \partial^2 \phi/\partial x^2 + \partial^2 \phi/dy^2 + \partial^2 \phi/\partial z^2$.

17. Demuestre que las funciones lineales son armónicas.

18. ¿Cuál es la condición que deben satisfacer los coeficientes constantes a, b, c, d, e y f para que la función $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$ sea armónica?

19. Utilice el teorema de la divergencia para demostrar que si ϕ es armónica en una región W, entonces $\int_S \nabla\phi \cdot d\vec{A} = 0$ para toda superficie S cerrada en W siempre que la región encerrada por S se encuentre por completo dentro de W.
20. Sea $\phi = 1/(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = 1/\|\vec{r}\|$
    a) Demuestre que ϕ es armónica en todas partes, excepto en el origen.
    b) Dé una explicación geométrica de por qué ϕ no tiene máximo o mínimo local.
    c) Calcule $\int_S \nabla\phi \cdot d\vec{A}$, donde S es la esfera de radio 1 con centro en el origen. ¿Contradice su respuesta a lo que se afirma en el problema 19?
21. Demuestre que una función armónica no constante no puede tener un mínimo local, y que puede alcanzar un valor mínimo en una región cerrada sólo en la frontera.
22. Demuestre que si ϕ es una función armónica, entonces div (ϕ grad ϕ) = $\|\text{grad } \phi\|^2$.
23. Suponga que ϕ es una función armónica en la región encerrada por una superficie S cerrada y suponga que $\phi = 0$ en todos los puntos de S. Demuestre que $\phi = 0$ en todos los puntos de la región encerrada por S. [Sugerencia: Aplique el teorema de la div $\int_S \phi \text{ grad } \phi \cdot d\vec{A}$ y use el problema 22.]
24. Suponga que ϕ_1 y ϕ_2 son funciones armónicas en la región encerrada por una superficie S cerrada y suponga que $\phi_1 = \phi_2$ en todos los puntos de S. Demuestre que $\phi_1 = \phi_2$ en todos los puntos de la región encerrada por S. [Sugerencia: Use el problema 23.]
25. Suponga que u y v son funciones armónicas en una región W. Utilice el teorema de la divergencia para demostrar que, para toda superficie S cerrada en W tal que el volumen encerrado por S está completamente dentro de W,

$$\int_S u \text{ grad } v \cdot d\vec{A} = \int_S v \text{ grad } u \cdot d\vec{A}.$$

20.3 EL ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL

La divergencia de un campo vectorial es una especie de derivada escalar que mide flujo de salida por unidad de volumen. A continuación introducimos una derivada vectorial, el rotacional, que mide la circulación de un campo vectorial. Imagine que sujetamos la rueda de paletas de la figura 20.15 en el flujo que se muestra en la figura 20.16. La velocidad a la que gira la rueda de paletas (su velocidad angular) mide la fuerza de circulación. Observe que la velocidad angular depende de la dirección en que apunta el eje. La rueda de paletas gira en una dirección si el eje apunta hacia arriba, y en dirección opuesta si el eje apunta hacia abajo. Si el eje apunta horizontalmente, no gira en absoluto porque el campo de velocidad incide con igual fuerza sobre las paletas opuestas de la rueda.



Figura 20.15
Aparato para medir la circulación.

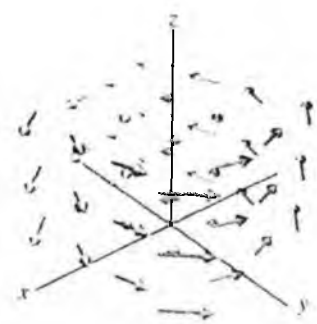


Figura 20.16
Un campo vectorial con circulación alrededor del eje z.

Densidad de circulación

Medimos la fuerza de la circulación recurriendo a una curva cerrada. Suponga que C es un círculo con centro (x, y, z) del plano perpendicular a $\vec{n}$, recorrido en la dirección determinada $\vec{n}$ según la regla de la mano derecha (véanse Figs. 20.17 y 20.18.)

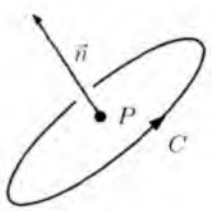


Figura 20.17 La dirección de C se relaciona con la dirección de $\vec{n}$ de acuerdo con la regla de la mano derecha.

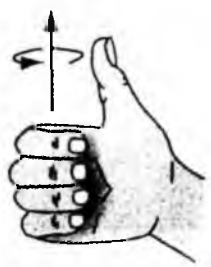


Figura 20.18 Cuando el pulgar apunta en la dirección de $\vec{n}$, los dedos se doblan en la dirección de avance alrededor de C.

Hacemos la siguiente definición:

La **densidad de circulación** de un campo vectorial uniforme $\vec{F}$ en (x, y, z) alrededor de la dirección del vector unitario $\vec{n}$ está definida como

$$\text{circ}_{\vec{n}}\,\vec{F}(x, y, z) = \lim_{\text{Área} \to 0} \frac{\text{Circulación alrededor de } C}{\text{Área dentro de } C} = \lim_{\text{Área} \to 0} \frac{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}{\text{Área dentro de } C},$$

siempre que exista el límite.

La densidad de circulación determina la velocidad angular[2] de la rueda de paletas de la figura 20.15, siempre que se pueda hacer una suficientemente pequeña y ligera, e insertarla sin alterar el flujo.

Ejemplo 1 Considere el campo vectorial $\vec{F}$ de la figura 20.16. Suponga que $\vec{F}$ es paralelo al plano xy y que a una distancia r del eje z tiene magnitud $2r$. Calcular $\text{circ}_{\vec{n}}\,\vec{F}$ en el origen para

a) $\vec{n} = \vec{k}$ b) $\vec{n} = -\vec{k}$ c) $\vec{n} = \vec{i}$

Solución a) Tome un círculo C de radio a del plano xy, con centro en el origen, recorrido en la dirección de $\vec{k}$ determinada por la regla de la mano derecha. Entonces, como $\vec{F}$ es tangente a C en todas partes y apunta en la dirección de avance alrededor de C, tenemos

$$\text{Circulación alrededor de } C = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \|\vec{F}\| \cdot \text{Circunferencia de } C = 2a(2\pi a) = 4\pi a^2.$$

[2] De hecho es el doble de la velocidad angular. Véase el ejemplo 3 en la página 431.

Entonces, la densidad de circulación es

$$\text{circ}_{\vec{k}}\,\vec{F} = \lim_{\text{Área}\to 0} \frac{\text{Circulación alrededor de } C}{\text{Área dentro de } C} = \lim_{\text{Área}\to 0} \frac{4\pi a^2}{\pi a^2} = 4.$$

b) Si $\vec{n} = -\vec{k}$, el círculo es recorrido en la dirección opuesta y la integral de línea cambia de signo. Por lo tanto,

$$\text{circ}_{-\vec{k}}\,\vec{F} = -4.$$

c) La circulación alrededor de $\vec{i}$ se calcula mediante círculos en el plano yz. Como $\vec{F}$ es en todas partes perpendicular a dicho círculo C,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

En consecuencia, tenemos

$$\text{circ}_{\vec{i}}\,\vec{F} = \lim_{\text{Área}\to 0} \frac{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}{\pi a^2} = \lim_{\text{Área}\to 0} \frac{0}{\pi a^2} = 0.$$

Definición del rotacional

El ejemplo 1 muestra que la densidad de circulación de un campo vectorial puede ser positiva, negativa o cero, dependiendo de la dirección. Suponemos que hay una dirección en la que la densidad de circulación es máxima. Ahora definimos una cantidad vectorial única que incorpora todas estas densidades de circulación diferentes.

Definición geométrica del rotacional

El rotacional de un campo vectorial uniforme $\vec{F}$, que se escribe rot $\vec{F}$, es el campo vectorial con las siguientes propiedades

- La dirección del rotacional $\vec{F}(x, y, z)$ es la dirección $\vec{n}$ para la que $\text{circ}_{\vec{n}}\,(x, y, z)$ es máxima.
- La magnitud del rotacional $\vec{F}(x, y, z)$ es la densidad de circulación de $\vec{F}$ alrededor de esa dirección.

Si la densidad de circulación es cero alrededor de cada dirección, entonces por definición el rotacional es $\vec{0}$.

Definición en coordenadas cartesianas del rotacional

Si $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_1\vec{k}$, entonces

$$\text{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Ejemplo 2 Para cada uno de los campos de la figura 20.19, utilizar el dibujo y la definición geométrica para determinar si el rotacional en el origen apunta hacia arriba, abajo o es el vector cero. Compruebe luego su respuesta usando la definición en coordenadas del rotacional. Observe que los campos vectoriales no tienen componente z y son independientes de z.

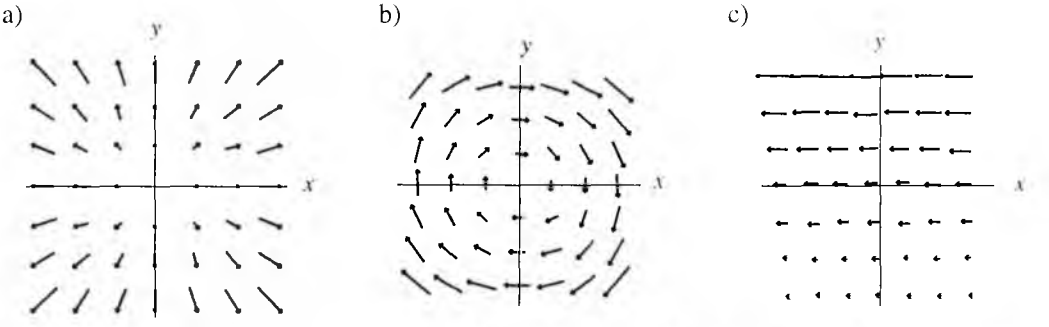


Figura 20.19 Dibujos en el plano xy de a) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$, b) $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$ y c) $\vec{F} = -(y+1)\vec{i}$

Solución a) Este campo vectorial no muestra rotación, y la circulación alrededor de cualquier curva cerrada parece ser cero, así que sospechamos que el rotacional es el vector cero. De la definición en coordenadas del rotacional resulta

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial(0)}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right)\vec{k} = 0.$$

b) Este campo vectorial está girando alrededor del eje z. Por la regla de la mano derecha, la densidad de circulación alrededor de $\vec{k}$ es negativa, así que esperamos que la componente z del rotacional apunte hacia abajo. Recurriendo a la definición en coordenadas:

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(-x)}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial(0)}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right)\vec{k} = -2\vec{k}.$$

c) A primera vista se puede esperar que este campo vectorial tenga rotacional cero, puesto que todos los vectores son paralelos al eje x. Sin embargo, si se analiza la circulación alrededor de la curva C en la figura 20.20, los lados no contribuyen en nada (son perpendiculares al campo vectorial), la base contribuye con una cantidad negativa (la curva está en la dirección opuesta al campo vectorial) y la parte superior contribuye con una cantidad positiva mayor (la curva está en la misma dirección que el campo vectorial y la magnitud del campo vectorial es mayor en la parte superior que en la inferior.) Por lo tanto, la circulación alrededor de C es positiva y por esto se espera que el rotacional sea diferente de cero y apunte hacia arriba. La definición en coordenadas produce

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(0)}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial(-(y+1))}{\partial z} - \frac{\partial(0)}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(-(y+1))}{\partial y} \right)\vec{k} = \vec{k}.$$

Otra manera de ver que el rotacional es distinto de cero en este caso es imaginar que el campo vectorial representa la velocidad de agua en movimiento. Un bote que flota en el agua tiende a girar, ya que el agua avanza más rápidamente en un lado que en el otro.

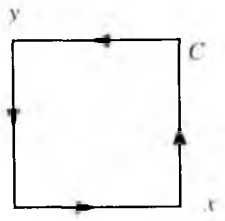


Figura 20.20

Otra notación del rotacional

Por medio de $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,i + \frac{\partial}{\partial y}\,j + \frac{\partial}{\partial z}\,k$ podemos escribir

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

Ejemplo 3 Un volante gira con velocidad angular ω, y la velocidad de un punto P con vector de posición r está dada por $v = \omega \times r$ (véase Fig. 20.21.) Calcular rot v.

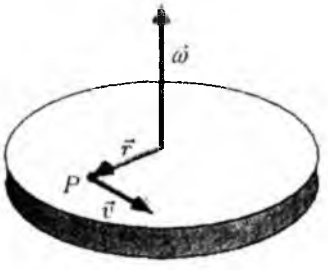


Figura 20.21 Volante giratorio

Solución Si $\omega = \omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k$, tenemos

$$v = \omega \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_2 z - \omega_3 y)i + (\omega_3 x - \omega_1 z)j + (\omega_1 y - \omega_2 x)k.$$

Así,

$$\text{rot } v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(\omega_1 y - \omega_2 x) - \frac{\partial}{\partial z}(\omega_3 x - \omega_1 z) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(\omega_2 z - \omega_3 y) - \frac{\partial}{\partial x}(\omega_1 y - \omega_2 x) \right) \vec{j}$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(\omega_3 x - \omega_1 z) - \frac{\partial}{\partial y}(\omega_2 z - \omega_3 y) \right) \vec{k}$$
$$= 2\omega_1 \vec{i} + 2\omega_2 \vec{j} + 2\omega_3 \vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

Entonces, como es de esperarse, rot $\vec{v}$ es paralelo al eje de rotación del volante, (es decir, la dirección de $\vec{\omega}$) y la magnitud de rot $\vec{v}$ es mayor cuanto más rápidamente gire el volante (esto es, cuanto mayor sea la magnitud de $\vec{\omega}$).

¿Por qué las dos definiciones del rotacional dan el mismo resultado?

Mediante el teorema de Green, en coordenadas cartesianas, podemos demostrar que para rot $\vec{F}$ definido en coordenadas cartesianas

$$\boxed{\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = \text{circ}_{\vec{n}} \vec{F}.}$$

Esto demuestra que rot $\vec{F}$ definido en coordenadas cartesianas satisface la definición geométrica, puesto que el lado izquierdo toma su valor máximo cuando $\vec{n}$ apunta en la misma dirección que $\vec{F}$, y en ese caso su valor es $\|\text{rot } \vec{F}\|$.

de posición $\vec{r}$ está

El siguiente ejemplo justifica esta fórmula en un caso específico. Los problemas 27 y 28 de las páginas 457-58 muestran cómo probar en general que el rot $\vec{F} \cdot \vec{n} = \text{circ}_{\vec{n}} \vec{F}$.

Ejemplo 4 Utilizar la definición de rotacional en coordenadas cartesianas y el teorema de Green para demostrar que

$$\left(\text{rot } \vec{F}\right) \cdot \vec{k} = \text{circ}_{\vec{k}} \vec{F}.$$

Solución Mediante la definición de rotacional en coordenadas cartesianas, el lado izquierdo de la fórmula es

$$\left(\text{rot } \vec{F}\right) \cdot \vec{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

$_{y}x)\vec{k}$.

Veamos ahora el lado derecho de la ecuación. La densidad de circulación alrededor de $\vec{k}$ se calcula usando círculos perpendiculares a $\vec{k}$; por eso el componente $\vec{k}$ de $\vec{F}$ no contribuye a ella, es decir, la densidad de circulación de $\vec{F}$ alrededor de $\vec{k}$ es la misma que la densidad de circulación de $F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$ alrededor de $\vec{k}$. Pero, en cualquier plano perpendicular a $\vec{k}$, z es constante, así que en ese plano F_1 y F_2 son funciones de x y y solamente. Por lo tanto, $F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$ se puede considerar como un campo vectorial de dos dimensiones en el plano horizontal que pasa por el punto (x, y, z), donde se está calculando la densidad de circulación. Sea C un círculo del plano, de radio a y centro en (x, y, z), y sea R la región encerrada por C. El teorema de Green estipula que

$$\int_C (F_1\vec{i} + F_2\vec{j}) \cdot d\vec{r} = \int_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) dA.$$

Cuando el círculo es pequeño, $\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y$ es aproximadamente constante en R, así que

$$\int_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \cdot \text{Área de } R = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \pi a^2.$$

Entonces, tomando un límite conforme el radio del círculo se reduce a cero, tenemos

$$\text{circ}_k \vec{F}(x, y, z) = \lim_{a \to 0} \frac{\int_C (F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j}) \cdot d\vec{r}}{\pi a^2} = \lim_{a \to 0} \frac{\int_C \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA}{\pi a^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Campos vectoriales irrotacionales

Se dice que un campo vectorial no tiene rotacional o es irrotacional si rot $\vec{F} = \vec{0}$ en todos los puntos donde $\vec{F}$ está definida.

Ejemplo 5 La figura 20.22 muestra el campo vectorial $\vec{B}$ para tres valores de la constante p, donde $\vec{B}$ está definido en tres dimensiones por

$$\vec{B} = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{(x^2 + y^2)^{p/2}}.$$

a) Encontrar una fórmula para hallar rot $\vec{B}$.

b) ¿Hay un valor de p para el que $\vec{B}$ es irrotacional? Si es así, encuéntrelo.

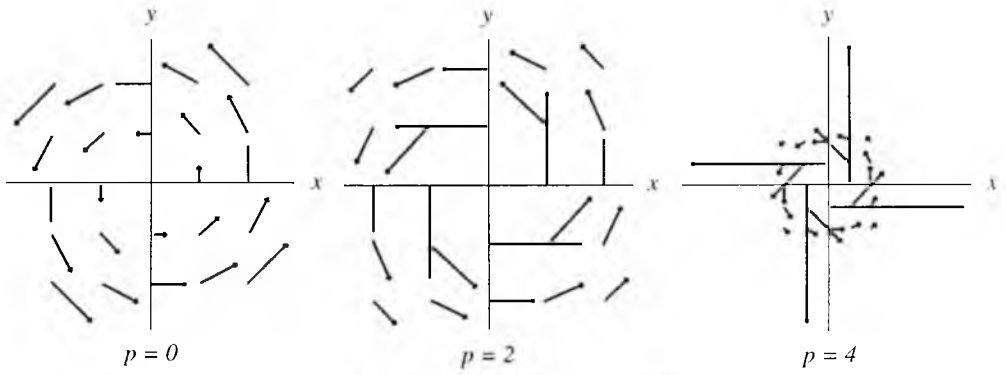


Figura 20.22 El campo vectorial $\vec{B}(\vec{r}) = (-y\vec{i} + x\vec{j}) / (x^2 + y^2)^{p/2}$ para $p = 0$, 2 y 4.

Solución a) Podemos usar la siguiente versión de la regla del producto para el rotacional. Si f es una función escalar y $\vec{F}$ un campo vectorial, entonces

$$\text{rot}(\phi \vec{F}) = \phi \, \text{rot} \, \vec{F} + (\text{grad} \, \phi) \times \vec{F}$$

(Véase el problema 17 de la página 456.) Escribimos $\vec{B} = \phi \vec{F}$ $\frac{1}{(x^2 + y^2)^{p/2}} (-y\vec{i} + x\vec{j})$.

Entonces

$$\text{rot } \vec{F} = \text{rot}(-y\vec{i} + x\vec{j}) = 2\vec{k}$$

$$\text{grad } \phi = \text{grad}\left(\frac{1}{(x^2+y^2)^{p/2}}\right) = \frac{-p}{(x^2+y^2)^{(p/2)+1}}(x\vec{i} + y\vec{j}).$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{B} &= \frac{1}{(x^2+y^2)^{p/2}}\text{rot}(-y\vec{i} + x\vec{j}) + \text{grad}\left(\frac{1}{(x^2+y^2)^{p/2}}\right) \times (-y\vec{i} + x\vec{j}) \\ &= \frac{1}{(x^2+y^2)^{p/2}} 2\vec{k} + \frac{-p}{(x^2+y^2)^{(p/2)+1}}(x\vec{i} + y\vec{j}) \times (-y\vec{i} + x\vec{j}) \\ &= \frac{1}{(x^2+y^2)^{p/2}} 2\vec{k} + \frac{-p}{(x^2+y^2)^{(p/2)+1}}(x^2+y^2)\vec{k} \\ &= \frac{2-p}{(x^2+y^2)^{p/2}}\vec{k}.\end{aligned}$$

b) El rotacional es cero cuando $p = 2$. Entonces, cuando $p = 2$, el campo vectorial es irrotacional

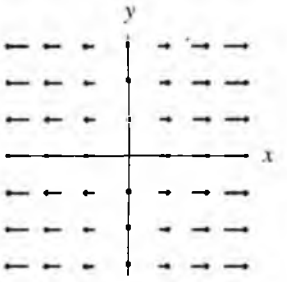
$$\vec{B} = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2+y^2}.$$

Problemas para la sección 20.3

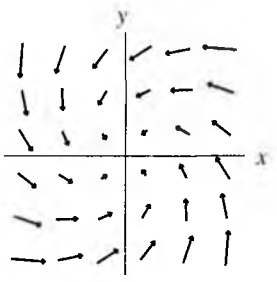
Calcule el rotacional de los campos vectoriales de los problemas 1 al 7.

1. $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j}$
2. $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}/\|\vec{r}\|$
3. $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^3\vec{j} + z^4\vec{k}$
4. $\vec{F} = e^x\vec{i} + \cos y\vec{j} + e^{-z}\vec{k}$
5. $\vec{F} = 2yz\vec{i} + 3xz\vec{j} + 7xy\vec{k}$
6. $\vec{F} = (-x + y)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (-z + x)\vec{k}$
7. $\vec{F} = (x + yz)\vec{i} + (y^2 + xzy)\vec{j} + (zx^3y^2 + x^7y^6)\vec{k}$
8. Utilice la definición geométrica para encontrar el rotacional del campo vectorial $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$. Compruebe su respuesta usando la definición en coordenadas.
9. Mediante sus respuestas a los problemas 3 y 4, elabore una conjetura sobre el valor de rot $\vec{F}$ cuando el campo vectorial $\vec{F}$ tenga cierta forma (¿Cuál forma?) Demuestre por qué su conjetura es verdadera.
10. Sea $\vec{F}$ el campo vectorial de la figura 20.16 de la página 448. Está girando en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del eje z cuando se observa desde arriba. Suponga que a una distancia r del eje z $\vec{F}$ tiene magnitud $2r$.
    a) Encuentre una fórmula para $\vec{F}$.
    b) Encuentre rot $\vec{F}$ usando la definición en coordenadas y relacione su respuesta a la densidad de circulación.
11. Diga si cada uno de los siguientes campos vectoriales tiene un rotacional diferente de cero en el origen. En cada caso, el campo vectorial se muestra en el plano xy; suponga que no tiene componente z y es independiente de z.

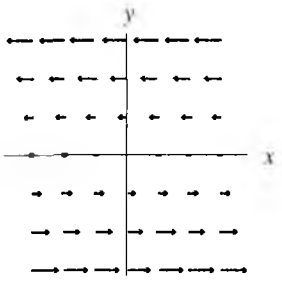
a)



b)



c)



12. Un gran incendio se convierte en una tormenta de fuego cuando el aire de las cercanías adquiere movimiento giratorio. La respectiva corriente ascendente tiene el efecto de jalar más aire al incendio, lo que hace que arda más rápidamente. Los registros históricos muestran que ocurrió una tormenta de fuego durante el incendio de Chicago de 1871, y durante el bombardeo de Hamburgo, Alemania, en la segunda Guerra Mundial, pero no la hubo durante el devastador incendio de Londres en 1666. Explique cómo puede identificarse una tormenta de fuego con ayuda del rotacional de un campo vectorial.
13. Demuestre que rot $(\vec{F} + \vec{C}) = \text{rot } \vec{F}$ para un campo vectorial constante $\vec{C}$.
14. Para cualquier campo vectorial constante y cualquier campo vectorial, $\vec{F}$, demuestre que $\text{div}(\vec{F} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot \text{rot } \vec{F}$.
15. En el capítulo 18 vimos la manera en que el teorema fundamental del cálculo, para integrales de línea, implica que $\int_C \text{grad } f \cdot d\vec{r} = 0$ para cualquier trayectoria suave cerrada C y cualquier función suave f.
    a) Utilice la definición geométrica de rotacional para deducir que rot grad $f = \vec{0}$.
    b) Verifique que rot grad $f = \vec{0}$ usando la definición en coordenadas.
16. Si $\vec{F}$ es cualquier campo vectorial cuyas componentes tienen segundas derivadas parciales continuas, demuestre que div rot $\vec{F} = 0$.
17. Demuestre que rot $(\phi\vec{F}) = \phi$ rot $\vec{F}$ + (grad ϕ) $\times \vec{F}$ para una función escalar ϕ y un campo vectorial $\vec{F}$.
18. Un remolino que gira a una velocidad angular constante ω alrededor del eje z tiene un campo vectorial de velocidad $\vec{v} = \omega(-y\vec{i} + x\vec{j})$.
    a) Dibuje el campo vectorial con $\omega = 1$ y el campo vectorial con $\omega = -1$.
    b) Determine la rapidez $\|\vec{v}\|$ del remolino como función de la distancia desde su centro.
    c) Calcule div $\vec{v}$ y rot $\vec{v}$.
    d) Calcule la circulación de $\vec{v}$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del círculo de radio R del plano xy, con centro en el origen.

Los problemas 19, 20 y 21 se relacionan con los campos vectoriales de la figura 20.23. En cada caso, suponga que la sección transversal es la misma en todos los otros planos paralelos a la sección transversal dada.

19. Tres de los campos vectoriales tienen rotacional cero en cada punto que se muestra. ¿Cuáles son? ¿Cómo se identifican?
20. Tres de los campos vectoriales tienen divergencia cero en cada punto mostrado. ¿Cuáles son? ¿Cómo se identifican?

21. Cuatro de las integrales de línea $\int_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ son cero. ¿Cuáles son? ¿Cómo se identifican?

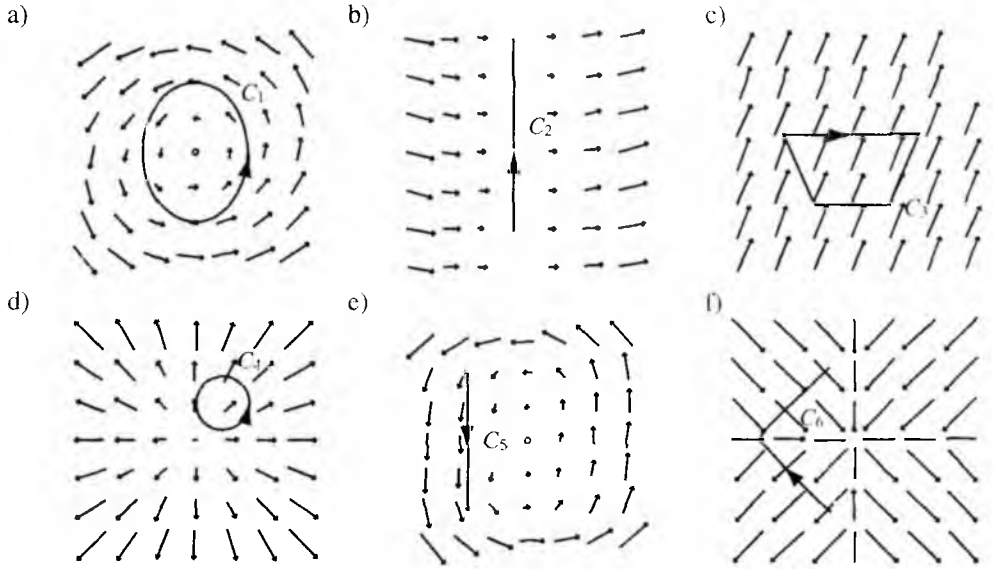


Figura 20.23

22. Demuestre que si ϕ es una función armónica, entonces grad ϕ no tiene rotacional ni divergencia.
23. Es un teorema de Helmholtz que todo campo vectorial $\vec{F}$ es igual a la suma de un campo vectorial sin rotacional y un campo vectorial sin divergencia. Demuestre cómo hacer esto, suponiendo que hay una función ϕ tal que $\nabla^2\phi = \text{div } \vec{F}$.
24. Exprese $(3x + 2y)\vec{i} + (4x + 9y)\vec{j}$ como la suma de un campo vectorial sin rotacional y un campo vectorial sin divergencia.
25. Encuentre un campo vectorial $\vec{F}$ tal que rot $\vec{F} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$. [Sugerencia: Intente $\vec{F} = \vec{v} \times \vec{r}$ para algún vector $\vec{v}$.]
26. La figura 20.24 es un dibujo del campo vectorial de velocidad $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$ del plano xy.
    a) ¿Cuál es la dirección de rotación de una varita colocada en el origen a lo largo del eje x?
    b) ¿Cuál es la dirección de rotación de una varita colocada en el origen a lo largo del eje y?
    c) Calcule rot $\vec{F}$.

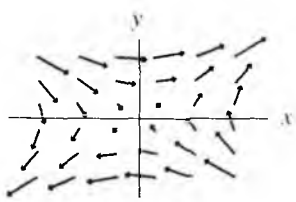


Figura 20.24

27. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial suave y sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores constantes. Mediante la definición de rot $\vec{F}$ en coordenadas cartesianas, demuestre que

$$\text{grad}(\vec{F} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{u} - \text{grad}\,(\vec{F} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{u} \times \vec{v}.$$

28. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial suave en tres dimensiones. Considere un plano L en el espacio parametrizado por

$$\vec{r}(s, t) = \vec{r}_0 + s\vec{u} + t\vec{v},$$

donde $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores unitarios ortogonales. Este plano puede considerarse como una copia del plano cartesiano con coordenadas s y t, colocado en tres dimensiones. Definimos un campo vectorial bidimensional, $\vec{G}$, en este plano por

$$\vec{G}(s, t) = \text{componente de } \vec{F}(\vec{r}(s, t)) \text{ paralela } L.$$

a) Demuestre que $\vec{G} = G_1\vec{u} + G_2\vec{v}$, donde $G_1 = \vec{F} \cdot \vec{u}$, y $G_2 = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

b) Demuestre que

$$\frac{\partial G_2}{\partial s} - \frac{\partial G_1}{\partial t} = \text{grad}(\vec{F} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{u} - \text{grad}(\vec{F} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}.$$

c) Sea $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$. Utilice el inciso b del problema 27 para deducir que

$$\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{\partial G_2}{\partial s} - \frac{\partial G_1}{\partial t}.$$

d) Utilice el método del ejemplo 4 de la página 453 y el teorema de Green para llegar a la conclusión de que

$$(\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{n} = \text{circ}_n \vec{F}.$$

Como $\vec{r}_0$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ pueden ser vectores cualesquiera, esto demuestra que, en general,

$$(\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{n} = \text{circ}_n \vec{F}.$$

20.4 TEOREMA DE STOKES

El teorema de la divergencia establece que la integral de la densidad de flujo sobre una región sólida es igual al flujo que atraviesa la superficie que encierra la región. Análogamente, el teorema de Stokes establece que la integral de la densidad de circulación sobre una superficie es igual a la circulación alrededor de la frontera de la superficie.

La frontera de una superficie

La *frontera* de una superficie S es la curva que corre alrededor del borde de S (como la bastilla alrededor del borde de una tela.) Una orientación de S determina una orientación para su frontera, C, como sigue: escoja un vector normal positivo $\vec{n}$ en S, cerca de C, y utilice la regla de la mano derecha para determinar una dirección de movimiento alrededor de $\vec{n}$; esto, a su vez, determina una dirección de movimiento alrededor de la frontera C. Véase la figura 20.25. Otra manera de describir la orientación en C es que alguien que camina a lo largo de C en el sentido de la orientación y con el cuerpo erguido en dirección de la normal positiva en S, tendría la superficie a su izquierda. Observe que la frontera puede estar formada por dos o más curvas, como lo muestra la superficie de la derecha de la figura 20.25.

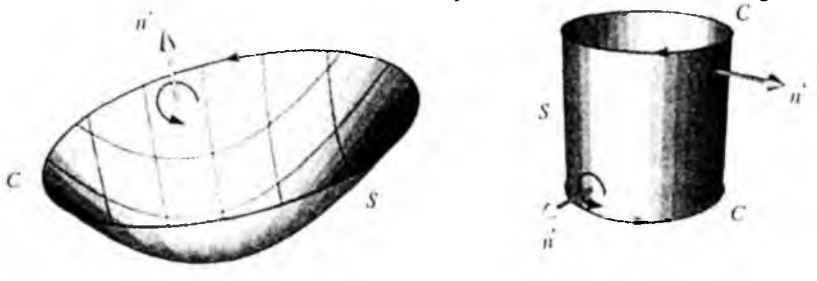


Figura 20.25 Dos superficies orientadas y sus fronteras.

Cálculo de la circulación a partir de la densidad de circulación

Considere una curva cerrada, orientada, en tres dimensiones. Puede encontrarse la circulación de un campo vectorial $\vec{F}$ alrededor de C si calculamos la integral de línea:

$$\text{Circulación alrededor de } C = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Si C es la frontera de una superficie orientada S, existe otra manera de calcular la circulación usando rot $\vec{F}$. Subdividimos S en secciones como se muestra en la superficie de la izquierda de la figura 20.25. Si $\vec{n}$ es un vector normal unitario positivo de una sección de la superficie con área ΔA, entonces $\Delta\vec{A} = \vec{n}\Delta A$. Además, $\text{circ}_n \vec{F}$ es la densidad de circulación de $\vec{F}$ alrededor de $\vec{n}$, así que

$$\text{Circulación de } \vec{F} \text{ alrededor de la frontera de la sección} \approx \left(\text{circ}_n \vec{F}\right) \Delta A = ((\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{n})\, \Delta A = (\text{rot } \vec{F}) \cdot \Delta\vec{A}.$$

A continuación se suman las circulaciones alrededor de todas las secciones. La integral de línea a lo largo del borde común de un par de secciones adyacentes aparece con signo contrario en cada sección, así que se cancela (véase Fig. 20.26.) Cuando se suman todas las secciones, los bordes internos se cancelan y sólo resta la circulación alrededor de C, que es la frontera de toda la superficie. Por lo tanto,

$$\text{Circulación alrededor de } C = \sum \text{Circulación alrededor de la frontera de las secciones} \approx \sum \text{rot } \vec{F} \cdot \Delta\vec{A}.$$

Si se toma el límite cuando $\Delta A \to 0$, resulta

$$\text{Circulación alrededor de } C = \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{A}.$$

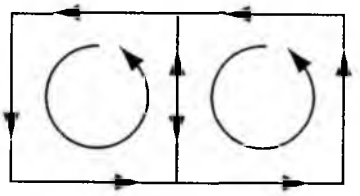


Figura 20.26 Dos secciones adyacentes de la superficie.

Hemos expresado la circulación como una integral de línea alrededor de C y como integral de flujo sobre S; entonces, las dos integrales deben ser iguales. En consecuencia tenemos

Teorema de Stokes

Si S es una superficie suave orientada con frontera C orientada, suave por partes, y $\vec{F}$ es un campo vectorial suave definido en S y C, entonces

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

La orientación de C está determinada a partir de la orientación de S, de acuerdo con la regla de la mano derecha.

Ejemplo 1 Sea $\vec{F}(x, y, z) = -2y\vec{i} + 2x\vec{j}$. Utilizar el teorema de Stokes para encontrar $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde C es un círculo

a) Paralelo al plano yz, de radio a, con centro en un punto sobre el eje x, con orientación indistinta.

b) Paralelo al plano xy, de radio a, con centro en un punto sobre el eje z, orientado en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde un punto del eje z arriba del círculo.

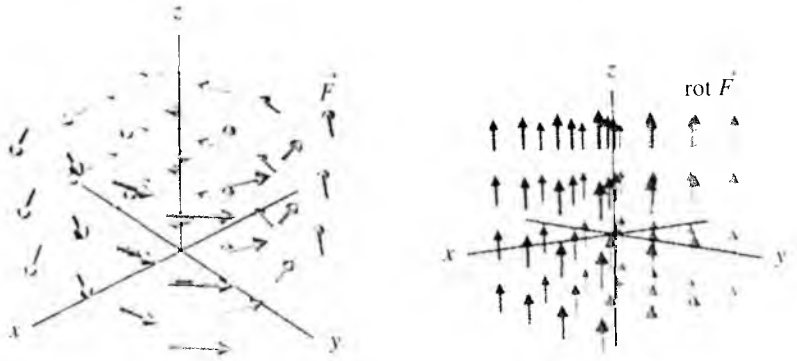


Figura 20.27 Los campos vectoriales $\vec{F}$ y rot $\vec{F}$.

Solución Tenemos rot $\vec{F} = 4\vec{k}$. La figura 20.27 muestra dibujos de $\vec{F}$ y rot $\vec{F}$.

a) Sea S el disco encerrado por C. Como S está en un plano vertical y rot $\vec{F}$ apunta verticalmente en todas partes, el flujo de rot $\vec{F}$ que atraviesa S es cero. En consecuencia, por el teorema de Stokes,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0$$

Tiene sentido que la integral de línea sea cero. Si C es paralela al plano yz (incluso si no está en el plano), la simetría del campo vectorial indica que la integral de línea de $\vec{F}$ sobre el semicírculo superior, cancela la integral de línea sobre el inferior.

b) Sea S el disco horizontal encerrado por C. Como rot $\vec{F}$ es un campo vectorial constante que apunta en la dirección de $\vec{k}$, tenemos, por el teorema de Stokes,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{A} = \|\text{rot } \vec{F}\| \text{ Área de } S = 4\pi a^2$$

Como $\vec{F}$ circula alrededor del eje z en la misma dirección que C, esperamos que la integral de línea sea positiva. De hecho, en el ejemplo 1 de la página 449, calculamos directamente esta integral de línea.

Campos vectoriales irrotacionales

El teorema de Stokes se aplica a cualquier superficie S orientada y a su frontera C, incluso en casos donde la frontera está formada por dos o más curvas. Esto es particularmente útil en el estudio de campos vectoriales irrotacionales.

Ejemplo 2 Una corriente I circula a lo largo del eje z en la dirección $\vec{k}$. El campo magnético inducido $\vec{B}(x, y, z)$ es

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{2I}{c}\left(\frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}\right),$$

donde c es la velocidad de la luz. En el ejemplo 5 de la página 454 se demuestra que rot $\vec{B} = \vec{0}$.

a) Calcular la circulación de $\vec{B}$ alrededor del círculo C_1 en el plano xy de radio a, con centro en el origen, y orientado en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba.

b) Utilzar el inciso a y el teorema de Stokes para calcular $\int_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{r}$, donde C_2 es la elipse $x^2 + 9y^2 = 9$ en el plano $z = 2$, orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba.

Solución a) En el círculo C_1, tenemos $\|\vec{B}\| = 2I/(ca)$. Como $\vec{B}$ es tangente a C_1 en todas partes y apunta en el sentido de la orientación de C_1,

$$\int_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \|\vec{B}\| \, dr = \frac{2I}{ca} \text{ longitud de } C_1 = \frac{2I}{ca} \cdot 2\pi a = \frac{4\pi I}{c}.$$

b) Sea S la superficie cónica que se extiende de C_1 a C_2 en la figura 20.28. La frontera de esta superficie tiene dos partes, $-C_2$ y C_1. La orientación de C_1 lleva a la normal hacia afuera en S, que obliga a escoger la orientación en sentido de las manecillas del reloj en C_2. Por el teorema de Stokes,

$$\int_S \text{rot } B \cdot d\vec{A} = \int_{-C_2} \vec{B} \cdot d\vec{r} + \int_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} = -\int_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{r} + \int_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{r}.$$

Como rot $\vec{B} = \vec{0}$, tenemos $\int_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$ así que las dos integrales de línea deben ser iguales:

$$\int_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi I}{c}.$$

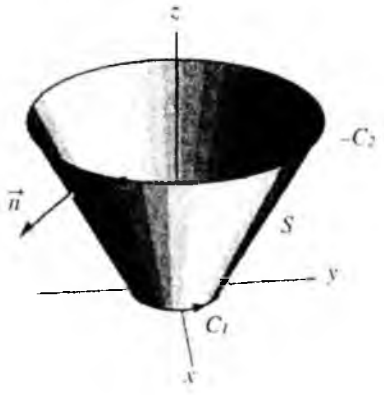


Figura 20.28 Superficie que une C_1 y C_2, orientada para satisfacer las condiciones del teorema de Stokes.

Campos rotacionales

Un campo vectorial $\vec{F}$ se denomina *campo rotacional* si $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$ para algún campo vectorial $\vec{G}$. Recuerde que si $\vec{F} = \text{grad } f$, entonces f se llama función potencial. Por analogía, si un campo vectorial $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$, entonces $\vec{G}$ se llama *potencial vectorial* para $\vec{F}$. El siguiente ejemplo demuestra que el flujo de un campo rotacional que atraviesa una superficie depende sólo de la frontera de la superficie. Esto es análogo al hecho de que la integral de línea de un campo gradiente depende sólo de los puntos finales de la trayectoria.

Ejemplo 3 Suponga que $\vec{F} = \text{rot}\,\vec{G}$. Suponga también que S_1 y S_2 son dos superficies orientadas con la misma frontera C. Demostrar que, si S_1 y S_2 determinan la misma orientación en C (como en la figura 20.29), entonces

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A}\,.$$

Si S_1 y S_2 determinan orientaciones opuestas en C, entonces

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} = -\int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A}\,.$$

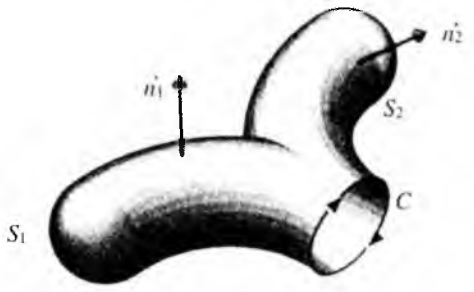


Figura 20. 29 El flujo de un rotacional es el mismo a través de dos superficies S_1 y S_2 si determinan la misma orientación en la frontera común, C.

Solución Como $\vec{F} = \text{rot}\,\vec{G}$, por el teorema de Stokes tenemos

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{S_1} \text{rot}\,\vec{G} \cdot d\vec{A} = \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$$

y

$$\int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{S_2} \text{rot}\,\vec{G} \cdot d\vec{A} = \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$$

En cada caso la integral de línea del lado derecho debe calcularse usando la orientación determinada por la superficie. Entonces, las dos integrales de flujo de $\vec{F}$ son la misma si las orientaciones son las mismas y son opuestas si las orientaciones son opuestas.

Problemas para la sección 20.4

1. ¿Puede utilizarse el teorema de Stokes para calcular la integral de línea $\int_C (2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}) \cdot d\vec{r}$, donde C es la línea recta del punto (1, 2, 3) al punto (4, 5, 6)? ¿Por qué sí o por qué no?

En los problemas del 2 al 5 calcule la integral de línea dada usando el teorema de Stokes.

2. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F} = (z - 2y)\vec{i} + (3x - 4y)\vec{j} + (z + 3y)\vec{k}$ y C es el círculo $x^2 + y^2 = 4$, $z = 1$, orientado en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba.
3. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F} = (2x - y)\vec{i} + (x + 4y)\vec{j}$ y C es un círculo de radio 10, con centro en el origen.
   a) En el plano xy, orientado en sentido de las manecillas del reloj cuando se observa desde el eje positivo de las z.
   b) En el plano yz, orientado en sentido de las manecillas del reloj cuando se observa desde el eje positivo de las x.

4. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, con $\vec{F} = \vec{r}/\|\vec{r}\|^3$, donde C es la trayectoria formada por segmentos de línea de (1, 0, 1) a (1, 0, 0), a (0, 0, 1) y de vuelta a (1, 0, 1).
5. Encuentre la circulación del campo vectorial $\vec{F} = xz\vec{i} + (x + yz)\vec{j} + x^2\vec{k}$ alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$, orientado en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba.
6. Calcule la integral de línea $\int_C ((yz^2 - y)\vec{i} + (xz^2 + x)\vec{j} + 2xyz\vec{k}) \cdot d\vec{r}$ donde C es el círculo de radio 3 del plano xy, con centro en el origen, orientado en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde el eje positivo de las z. Hágalo de dos maneras:
   a) Directamente
   b) Mediante el teorema de Stokes.
7. Sea S la superficie dada por $z = 1 - x^2$ para $0 \le x \le 1$ y $-2 \le y \le 2$, orientada hacia arriba. Verifique el teorema de Stokes para $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$. Dibuje la superficie S y la curva C que la limita.
8. Verifique el teorema de Stokes para $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ y S el paraboloide $z = 1 - (x^2 + y^2)$, $z \ge 0$ orientado hacia arriba. [Sugerencia: Utilice coordenadas polares.]
9. Suponga que C es una curva cerrada del plano xy, orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba. Demuestre que $\frac{1}{2}\int_C (-y\vec{i} + x\vec{j}) \cdot d\vec{r}$ es igual al área de la región R del plano xy encerrada por C.
10. En las figuras 20.30 y 20.31 aparecen los campos vectoriales $\vec{F}$ y $\vec{G}$. Cada campo vectorial carece de componente z y es independiente de z. Suponga que todos los ejes tienen las mismas escalas.
    a) ¿Qué puede decirse acerca de div $\vec{F}$ y div $\vec{G}$ en el origen?
    b) ¿Qué puede decir acerca de rot $\vec{F}$ y rot $\vec{G}$ en el origen?
    c) ¿Hay una superficie cerrada alrededor del origen, tal que $\vec{F}$ tiene un flujo diferente de cero a través de ella?
    d) Repita el inciso c para $\vec{G}$.
    e) ¿Hay una curva cerrada alrededor del origen, tal que $\vec{F}$ tenga circulación diferente de cero alrededor de la misma?
    f) Repita el inciso e para $\vec{G}$.

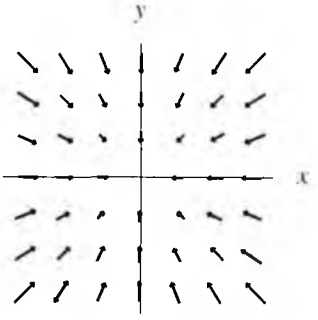


Figura 20.30 Sección transversal de $\vec{F}$

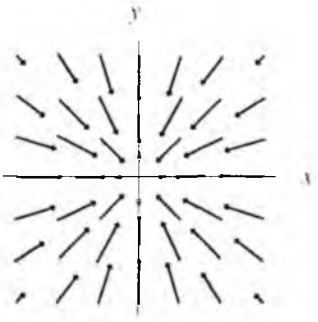


Figura 20.31 Sección transversal de $\vec{G}$

11. Utilice el teorema de Stokes para demostrar que $\int_C \text{rot}\, \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0$ para cualquier superficie S que sea la superficie de frontera de una región sólida W. Utilice la definición geométrica de la divergencia para deducir que div rot $\vec{F} = 0$.
12. Demuestre que el teorema de Green es un caso especial del teorema de Stokes.

13. Un campo vectorial $\vec{F}$ está definido en todas partes excepto en el eje z, y rot $\vec{F} = 0$ en todas partes donde $\vec{F}$ está definida. ¿Qué puede decirse a cerca de $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si C es un círculo de radio 1 del plano xy, y si el centro de C está en
    a) el origen
    b) el punto (2, 0)
14. Evalúe $\int_C (-z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}) \cdot d\vec{r}$, donde C es un círculo de radio 2 alrededor del eje y con orientación indicada en la figura 20.32.
15. Sea $\vec{F} = -z\vec{j} + y\vec{k}$, sea C el círculo de radio a en el plano yz orientado en el sentido de las manecillas del reloj cuando se observa desde el eje positivo de las x, y sea S el disco en el plano yz encerrado por C, orientado en la dirección positiva de las x. Véase la figura 20.33.
    a) Evalúe directamente $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
    b) Evalúe directamente $\int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{A}$.
    c) Las respuestas a los incisos a y b no son iguales. Explique por qué razón esto no contradice el teorema de Stokes.

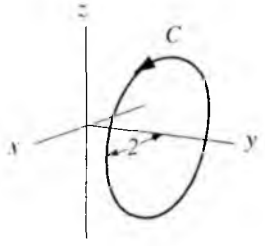


Figura 20.32

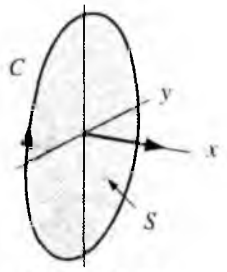


Figura 20.33

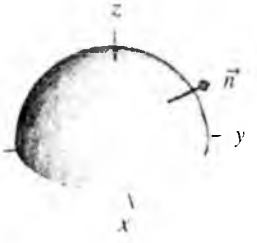


Figura 20.34

16. Sea $\vec{F} = (8yz - z)\vec{j} + (3 - 4z^2)\vec{k}$.
    a) Demuestre que $\vec{G} = 4yz^2\vec{i} + 3x\vec{j} + xz\vec{k}$ es un potencial vectorial para $\vec{F}$.
    b) Evalúe $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$ donde S es el hemisferio de radio 5 de la figura 20.34, orientado hacia arriba. [Sugerencia: Utilice el ejemplo 3 de la página 462 para simplificar el cálculo.]
17. Sea $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + \cos(xy)\,z\vec{k}$ y sea S la superficie del hemisferio unitario inferior $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \le 0$, orientado con normal que apunta hacia afuera. Encuentre $\int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{A}$.
18. El agua de una tina de baño tiene campo vectorial de velocidad, cerca del drenaje, dado para x, y y z en cm por

$$\vec{F} = -\frac{y + xz}{(z^2 + 1)^2}\vec{i} - \frac{yz - x}{(z^2 + 1)^2}\vec{j} - \frac{1}{z^2 + 1}\vec{k} \quad \text{cm/s.}$$

    a) El drenaje de la tina de baño es un disco en el plano xy con centro en el origen y radio de 1 cm. Encuentre la rapidez con la que el agua sale de la tina (es decir, la rapidez a la que el agua circula por el disco.) Dé unidades para su respuesta.
    b) Encuentre la divergencia de $\vec{F}$.
    c) Encuentre el flujo de agua a través del hemisferio de radio 1, centrado en el origen, que se encuentra bajo del plano xy y está orientado hacia abajo.
    d) Encuentre $\int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$ donde C es el borde del drenaje, orientado en el sentido de las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba, y donde

$$\vec{G} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{z^2 + 1}\vec{i} - \frac{x}{z^2 + 1}\vec{j} - \frac{x^2 + y^2}{z^2 + 1}\vec{k}\right).$$

    e) Calcule rot $\vec{G}$.
    f) Explique por qué sus respuestas a los incisos c y d son iguales.

20.5 LOS TRES TEOREMAS FUNDAMENTALES

Hasta ahora hemos estudiado tres versiones en varias variables del teorema fundamental del cálculo. En esta sección examinaremos algunas consecuencias de estos teoremas.

Teorema fundamental del cálculo para integrales de línea $\int_C \text{grad } f \cdot d\vec{r} = f(Q) - f(P).$

Teorema de Stokes $\int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$

Teorema de la divergencia $\int_C \text{div } \vec{F} \cdot dV = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{A}.$

Observe que, en cada caso, la región de integración de la derecha es la frontera de la región de la izquierda (excepto en el primer teorema, donde simplemente se evalúa f en los puntos de frontera); el integrando de la izquierda es una especie de derivada del integrando de la derecha; vea la figura 20.35.

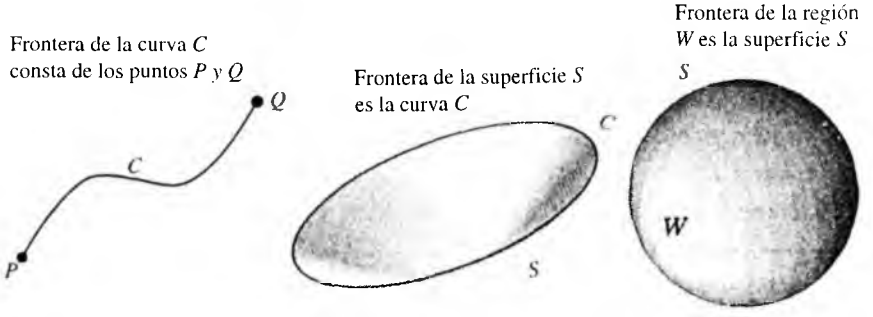


Figura 20.35 Regiones y sus fronteras para los tres teoremas fundamentales.

El gradiente y el rotacional

Suponga que $\vec{F}$ es un campo de gradiente suave, así que $\vec{F} = \text{grad } f$ para alguna función f. Por medio del teorema fundamental para integrales de línea, vimos en el capítulo 18 que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

para cualquier curva cerrada C. Por lo tanto, para cualquier vector unitario $\vec{n}$

$$\text{circ}_{\vec{n}} \vec{F} = \lim_{\text{Área} \to 0} \frac{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}{\text{Área de } C} = \lim_{\text{Área} \to 0} \frac{0}{\text{Área}} = 0,$$

donde el límite se toma sobre círculos C en un plano perpendicular a $\vec{n}$, y orientados según la regla de la mano derecha. De este modo, la densidad de circulación de $\vec{F}$ es cero en todas direcciones, así que rot $\vec{F} = \vec{0}$, es decir,

$$\boxed{\text{rot grad } f = \vec{0}}$$

(Esta fórmula también puede verificarse recurriendo a la definición en coordenadas del rotacional. Véase el problema 15 de la página 456).

¿Es verdadero el recíproco?: ¿Cualquier campo vectorial cuyo rotacional sea cero es un campo gradiente? Suponga que rot $\vec{F} = \vec{0}$ y consideremos la integral de línea $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$ para una curva cerrada C contenida en el dominio de $\vec{F}$. Si C es la frontera de una superficie orientada S que está totalmente en el dominio de rot $\vec{F}$, entonces el teorema de Stokes establece que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot}\, \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{0} \cdot d\vec{A} = 0.$$

Si supiéramos que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0$ para toda curva cerrada C, entonces $\vec{F}$ sería independiente de la trayectoria, y por lo tanto un campo gradiente. Entonces, necesitamos saber si toda curva cerrada del dominio de $\vec{F}$ es la frontera de una superficie orientada contenida en el dominio. Puede ser muy difícil determinar si una curva dada es la frontera de una superficie (suponga, por ejemplo, que la curva está anudada en una forma complicada.) No obstante esto, si la curva se puede contraer uniformemente hasta convertirse en un punto, permaneciendo todo el tiempo en el dominio de $\vec{F}$, entonces es la frontera de una superficie, a saber, la superficie que recorre a medida que se contrae.[3] Por lo tanto, hemos demostrado la condición para un campo gradiente que postulamos en el capítulo 18.

Prueba del rotacional para campos vectoriales en tres dimensiones

Supongamos que $\vec{F}$ es un campo vectorial suave en tres dimensiones tal que

- El dominio de $\vec{F}$ tiene la propiedad de que toda curva cerrada en él contenida se puede contraer hasta convertirse en un punto de manera suave, permaneciendo siempre dentro del dominio.
- rot $\vec{F} = \vec{0}$.

Entonces $\vec{F}$ es independiente de la trayectoria, y por lo tanto es un campo gradiente.

El ejemplo 6 de la página 390 muestra cómo aplicar la prueba del rotacional.

El rotacional y la divergencia

En esta sección emplearemos los últimos dos teoremas fundamentales para obtener una condición para que un campo vectorial sea un campo rotacional, es decir, un campo de la forma $\vec{F} = \text{rot}\, \vec{G}$ para alguna $\vec{G}$.

Ejemplo 1 Suponga que $\vec{F}$ es un campo rotacional suave. Utilice el teorema de Stokes para demostrar que, para cualquier superficie S cerrada, contenida en el dominio de $\vec{F}$

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0.$$

Solución Suponga que $\vec{F} = \text{rot}\, \vec{G}$. Dibuje una curva cerrada C en la superficie de S, dividiendo así S en dos superficies S_1 y S_2 como se indica en la figura 20.36. Escoja la orientación para C correspondiente a S_1; entonces la orientación de C correspondiente a S_2 es la opuesta. Por lo tanto, usando el teorema de Stokes,

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{S_1} \text{rot}\, \vec{G} \cdot d\vec{A} = \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r} = -\int_{S_2} \text{rot}\, \vec{G} \cdot d\vec{A} = -\int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A}.$$

[3] La superficie puede intersecarse a sí misma, pero esto no importa para la prueba del teorema de Stokes que se da en la sección 20.6

Así, para cualquier superficie S cerrada, tenemos

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0.$$

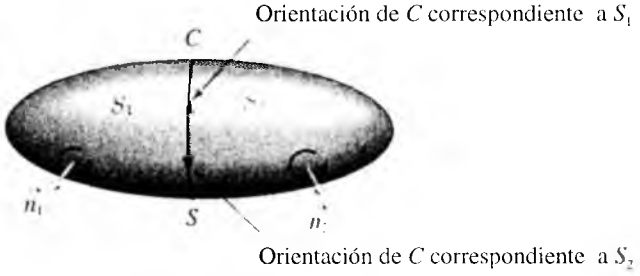


Figura 20.36 La superficie cerrada S dividida en dos superficies S_1 y S_2.

Por lo tanto, si $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$, usamos el resultado del ejemplo 1 para ver que

$$\text{div } \vec{F} = \lim_{\text{Volumen} \to 0} \frac{\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A}}{\text{Volumen encerrado por S}} = \lim_{\text{Volumen} \to 0} \frac{0}{\text{Volumen}} = 0,$$

donde el límite se toma sobre esferas S que se contraen hasta convertirse en un punto. Por esto se llega a la conclusión que

$$\text{div rot } \vec{G} = 0.$$

(Esta fórmula también puede verificarse si se usan coordenadas. Véase el problema 16 de la página 456.)

¿Todo aquel campo vectorial cuya divergencia sea cero es un campo rotacional? Resulta que tenemos el siguiente análogo de la prueba del rotacional, aunque no lo probaremos.

Prueba de la divergencia para campos vectoriales en tres dimensiones

Suponga que $\vec{F}$ es un campo vectorial suave en tres dimensiones tal que

- El dominio de $\vec{F}$ tiene la propiedad de que toda superficie cerrada en él es la frontera de una región sólida contenida por completo en el dominio.
- $\text{div } \vec{F} = 0$.

Entonces $\vec{F}$ es un campo rotacional.

Ejemplo 2 Considerar los campos vectoriales $\vec{E} = q\dfrac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$ y $\vec{B} = \dfrac{2I}{c}\left(\dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}\right)$.

a) Calcular $\text{div } \vec{E}$ y $\text{div } \vec{B}$.
b) ¿Satisfacen $\vec{E}$ y $\vec{B}$ la prueba de la divergencia?
c) ¿Alguno de los dos es un campo rotacional?

Solución a) El ejemplo 3 de la página 434 muestra que div $\vec{E} = 0$. El siguiente cálculo demuestra que también div $\vec{B} = 0$:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{2I}{c}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(0)\right)$$
$$= \frac{2I}{c}\left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0.$$

b) El dominio de $\vec{E}$ es el espacio tridimensional menos el origen, así que una región está contenida en el dominio si omite el origen. Por lo tanto, la superficie de una esfera con centro en el origen está contenida en el dominio de $\vec{E}$, no así la esfera sólida de su interior. En consecuencia, $\vec{E}$ no satisface la prueba de la divergencia.

El dominio de $\vec{B}$ es el espacio tridimensional menos el eje z, así que una región está contenida en el dominio si evita el eje z. Si S es una superficie que limita una región sólida W, entonces el eje z no puede atravesar W sin atravesar S también. En consecuencia, si S evita el eje z lo mismo ocurre con W. Por lo tanto, $\vec{B}$ sí satisface la prueba de la divergencia.

c) En el ejemplo 3 de la página 443 calculamos el flujo de $\vec{r}/\|\vec{r}\|^3$ a través de una esfera centrada en el origen, y encontramos que era $4\pi q$, así que el flujo de $\vec{E}$ que atraviesa esta esfera es $4\pi q$. Por lo tanto, $\vec{E}$ no puede ser un campo rotacional porque, por el ejemplo 1, el flujo de un campo rotacional a través de una superficie cerrada es cero.

Por otra parte, $\vec{B}$ satisface la prueba de la divergencia, así que debe ser un campo rotacional. De hecho, el problema 5 a continuación demuestra que

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\left(\frac{-I}{c}\ln(x^2+y^2)\,\vec{k}\right).$$

Problemas para la sección 20.5

De los campos vectoriales de los problemas 1 y 2, ¿cuál es un campo gradiente?

1. $\vec{F} = yz\vec{i} + (xz + z^2)\vec{j} + (xy + 2yz)\vec{k}$
2. $\vec{G} = -y\vec{i} + x\vec{j}$

3. Sea $\vec{B} = b\vec{k}$, para alguna constante b. Demuestre que los siguientes son posibles potenciales vectoriales para $\vec{B}$:

   a) $\vec{A} = -by\vec{i}$ b) $\vec{A} = bx\vec{j}$ c) $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$.

4. Encuentre un potencial vectorial para el campo vectorial constante $\vec{B}$ cuyo valor en todo punto es $\vec{b}$.

5. Demuestre que $\vec{A} = \frac{-I}{c}\ln(x^2+y^2)\vec{k}$ es un potencial vectorial para $\vec{E}\ \frac{2I}{c}\left(\frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2+y^2}\right)$.

6. ¿Hay un campo vectorial $\vec{G}$ tal que rot $\vec{G} = y\vec{i} + x\vec{j}$? ¿Cómo se puede saber?

Para cada campo vectorial de los problemas 7 y 8, determine si existe un potencial vectorial. Si es así, encuentre uno.

7. $\vec{F} = 2x\vec{i} + (3y - z^2)\vec{j} + (x - 5z)\vec{k}$
8. $\vec{G} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$

9. Una carga eléctrica q situada en el origen produce un campo vectorial $\vec{E} = q\vec{r}/\|\vec{r}\|^3$.
   a) ¿Es rot $\vec{E} = \vec{0}$?
   b) ¿Satisface $\vec{E}$ la prueba del rotacional?
   c) ¿Es $\vec{E}$ un campo gradiente?

10. Suponga que c es la velocidad de la luz. Un delgado alambre situado a lo largo del eje z, portador de una corriente I, produce un campo magnético
$$\vec{B} = \frac{2I}{c}\left(\frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}\right).$$
   a) ¿Es rot $\vec{B} = \vec{0}$?
   b) ¿Satisface $\vec{B}$ la prueba del rotacional?
   c) ¿Es $\vec{B}$ un campo gradiente?

11. Para una constante p, considere el campo vectorial $\vec{E} = \dfrac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^p}$.
   a) Encuentre rot $\vec{E}$.
   b) Encuentre el dominio de $\vec{E}$.
   c) ¿Para qué valores de p satisface $\vec{E}$ la prueba del rotacional? Para estos valores de p, encuentre una función potencial para $\vec{E}$.

12. El campo magnético, $\vec{B}$, debido a un dipolo magnético con momento $\vec{\mu}$ satisface div $\vec{B} = 0$ y está dado por
$$\vec{B} = -\frac{\vec{\mu}}{\|\vec{r}\|^3} + \frac{3(\vec{\mu}\cdot\vec{r})\,\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5}, \qquad \vec{r} \neq \vec{0}.$$
   a) ¿Satisface $\vec{B}$ la prueba de la divergencia?
   b) Demuestre que un potencial vectorial para $\vec{B}$ está dado por $\vec{A} = \dfrac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{\|\vec{r}\|^p}$.

      [Sugerencia: Utilice el problema 17 de la página 456. Las identidades del ejemplo 3 de la página 452, el problema 19 de la página 148 y el problema 24 de la página 96 pudieran ser útiles]
   c) Su respuesta del inciso a, ¿contradice su respuesta del inciso b? Explique.

13. Suponga que $\vec{A}$ es un potencial vectorial para $\vec{B}$.
   a) Demuestre que $\vec{A}$ + grad ψ es también un potencial vectorial para $\vec{B}$, para cualquier función ψ con derivadas parciales continuas de segundo orden. (Los potenciales vectoriales $\vec{A}$ y $\vec{A}$ + grad ψ se llaman *equivalentes de norma* y la transformación, para cualquier ψ, de $\vec{A}$ a $\vec{A}$ + grad ψ se llama *transformación de norma*.)
   b) ¿Cuál es la divergencia de $\vec{A}$ + grad ψ? ¿Cómo debe escogerse ψ para que $\vec{A}$ + grad ψ tenga divergencia cero? (Si div $\vec{A} = 0$, se dice que el potencial vectorial magnético $\vec{A}$ está en *norma de Coulomb*.)

La condición en la prueba del rotacional en tres dimensiones acerca de curvas que se contraen puede expresarse de manera más precisa como sigue: se dice que una curva C es *contractible suavememen-te*, hasta convertirse en un punto P, si hay una familia de curvas cerradas parametrizadas C_s, $0 \le s \le 1$, con parametrizaciones
$$\vec{r} = \vec{r}_s(t), \qquad a \le t \le b,$$
tales que C_0 es la curva original C y C_1 es el punto P. (Así, conforme s pasa de 0 a 1, la curva C_s se contrae de C a P; imagine una animación, que en el tiempo s muestra C_s.) Se necesita que $\vec{r}_s(t)$ sea

una función suave de las dos variables s y t. Observe que, como las curvas C_s son cerradas, debemos tener $r_s(a) = r_s(b)$ para cada s. Entonces la condición en la prueba del rotacional es que toda curva cerrada del dominio de $\vec{F}$ sea contractible suavemente hasta convertirse en un punto, en tal forma que C_s esté en el dominio de $\vec{F}$ para toda s. Los problemas 14, 15 y 16 utilizan estas ideas.

14. Sea C el círculo de radio 1 en el plano xy, con centro en el origen. Escriba una familia de curvas C_s que contraiga C suavemente hasta el origen.
15. Demuestre que cualquier curva C parametrizada suavemente en tres dimensiones puede contraerse suavemente hasta convertirse en cualquier punto P. [Sugerencia: contraer a lo largo de líneas rectas que unen la curva a P.]
16. Si C es una curva cerrada que es contractible suavemente hasta convertirse en un punto P, demuestre que C es la frontera de una superficie S que es parametrizada suavemente por un rectángulo (S puede intersecarse a sí misma). [Sugerencia: utilice las dos variables s y t para parametrizar la superficie.]

20.6 PRUEBAS DEL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA Y EL TEOREMA DE STOKES

Esta sección se dedica a la demostración del teorema de la divergencia y del teorema de Stokes usando las definiciones en coordenadas cartesianas.

Prueba del teorema de la divergencia

Para el teorema de la divergencia utilizamos el mismo procedimiento que empleamos para el teorema de Green: primero probamos el teorema para regiones rectangulares, luego usamos la fórmula del cambio de variables para extenderlo a regiones parametrizadas por regiones rectangulares, y finalmente pegamos tales regiones para formar regiones generales.

Prueba para sólidos rectangulares con caras paralelas a los ejes

Considere un campo vectorial uniforme $\vec{F}$ definido en el sólido rectangular V: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, $e \le z \le f$ (véase Fig. 20.37). Primero se calcula el flujo de $\vec{F}$ a través de las dos caras de V perpendiculares al eje x, A_1 y A_2, ambas orientadas hacia afuera:

$$\int_{A_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} = -\int_e^f \int_c^d F_1(a, y, z)\, dy\, dz + \int_e^f \int_c^d F_1(b, y, z)\, dy\, dz$$

$$= \int_e^f \int_c^d (F_1(b, y, z) - F_1(a, y, z))\, dy\, dz.$$

Por el teorema fundamental del cálculo,

$$F_1(b, y, z) - F_1(a, y, z) = \int_a^b \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dx.$$

así que

$$\int_{A_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_e^f \int_c^d \int_a^b \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \int_V \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dV.$$

Por un argumento similar, podemos demostrar que

$$\int_{A_3} \vec{F}\cdot d\vec{A} + \int_{A_4} \vec{F}\cdot d\vec{A} = \int_V \frac{\partial F_2}{\partial y}\,dV \quad \text{y} \quad \int_{A_5} \vec{F}\cdot d\vec{A} + \int_{A_6} \vec{F}\cdot d\vec{A} = \int_V \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dV.$$

Al sumar éstas, obtenemos

$$\int_A \vec{F}\cdot d\vec{A} = \int_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dV = \int_V \operatorname{div} \vec{F}\,dV.$$

Éste es el teorema de la divergencia para la región V.

Prueba para regiones parametrizadas por sólidos rectangulares

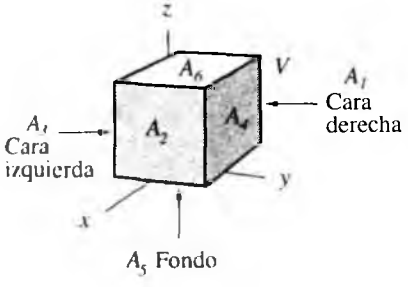


Figura 20.37 Sólido rectangular V en el espacio xyz.

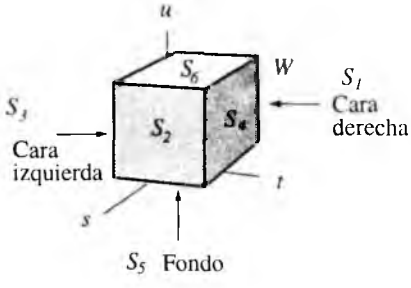
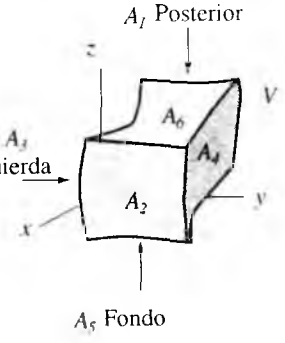


Figura 20.38 Un sólido rectangular W del espacio stu y el correspondiente sólido curvo V del espacio xyz.



Suponga ahora que tenemos un cambio suave de coordenadas

$$x = x(s, t, u), \qquad y = y(s, t, u), \qquad z = z(s, t, u).$$

Considere un sólido curvo V en el espacio xyz correspondiente a un sólido rectangular W en el espacio stu. Vea la figura 20.38. Se supone que el cambio de coordenadas es biunívoco en el interior de W, y que su determinante jacobiano es positivo en W. Probaremos el teorema de la divergencia para V usando el teorema de la divergencia para W.

Sea A la frontera de V. Para probar el teorema de la divergencia para V, debemos demostrar que

$$\int_A \vec{F}\cdot d\vec{A} = \int_V \operatorname{div} \vec{F}\cdot dV$$

Primero expresamos el flujo a través de A como una integral de flujo sobre S, que es la frontera de la región rectangular W en el espacio stu. En notación vectorial, el cambio de coordenadas es

$$\vec{r} = \vec{r}(s, t, u) = x(s, t, u)\vec{i} + y(s, t, u)\vec{j} + z(s, t, u)\vec{k}.$$

La cara A_1 de V está parametrizada por

$$\vec{r} = \vec{r}(a, t, u) \qquad c \le t \le d, \qquad e \le u \le f,$$

así que en esta cara.

$$d\vec{A} = \pm \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}.$$

De hecho, para que $d\vec{A}$ apunte hacia afuera, debemos escoger el signo negativo (el problema 3 de la página 476 muestra cómo se deduce esto del hecho de que el determinante jacobiano sea positivo). Entonces, si S_1 es la cara $s = a$ de W,

$$\int_{A_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} = -\int_{S_1} \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\, dt\, du.$$

El elemento de área para S_1 que apunta hacia afuera es $d\vec{S} = -\vec{i}\, dt\, du$. Por lo tanto, si escogemos un campo vectorial $\vec{G}$ en el espacio stu cuya componente en la dirección s es

$$G_1 = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u},$$

tenemos

$$\int_{A_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{S_1} \vec{G} \cdot d\vec{S}.$$

De manera similar, si definimos las componentes t y u de $\vec{G}$ por

$$G_2 = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \quad \text{y} \quad G_3 = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

entonces

$$\int_{A_i} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{S_i} \vec{G} \cdot d\vec{S}, \quad i = 2, \ldots, 6.$$

(Véase el problema 4.) Al sumar las integrales para todas las caras, encontramos que

$$\int_A \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{G}\, d\vec{S}$$

Como ya se probó el teorema de la divergencia para la región rectangular W, se tiene

$$\int_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = \int_W \operatorname{div} \vec{G}\, dW,$$

donde

$$\operatorname{div} \vec{G} = \frac{\partial G_1}{\partial s} + \frac{\partial G_2}{\partial t} + \frac{\partial G_3}{\partial u}$$

Los problemas 5 y 6 de la página 476 demuestran que

$$= \frac{\partial G_1}{\partial s} + \frac{\partial G_2}{\partial t} + \frac{\partial G_3}{\partial u} = \left| \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (s, t, u)} \right| \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right).$$

Por lo tanto, por la fórmula del cambio de variables para tres variables de la página 277,

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV &= \int_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz \\ &= \int_W \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \left| \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (s, t, u)} \right| ds\, dt\, du \\ &= \int_W \left(\frac{\partial G_1}{\partial s} + \frac{\partial G_2}{\partial t} + \frac{\partial G_3}{\partial u} \right) ds\, dt\, du \\ &= \int_W \operatorname{div} \vec{G}\, dW. \end{aligned}$$

En resumen, hemos demostrado que

$$\int_A \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{G} \cdot d\vec{S}$$

y

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV = \int_W \operatorname{div} \vec{G} \cdot dW.$$

Por el teorema de la divergencia para sólidos rectangulares, los lados derechos de estas ecuaciones son iguales, así que los lados izquierdos también lo son. Esto prueba el teorema de la divergencia para la región curva V.

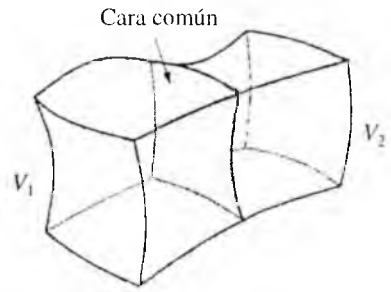


Figura 20. 39 Región V formada al unir V_1 y V_2.

Unión de regiones

Al igual que en la prueba del teorema de Green, se probó el teorema de la divergencia para regiones más generales al unir pequeñas regiones a lo largo de caras comunes. Suponga que la región sólida V se forma al pegar los sólidos V_1 y V_2 a lo largo de una cara común, como en la figura 20.39.

La superficie A que limita a V se forma al unir las superficies A_1 y A_2 que limitan a V_1 y V_2, luego de suprimir la cara común. La integral de flujo hacia afuera de un campo vectorial $\vec{F}$ a través de A_1 incluye la integral sobre la cara común, y la integral del flujo de $\vec{F}$ que pasa por A_2 incluye la integral sobre la misma cara, pero esta vez orientada en la dirección opuesta. Así, cuando sumamos las integrales, las contribuciones de la cara común se cancelan, y obtenemos la integral de flujo a través de A. Entonces tenemos

$$\int_A \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{A}.$$

Pero también se tiene

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV = \int_{V_1} \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV + \int_{V_2} \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV.$$

Por lo tanto, el teorema de la divergencia para V se deduce del teorema de la divergencia para V_1 y V_2. En consecuencia, hemos probado el teorema de la divergencia para cualquier región formada al unir regiones que pueden ser parametrizadas suavemente por sólidos rectangulares.

Ejemplo 1 Sea V una pelota esférica de radio 2, centrada en el origen, a la que se le ha quitado una pelota concéntrica de radio 1. Usando coordenadas esféricas, demostrar que la prueba del teorema de la divergencia que hemos dado se aplica a V.

Solución Se corta V en dos hemisferios W huecos como se muestra en la figura 20.40. En coordenadas esféricas, W es el rectángulo $1 \le \rho \le 2,\ 0 \le \phi \le \pi,\ 0 \le \theta \le \pi$. Cada cara de este rectángulo se convierte en

parte de la frontera de W. Las caras $\rho = 1$ y $\rho = 2$ se convierten en las superficies hemisféricas interior y exterior que son parte de la frontera de W; las caras $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, en las dos mitades de la parte plana de la frontera de W. Las caras $\phi = 0$ y $\phi = \pi$ se convierten en segmentos de recta a lo largo del eje z. Podemos formar V al unir dos regiones sólidas como W a lo largo de las superficies planas donde $\theta =$ constante.

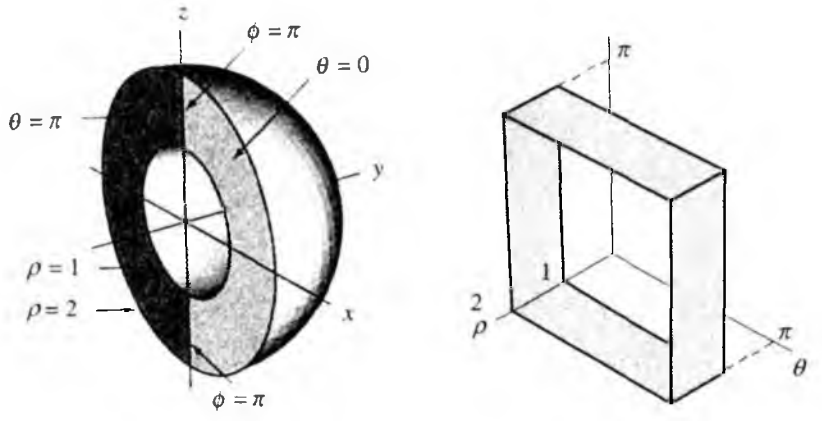


Figura 20.40 El hemisferio hueco W y la región rectangular correspondiente del espacio $\rho\theta\phi$.

Prueba del teorema de Stokes

Considere una superficie orientada A, limitada por la curva B. Deseamos probar el teorema de Stokes:

$$\int_A \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Suponemos que A tiene una parametrización suave $\vec{r} = \vec{r}\,(s, t)$, de modo que A corresponde a una región R del plano st, y B corresponde a la frontera C de R. Véase la figura 10.41. Probamos el teorema de Stokes para la superficie A y un campo vectorial $\vec{F}$ expresando las integrales de ambos lados del teorema en términos de s y t, y usando el teorema de Green en el plano st.

Primero, se convierte la integral de línea $\int_B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ en una integral de línea alrededor de C:

$$\int_B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\, ds + \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\, dt.$$

Por esto, si definimos un campo vectorial bidimensional $\vec{G} = (G_1, G_2)$ del plano st por

$$G_1 = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \qquad \text{y} \qquad G_2 = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t},$$

entonces

$$\int_B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{G} \cdot d\vec{s}$$

usando $\vec{s}$ para denotar el vector de posición de un punto del plano st.

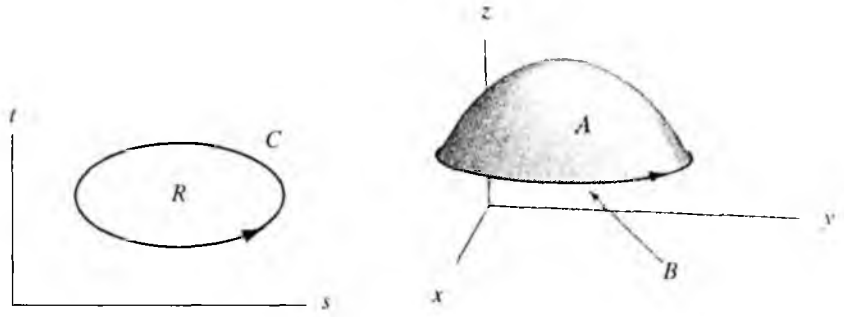


Figura 20.41 Una región R del plano st y la correspondiente superficie A del espacio xyz; la curva C corresponde a la frontera de B.

¿Qué hay de la integral de flujo $\int_A \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{A}$ que figura en el otro lado del teorema de Stokes? En términos de la parametrización,

$$\text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_R \text{rot } \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\, ds\, dt.$$

En el problema 7 de la página 477 demostramos que

$$\text{rot } \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial G_2}{\partial s} - \frac{\partial G_1}{\partial t}.$$

Por lo tanto,

$$\int_A \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_R \left(\frac{\partial G_2}{\partial s} - \frac{\partial G_1}{\partial t} \right) ds\, dt.$$

Ya hemos visto que

$$\int_B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{G} \cdot d\vec{s}$$

Por el teorema de Green, los lados derechos de las últimas dos ecuaciones son iguales. En consecuencia, los lados izquierdos también lo son, que es lo que teníamos que demostrar para el teorema de Stokes.

Problemas para la sección 20.6

1. Sea W un cilindro sólido circular a lo largo del eje z, al que se le ha quitado un cilindro concéntrico más pequeño. Parametrice W mediante un sólido rectangular del espacio $r\theta z$, donde r, θ y z son coordenadas cilíndricas.
2. En esta sección probamos el teorema de la divergencia usando la definición en coordenadas de la divergencia. Ahora utilizamos el teorema de la divergencia para demostrar que la definición en coordenadas es la misma que la definición geométrica. Suponga que $\vec{F}$ es suave en una vecindad de (x_0, y_0, z_0), y sea U_R la esfera de radio R con centro (x_0, y_0, z_0). Sea m_R el valor mínimo de div $\vec{F}$ en U_R y sea M_R el valor máximo.
   a) Sea S_R la esfera que limita a U_R. Demuestre que

$$m_R \leq \frac{\int_{S_R} \vec{F} \cdot d\vec{A}}{\text{Volumen de } U_R} \leq M_R.$$

b) Explique por qué puede llegarse a la conclusión

$$\lim_{R \to 0} \frac{\int_{S_R} \vec{F} \cdot d\vec{A}}{\text{Volumen de } U_R} = \text{div } \vec{F}(x_0, y_0, z_0).$$

c) Explique por qué el enunciado del inciso b sigue siendo verdadero si se sustituye U_R por un cubo de lado R, centrado en (x_0, y_0, z_0).

Los problemas del 3 al 6 completan los detalles de la prueba del teorema de la divergencia.

3. La figura 20.38 de la página 471 muestra la región sólida V del espacio xyz parametrizada por un sólido rectangular W del espacio stu usando el cambio de coordenadas

$$\vec{r} = \vec{r}(s, t, u), \qquad a \le s \le b, \qquad c \le t \le d \qquad e \le u \le f.$$

Suponga que $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial s} \cdot \left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right)$ es positivo.

a) Sea A_1 la cara de V correspondiente a la cara $s = a$ de W. Demuestre que $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial s}$, si no es cero, apunta hacia dentro de W.

b) Demuestre que $-\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ es una normal en A_1 que apunta hacia afuera.

c) Encuentre una normal en A_2, que es la cara de V donde $s = b$, que apunte hacia afuera.

4. Demuestre que para las otras cinco caras del sólido V de la prueba del teorema de la divergencia (véase pág. 450):

$$\int_{A_i} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{S_i} \vec{G} \cdot d\vec{S}, \qquad i = 2, 3, 4, 5, 6.$$

5. Suponga que $\vec{F}$ es un campo vectorial y que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores. En este problema demostramos la fórmula:

$$\text{grad}(\vec{F} \cdot \vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} + \text{grad}(\vec{F} \cdot \vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} + \text{grad}(\vec{F} \cdot \vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}) \text{ div } \vec{F}.$$

a) Si interpreta la divergencia como densidad de flujo, explique por qué la fórmula tiene sentido. [Sugerencia: Considere el flujo de salida de un pequeño paralelepípedo con aristas paralelas a $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.]

b) Diga cuántos términos hay en la expansión del lado izquierdo de la fórmula en coordenadas cartesianas, sin desarrollar la expansión.

c) Escriba todos los términos del lado izquierdo que contengan $\partial F_1/\partial x$. Demuestre que estos términos suman $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}$.

d) Escriba todos los términos que contengan $\partial F_1/\partial y$. Demuestre que la suma de éstos es cero.

e) Explique cómo quedan las expresiones en donde intervienen las otras siete derivadas parciales, así como la manera en que esto demuestra que la fórmula se cumple.

6. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial suave en tres dimensiones, y sea

$$x = x(s, t, u), \qquad y = y(s, t, u), \qquad z = z(s, t, u)$$

un cambio suave de variables, que escribiremos en forma vectorial como

$$\vec{r} = \vec{r}(s, t, u) = x(s, t, u)\vec{i} + y(s, t, u)\vec{j} + z(s, t, u)\vec{k},$$

Defina un campo vectorial $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$ del espacio *stu* por

$$G_1 = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \qquad G_2 = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \qquad G_3 = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}.$$

a) Demuestre que

$$\frac{\partial G_1}{\partial s} + \frac{\partial G_2}{\partial t} + \frac{\partial G_3}{\partial u} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}.$$

b) Sea $\vec{r}_0 = \vec{r}(s_0, t_0, u_0)$, y sea

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}(\vec{r}_0), \quad \vec{b} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(\vec{r}_0), \quad \vec{c} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(\vec{r}_0)$$

Utilice la regla de la cadena para demostrar que

$$\left(\frac{\partial G_1}{\partial s} + \frac{\partial G_2}{\partial t} + \frac{\partial G_3}{\partial u} \right) \Bigg|_{\vec{r} = \vec{r}_0} = \text{grad}\,(\vec{F} \cdot \vec{b} \times \vec{c}\,) \cdot \vec{a} + \text{grad}\,(\vec{F} \cdot \vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} + \text{grad}\,(\vec{F} \cdot \vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

c) Utilice el problema 5 para demostrar que

$$\frac{\partial G_1}{\partial s} + \frac{\partial G_2}{\partial t} + \frac{\partial G_3}{\partial u} = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, t, u)} \right| \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right)$$

7. Este problema completa la prueba del teorema de Stokes. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial suave en tres dimensiones, y sea S una superficie parametrizada por $\vec{r} = \vec{r}(s, t)$. Sea $\vec{r}_0 = \vec{r}(s_0, t_0)$, un punto fijo en S. Definimos un campo vectorial en el espacio *st* como en la página 474:

$$G_1 = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \qquad G_2 = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}.$$

a) Sea $\vec{a} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}(\vec{r}_0)$, $\vec{b} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(\vec{r}_0)$. Demuestre que

$$\frac{\partial G_1}{\partial t}(\vec{r}_0) - \frac{\partial G_2}{\partial s}(\vec{r}_0) = \text{grad}\,(\vec{F} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} - \text{grad}(\vec{F} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a}.$$

b) Utilice el problema 27 de la página 458 para demostrar que

$$\text{rot}\,\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial G_2}{\partial s} - \frac{\partial G_1}{\partial t}.$$

PROBLEMAS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO VEINTE

1. Utilice la definición geométrica de divergencia para encontrar div $\vec{v}$ en el origen, donde $\vec{v} = -2\vec{r}$. Compruebe que se obtenga el mismo resultado usando la definición en coordenadas cartesianas.

2. ¿Puede evaluarse la integral de flujo del problema 12 de la página 427 mediante del teorema de la divergencia? ¿Por qué sí o por qué no?

3. Si V es un volumen rodeado por una superficie cerrada S, demuestre que $\frac{1}{3} \int_S \vec{r} \cdot d\vec{A} = V$.

4. Utilice el problema 3 para calcular el volumen de una esfera de radio R, dado que su área superficial es $4\pi R^2$.

5. Utilice el problema 3 para calcular el volumen de un cono de radio de la base b y altura h. [Sugerencia: Coloque el cono con la punta hacia abajo y el eje a lo largo del eje positivo de las z.]

6. a) Encuentre el flujo del campo vectorial $\vec{F} = 2x\vec{i} - 3y\vec{j} + 5z\vec{k}$ a través de caja con cuatro de sus esquinas en los puntos (a, b, c), $(a + w, b, c)$, $(a, b + w, c)$, $(a, b, c + w)$ y aristas de longitud w. Véase la figura 20.42.

   b) Utilice la definición geométrica y el inciso a para encontrar div $\vec{F}$ en el punto (a, b, c).

   c) Encuentre div $\vec{F}$ usando derivadas parciales.

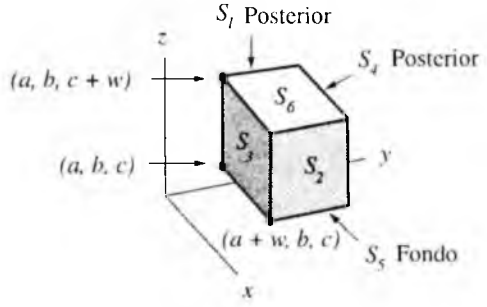


Figura 20.42

7. Suponga que $\vec{F} = (3x + 2)\vec{i} + 4x\vec{j} + (5x + 1)\vec{k}$. Utilice el método del problema 6 para encontrar div $\vec{F}$ en el punto (a, b, c) por dos métodos diferentes.

8. Calcule la integral de flujo $\int_S (x^3\vec{i} + 2y\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot d\vec{A}$, donde S es la superficie rectangular de $2 \times 2 \times 2$ con centro en el origen, orientada hacia afuera. Haga esto en dos formas:

   a) Directamente b) Por medio del teorema de la divergencia

¿Son falsos o verdaderos los enunciados de los problemas del 9 al 16? Suponga que $\vec{F}$ y $\vec{G}$ son campos vectoriales suaves en tres dimensiones. Explique su respuesta.

9. rot $\vec{F}$ es un campo vectorial.

10. $\text{grad}(fg) = (\text{grad } f) \cdot (\text{grad } g)$

11. $\text{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{div } \vec{F} + \text{div } \vec{G}$

12. $\text{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \vec{F}(\text{div } \vec{G}) + (\text{div } \vec{F})\vec{G}$

13. $\text{rot}(f\vec{G}) = (\text{grad } f) \times \vec{G} + f(\text{rot } \vec{G})$

14. div $\vec{F}$ es un escalar cuyo valor puede variar de punto a punto.

15. Si $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = 12$ y S es un disco plano de área 4π, entonces div $\vec{F} = 3/\pi$.

16. Si $\vec{F}$ es el que se muestra en la figura 20.43, rot $\vec{F} \cdot \vec{j} > 0$.

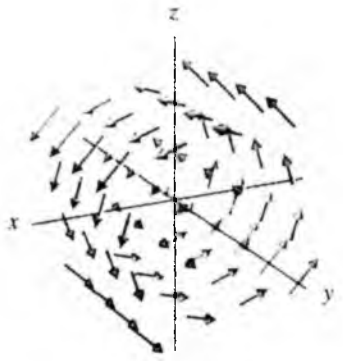


Figura 20.43

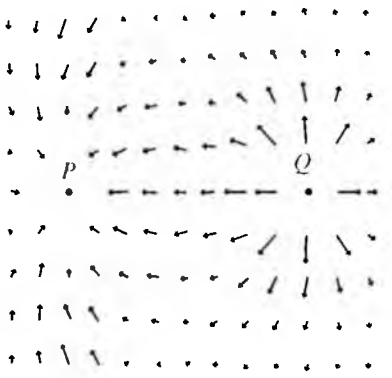


Figura 20.44

17. La figura 20.44 muestra la parte de un campo vectorial $\vec{E}$ que está en el plano xy. Suponga que el campo vectorial es independiente de z, de modo que cualquier sección transversal horizontal es semejante. ¿Qué se puede decir acerca de div $\vec{E}$ en los puntos marcados P y Q, si se supone que está definida?

18. Suponga que $\vec{F} = \vec{r}/\|\vec{r}\|^3$. Encuentre $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$ donde S es el elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$. Dé razones para su cálculo.

19. Un campo vectorial central es aquel de la forma $\vec{F} = f(r)\vec{r}$ donde f es cualquier función de $r = \|\vec{r}\|$. Demuestre que cualquier campo vectorial central es irrotacional.

20. Según la ley de Coulomb, el campo electrostático $\vec{E}$ en el punto $\vec{r}$ debido a una carga q en el origen está dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = q\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}.$$

a) Calcule div $\vec{E}$.
b) Sea S_a la esfera de radio a con centro en el origen y orientada hacia afuera. Demuestre que el flujo de $\vec{E}$ a través de S_a es $4\pi q$.
c) ¿Podría haberse utilizado el teorema de la divergencia en el inciso b? Explique por qué sí o por qué no.
d) Sea S una superficie arbitraria, cerrada, orientada hacia afuera, que rodea al origen. Demuestre que el flujo de $\vec{E}$ a través de S es otra vez $4\pi q$. [Sugerencia: Aplique el teorema de la divergencia a la región sólida que está entre una pequeña esfera S_a y la superficie S.]

21. Según la ley de Coulomb, el campo eléctrico $\vec{E}$ en el punto $\vec{r}$ debido a una carga q colocada en el punto $\vec{r}_0$ está dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = q\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^3}.$$

Suponga que S es una superficie cerrada, orientada hacia afuera, y que $\vec{r}_0$ no está en S. Utilice el problema 20 para demostrar que

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \begin{cases} 4\pi q & \text{si } q \text{ está dentro de } S, \\ 0 & \text{si } q \text{ está fuera de } S. \end{cases}$$

22. En el punto con vector de posición $\vec{r}$, el campo eléctrico $\vec{E}$ de un dipolo eléctrico ideal con momento $\vec{p}$ ubicado en el origen está dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = 3\frac{(\vec{r}-\vec{p})\,\vec{r}}{\|\vec{r}\|^5} - \frac{\vec{p}}{\|\vec{r}\|^3}.$$

a) ¿Cuál es div $\vec{E}$?

b) Suponga que S es una superficie suave, cerrada, orientada hacia afuera, que rodea al origen. Calcule el flujo de $\vec{E}$ a través de S. ¿Se puede usar el teorema de la divergencia directamente para calcular el flujo? Explique por qué sí o por qué no. [Sugerencia: Primero calcule el flujo del campo dipolar $\vec{E}$ a través de una esfera S_a, orientada hacia afuera, con centro en el origen y radio a. Luego aplique el teorema de la divergencia a la región W que está entre S y una pequeña esfera S_a.]

23. Debido a reparaciones, el tránsito en una carretera se frena en forma lineal de 55 mph a 15 mph sobre un tramo de 2000 pies, luego avanza a 15 mph en un trayecto de 5000 pies, y después acelera linealmente hasta 55 mph en los siguientes 1000 pies, después de los cuales prosigue a velocidad constante de 55 millas por hora.

a) Dibuje un campo vectorial de velocidad para el flujo de tránsito.

b) Escriba una fórmula para encontrar el campo vectorial de velocidad $\vec{v}$ (millas/hora) como función de la distancia a x pies del punto inicial de reducción de velocidad. (Tome la dirección de movimiento como $\vec{i}$ y considere separadamente las diversas secciones del camino.)

c) Calcule div $\vec{v}$ en $x = 1000, 5000, 7500, 10\,000$. Cerciórese de incluir las unidades apropia-das.

24. El campo de velocidad $\vec{v}$ del problema 23 no da una descripción completa del flujo de tránsito, porque no considera la distancia entre vehículos. Sea ρ la densidad (automóviles/milla) de tráfico en la carretera, donde se supone que ρ depende sólo de x.

a) Por su experiencia en carretera, disponga en orden ascendente: $\rho(0)$, $\rho(1000)$, $\rho(5000)$.

b) ¿Cuáles son las unidades e interpretación del campo vectorial $\rho\vec{v}$?

c) ¿Es de esperarse que $\rho\vec{v}$ sea constante? ¿Por qué? ¿Qué significa esto para div $(\rho\vec{v})$?

d) Determine $\rho(x)$ si $\rho(0) = 75$ automóviles/milla y $\rho\vec{v}$ es constante.

e) Si la carretera tiene dos carriles, encuentre el número aproximado de pies entre automóviles consecutivos en $x = 0$, 1000 y 5000.

25. a) Un río atraviesa el plano xy en la dirección positiva de las x y rodea una piedra circular de radio 1 con centro en el origen. La velocidad de las aguas del río se puede modelar usando la función potencial $\phi = x + (x/(x^2 + y^2))$. Calcule el campo vectorial de velocidad $\vec{v} = \text{grad}\,\phi$.

b) Demuestre que div $\vec{v} = 0$.

c) Demuestre que el flujo de $\vec{v}$ es tangente al círculo $x^2 + y^2 = 1$. Esto significa que el agua no cruza el círculo. Por lo tanto, el agua del exterior debe fluir alrededor del círculo.

d) Dibuje en la computadora el campo vectorial $\vec{v}$ en la región fuera del círculo unitario.

26. Evalúe

$$\vec{F} = (\text{grad}\,\phi) + \vec{v} \times \vec{r}$$

donde

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2}(a_1x^2 + b_2y^2 + c_3z^2 + (a_2 + c_1)\,xz + (b_3 + c_2)\,yz)$$

y

$$\vec{v} = \frac{1}{2}((c_2 - b_3)\,\vec{i} + (a_3 - c_1)\vec{j} + (b_1 - a_2)\vec{k}).$$

Explique por qué todo campo vectorial lineal puede escribirse en la forma (grad ϕ) + $\vec{v} \times \vec{r}$

Los problemas 27 y 28 utilizan el hecho de que el campo eléctrico, $\vec{E}$, está relacionado con la densidad de carga, $\rho(x, y, z)$, en unidades de carga/volumen, por la ecuación

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$$

Además, hay un potencial eléctrico, ϕ, cuyo gradiente da el campo eléctrico:

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi.$$

27. Calcule y describa verbalmente el campo eléctrico y la distribución de carga correspondiente a la función potencial definida así:

$$\phi = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & \text{para } x^2 + y^2 + z^2 \le \frac{b^2}{4} \\ \frac{b^2}{4} - \frac{b^3}{4\,(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} & \text{para } \frac{b^2}{4} \le x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

28. Un campo vectorial que podría posiblemente representar un campo eléctrico está dado por

$$\vec{E} = 10xy\vec{i} + (5x^2 - 5y^2)\vec{j}.$$

a) Calcule la integral de línea de $\vec{E}$ del origen al punto (a, b), a lo largo de la trayectoria que corre en línea recta del origen al punto $(a, 0)$, y luego en línea recta de $(a, 0)$ al punto (a, b).
b) Calcule la integral de línea de $\vec{E}$ entre los mismos puntos del inciso a pero vía el punto $(0, b)$.
c) ¿Por qué las respuestas de los incisos a y b sugieren que $\vec{E}$ podría ser en efecto un campo eléctrico?
d) Encuentre el potencial eléctrico, ϕ, y calcule grad ϕ para confirmar que $\vec{E} = -$ grad ϕ.

29. Las relaciones entre el campo eléctrico, $\vec{E}$, el campo magnético, $\vec{B}$, la densidad de carga, ρ, y la densidad de corriente, $\vec{J}$, en un punto en el espacio están descritas por las ecuaciones

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho,$$

$$\text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}.$$

donde c es una constante (la velocidad de la luz).

a) Mediante los resultados del problema 16 de la página 456, demuestre que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0.$$

b) ¿Qué indica la ecuación del inciso a acerca de la carga y la densidad de corriente? Explique en términos intuitivos por qué es esto razonable.
c) ¿Por qué considera que la ecuación del inciso a se llama ecuación de conservación de la carga?

30. Un campo vectorial es una *fuente puntual* en el origen, en tres dimensiones, si apunta siempre hacia afuera del origen, su magnitud depende sólo de la distancia al origen y su divergencia es cero excepto en el origen. (Tal campo vectorial podría utilizarse para modelar el flujo de fotones que sale de una estrella, o el flujo de neutrinos que sale de una supernova.)

a) Demuestre que $\vec{v} = K(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ es una fuente puntual en el origen si $K > 0$.

b) Determine la magnitud $\|\vec{v}\|$ de la fuente del inciso a como función de la distancia desde su centro.
c) Calcule el flujo de $\vec{v}$ a través de una esfera de radio r con centro en el origen.
d) Calcule el flujo de $\vec{v}$ a través de una superficie cerrada que no contiene el origen.

31. Una propiedad básica del campo magnético $\vec{B}$ es que rot $\vec{B} = 0$ en una región donde no hay corriente. Considere el campo magnético alrededor de un alambre delgado y largo, portador de una corriente constante. La magnitud del campo magnético depende sólo de la distancia desde el alambre, y su dirección es siempre tangente al círculo alrededor del alambre recorrido en una dirección relacionada con la dirección de la corriente por la regla de la mano derecha. Utilice el teorema de Stokes para deducir que la magnitud del campo magnético es proporcional al recíproco de la distancia desde el alambre. [Sugerencia: Considere un anillo alrededor del alambre Su frontera tiene dos secciones: un círculo interior y uno exterior.]

32. La velocidad de un vórtice que ocurre de manera natural (tornado, tromba, remolino) es una función decreciente de la distancia desde su centro, así que el modelo de velocidad angular constante del problema 18 de la página 456 es inadecuado. Un vórtice libre que circula alrededor del eje z tiene campo vectorial $\vec{v} = K(x^2 + y^2)^{-1}(-y\vec{i} + x\vec{j})$ donde K es una constante.

a) Dibuje el campo vectorial con $K = 1$ y el campo vectorial con $K = -1$.
b) Determine la velocidad $\|\vec{v}\|$ del vórtice como función de la distancia desde su centro.
c) Calcule div $\vec{v}$.
d) Demuestre que rot $\vec{v} = 0$.
e) Calcule la circulación de $\vec{v}$ en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj alrededor del círculo de radio R en el origen.
f) Los cálculos de los incisos d y e demuestran que el rotacional de $\vec{v}$ es $\vec{0}$, pero tiene circulación diferente de cero alrededor de la curva cerrada del inciso e. Explique por qué esto no contradice el teorema de Stokes.

APÉNDICES

A. Repaso de linealidad local para una variable
B. Máximos y mínimos de funciones de una variable
C. Determinantes
D. Repaso de integración de una variable
E. Tabla de integrales
F. Repaso de funciones de densidad y probabilidad
G. Repaso de coordenadas polares

A REPASO DE LINEALIDAD LOCAL PARA UNA VARIABLE

Si hacemos un acercamiento a la gráfica de una función suave de una variable, $y = f(x)$, alrededor del punto $x = a$, la gráfica se asemejará cada vez más a una línea recta y de esta manera llegará a no distinguirse de su recta tangente en ese punto (véase Fig. A.1.)

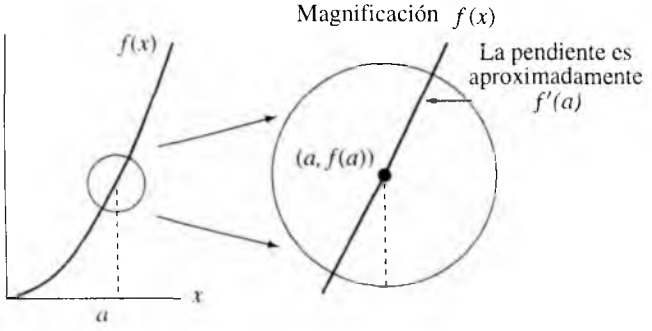


Figura A.1 Acercamiento en una parte de una función de una variable hasta que la gráfica esté casi recta.

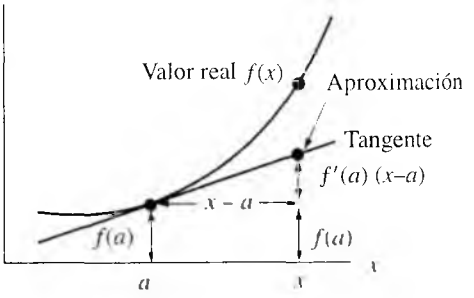


Figura A.2 Linealización local por la aproximación de la recta tangente.

La pendiente de la recta tangente es la derivada $f'(a)$, y la recta pasa por el punto $(a, f(a))$, de modo que su ecuación es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

(Véase la figura A.2.) Ahora aproximamos los valores de f por los valores de y de la recta tangente, obteniendo el siguiente resultado.

Aproximación de la recta tangente para valores de x cerca de a

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

Estamos considerando a como fija, de modo que $f(a)$ y $f'(a)$ son constantes y la expresión del lado derecho es lineal en x. El hecho de que f sea aproximadamente una función lineal de x cerca de a se expresa diciendo que f es *localmente lineal* cerca de $x = a$.

Ejemplo 1 Encontrar la linealización local en $x = 2$ de la función u de una variable, dado que $u(2) = 135$ y $u'(2) = 16$.

Solución Como $u(2) = 135$ y $u'(2) = 16$, la aproximación de la recta tangente a $u(x)$ en $x = 12$ es

$$u(x) \approx u(2) + u'(2)(x - 2) = 135 + 16(x - 2) \text{ para } x \text{ cerca de } 2.$$

B MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Si f es una función de una variable y x es un punto en su dominio, decimos que

- p es un *punto crítico* de f si $f'(p) = 0$ o $f'(p)$ no está definida
- f tiene un *máximo local* en un punto crítico, x_0, si $f(x) \le f(x_0)$ para toda x cerca de x_0
- f tiene un *mínimo local* en un punto crítico, x_0, si $f(x) \ge f(x_0)$ para toda x cerca de x_0
- f tiene un *máximo global* en x_0 si $f(x) \le f(x_0)$ para toda x
- f tiene un *mínimo global* si $f(x) \ge f(x_0)$ para toda x

Los extremos globales (es decir, máximos y mínimos globales) sólo pueden presentarse en extremos locales o en los puntos extremos de un intervalo (véase Fig. B.3.) Para encontrar extremos locales, primero hay que encontrar los puntos críticos. Para encontrar extremos globales, se evalúa la función en los puntos críticos y en los puntos extremos del intervalo (si están incluidos).

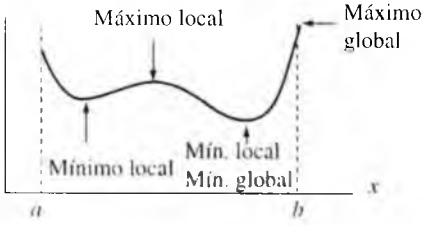


Figura B.3 Extremo local y global sobre un intervalo cerrado $a \le x \le b$.

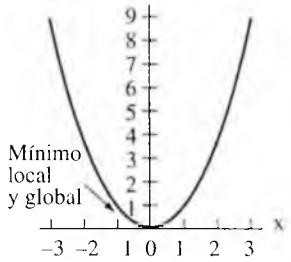


Figura B.4 Extremo de $f(x) = x^2$ sobre la recta real.

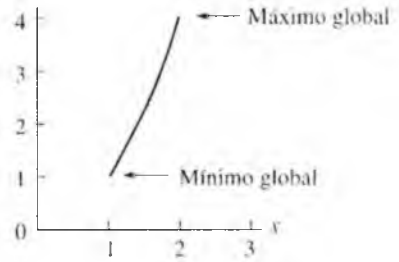


Figura B.5 Extremo de $f(x) = x^2$ restringido a $1 \le x \le 2$.

Las funciones no tienen necesariamente extremos locales o globales; esto depende de la función y del dominio en estudio. Por ejemplo $f(x) = x^2$ tiene un mínimo local en $x = 0$, y su mínimo local también es el mínimo global, pero no tiene máximos locales o globales (véase Fig. B.4.). Por otra parte, si observamos la misma función en el dominio $1 \le x \le 2$ entonces f tiene un mínimo global en $x = 1$ y un máximo global en $x = 2$ (véase Fig. B.5).

Para encontrar los puntos críticos, resolvemos la ecuación

$$f' = 0 \qquad (\text{o } f' \text{ no definida}).$$

Para determinar si un punto crítico es un máximo local, mínimo local, o ninguno de los dos, utilizamos la prueba de la segunda derivada:

- Si $f'(p) = 0$ y $f''(p) < 0$, entonces f tiene un máximo local en p.
- Si $f'(p) = 0$ y $f''(p) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en p.

C DETERMINANTES

Presentamos el determinante de una matriz o arreglo de números. Cada arreglo de números de 2×2 tiene otro número asociado, llamado determinante, que está dado por

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = 2\,(-6) - 5(-4) = 8.$$

Cada arreglo de números de 3×3 también tiene un número asociado, que se llama también determinante, y está definido en términos de determinantes de 2×2 así:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Observe que el determinante del arreglo de 2×2 multiplicado por a_i es el determinante del arreglo encontrado al eliminar el renglón y columna que contenga a_i. Igualmente, observe el signo negativo del segundo término. Un ejemplo está dado por

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 2\,(15 + 0) - 1\,(0 - (-4)) + (-3)\,(0 - 12) = 62.$$

Suponga que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen componentes $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ y $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$. Recuerde que el producto cruz $\vec{a} \times \vec{b}$ está dado por la expresión

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}.$$

Observe que si desarrollamos el siguiente determinante, obtenemos el producto cruz:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i}\,(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \vec{j}\,(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \vec{k}\,(a_1 b_2 - a_2 b_1) = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Los determinantes son una forma útil de calcular el producto cruz.

D REPASO DE INTEGRACIÓN DE UNA VARIABLE

Definición de la integral de una variable

La integral de una variable

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se define como el límite de *sumas de Riemann*, que pueden efectuarse de la siguiente manera: dividimos el intervalo $a \le x \le b$ en n subdivisiones iguales, cada una de ancho Δx. Entonces, $\Delta x = (b - a)/n$.

Suponga que $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los puntos finales de las subdivisiones, como en las figuras D.6 y D.7. Hacemos dos sumas especiales de Riemann:

$$\text{Suma por la izquierda} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x$$

y

$$\text{Suma por la derecha} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x.$$

Para definir la integral definida, tomamos el límite de esas sumas conforme n se va al infinito.

La **integral definida** de f de a a b, escrita

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

es el límite de las sumas por la izquierda o por la derecha con n subdivisiones, a medida que n se hace arbitrariamente grande. En otras palabras,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} (\text{suma por la izquierda}) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x\right)$$

y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} (\text{suma por la derecha}) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right)$$

Cada una de estas sumas se llama *suma de Riemann*, f se llama *integrando* y a y b se llaman *límites de integración.*

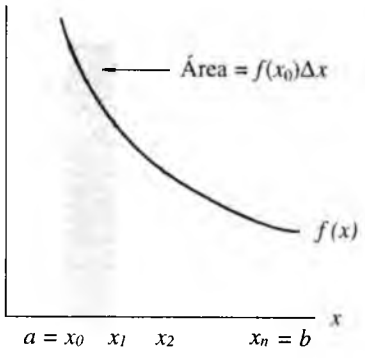


Figura D.6 Suma por la izquierda.

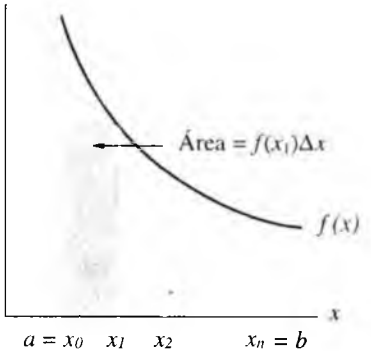


Figura D.7 Suma por la derecha.

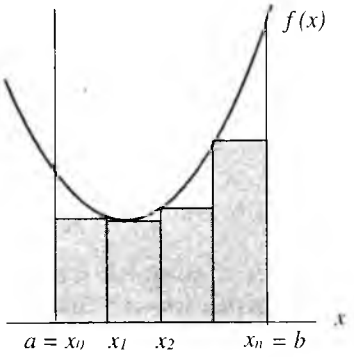


Figura D.8 Una suma inferior.

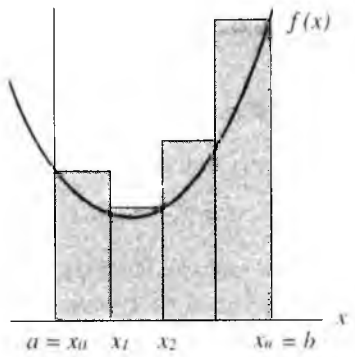


Figura D.9 Una suma superior.

Se obtienen otras sumas de Riemann si se evalúa la función en otros puntos en cada subintervalo, no sólo los extremos de la izquierda y la derecha. Gráficamente, esto significa que la gráfica de la función puede cortar la parte superior de cada rectángulo en cualquier punto, no sólo en los extremos. La figura D.8 muestra los rectángulos que están enteramente bajo la curva, resultando un cálculo defectivo para la integral que se llama *suma inferior.* La figura D.9 muestra una *suma superior* para la misma integral.

Interpretaciones de la integral definida

Como área

Si $f(x)$ es positiva puede interpretarse cada término $f(x_0)\Delta x$, $f(x_1)\Delta x$, ... en una suma de Riemann por la izquierda o la derecha como el área de un rectángulo. Conforme el ancho de Δx se aproxima a cero, los rectángulos se ajustan más exactamente a la curva de la gráfica, y la suma de sus áreas se acerca cada vez más al área bajo la curva, sombreada en la figura D.10. Entonces, se llega a la conclusión de que

Si $f(x) \geq 0$ y $a < b$:

$$\text{Área bajo la gráfica de } f \text{ entre } a \text{ y } b = \int_a^b f(x)dx.$$

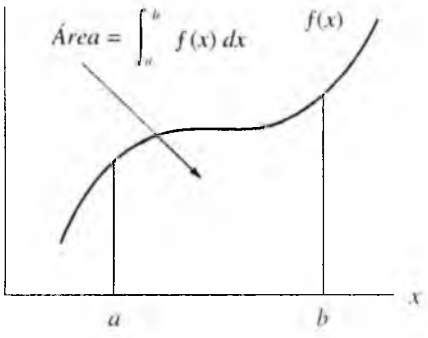


Figura D.10 La integral definida $\int_a^b f(x)dx$.

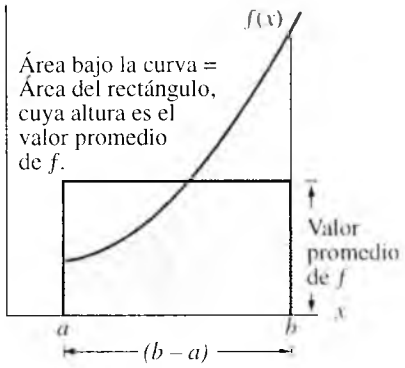


Figura D.11 Área y valor promedio.

Como valor promedio

La integral definida puede emplearse para calcular el valor promedio de una función:

$$\text{Valor promedio de } f \text{ entre } a \text{ y } b = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Si $f(x) \geq 0$, puede considerarse el valor promedio de f como la altura del rectángulo con base $(b-a)$, y área igual al área bajo la gráfica de f para $a \leq x \leq b$ (véase Fig. D.11.)

Cuando $f(x)$ representa una densidad

Si $f(x)$ representa una densidad, por ejemplo la densidad poblacional o la densidad de una sustancia, entonces puede calcularse la masa total o población total mediante una integral definida. Dividimos la región en pequeñas secciones y encontramos la población o masa de cada una al multiplicar la densidad por el tamaño de esa sección. Si tomamos un límite, obtenemos

Si $f(x)$ representa la densidad de una sustancia a lo largo del intervalo $a \leq x \leq b$, la

$$\text{Masa total} = \int_a^b f(x)dx.$$

El teorema fundamental del cálculo

Suponga que $f = F'$. Como $F'(t)$ es la rapidez de cambio de $F(t)$ con respecto a t, y como la integral definida de una rapidez de cambio de alguna cantidad es el cambio total en esa cantidad, encontramos que

$$\int_a^b F'(t)dt = \int_a^b (\text{Rapidez de cambio de } F(t))dt = \text{Cambio en } F(t) \text{ entre } a \text{ y } b = F(b) - F(a).$$

Entonces tenemos

Teorema fundamental del cálculo

Si $f = F'$, entonces

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

El teorema fundamental puede emplearse para evaluar integrales definidas cuando puede encontrarse una antiderivada, o integral indefinida, para el integrando. El apéndice E contiene un breve tabla de integrales indefinidas.

Problemas para la sección D

En los problemas del 1 al 20, encuentre una antiderivada para cada una de las funciones dadas.

1. $\int (x^2 + 2x + \frac{1}{x})dx$
2. $\int \frac{t+1}{t^2}\,dt$
3. $\int \frac{(t+2)^2}{t^3}\,dt$
4. $\int \operatorname{sen} t\,dt$
5. $\int \cos 2t\,dt$
6. $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$
7. $\int \tan\theta\,d\theta$
8. $\int e^{5z}\,dz$
9. $\int te^{t^2+1}\,dt$
10. $\int \frac{dz}{1+z^2}$
11. $\int \frac{dz}{1+4z^2}$
12. $\int \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta$
13. $\int \operatorname{sen} 5\theta\cos^3 5\theta\,d\theta$
14. $\int \operatorname{sen}^3 z\cos^3 z\,dz$
15. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$
16. $\int \cos\theta\sqrt{1+\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$
17. $\int xe^x\,dx$
18. $\int t^3 e^t\,dt$
19. $\int x\ln x\,dx$
20. $\int \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

En los problemas del 21 al 25, encuentre la integral definida por dos métodos (teorema fundamental y numéricamente).

21. $\int_1^3 x(x^2+1)^{70}\,dx$
22. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$
23. $\int_0^{10} ze^{-z}\,dz$
24. $\int_{-\pi/3}^{\pi/4} \operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\,d\theta$
25. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

26. La gráfica *dy/dt* contra *t* es la de la figura D.12. Suponga que el área de cada una de las tres regiones sombreadas es 2. Dado que $y = 0$ cuando $t = 0$, dibuje la gráfica de *y* contra *t*, indicando todas las características especiales que la gráfica pudiera tener (alturas, máximos y mínimos, puntos de inflexión, etc.). Ponga especial atención a la relación entre las gráficas. Anote $t_1, t_2, \ldots, t_5$ en el eje *t*.[1]

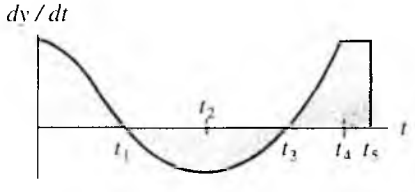


Figura D.12

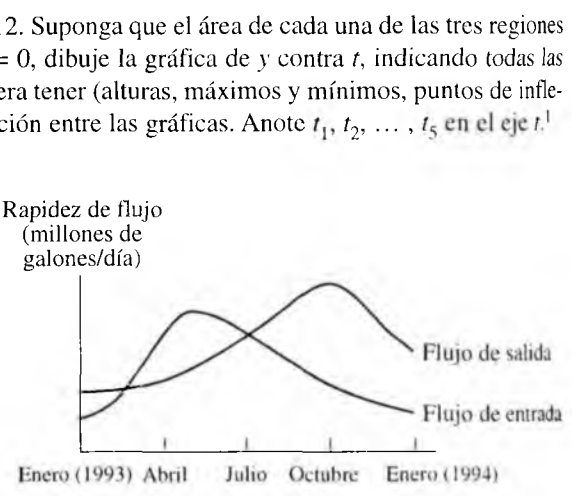


Figura D.13

[1] De *Calculus: The Analysis of Functions*, por Peter D. Taylor, Wall & Emerson, Inc.,Toronto, 1992.

27. La presa Quabbin, ubicada en la parte occidental de Massachusetts, suministra la mayor parte del agua para la ciudad de Boston. La gráfica de la figura D.13 representa la entrada y salida de agua de esta presa durante 1993.
    a) Dibuje una posible gráfica de la cantidad de agua de la presa como función del tiempo.
    b) ¿Cuándo, durante 1993, era máxima la cantidad de agua de la presa? ¿y mínima? Señale estos puntos en la gráfica que dibujó en el inciso a.
    c) ¿Cuándo disminuía con mayor rapidez la cantidad de agua? Señale este tiempo en la figura D.13 y en la gráfica que dibujó en el inciso a.
    d) Para julio de 1994, la cantidad de agua de la presa era casi la misma que en enero de 1993. Dibuje gráficas razonables para determinar el flujo de entrada y de salida de la presa para la primera mitad de 1994. Explique su gráfica
28. La rapidez con la que se consume el petróleo en el mundo aumenta continuamente. Suponga que esta rapidez (en miles de millones de barriles por año) está dada por la función $r = f(t)$, donde t se mide en años y $t = 0$ es el inicio de 1990.
    a) Escriba una integral definida que represente la cantidad total de petróleo consumido entre el inicio de 1990 y el de 1995.
    b) Suponga que $r = 32e^{0.05t}$. Mediante una suma por la izquierda con cinco subdivisiones, halle un valor aproximado de la cantidad total de petróleo consumido entre el inicio de 1990 y el de 1995.
    c) Interprete cada uno de los términos de la suma del inciso b en términos del consumo de petróleo.
29. Una barra mide 2 metros de longitud. A una distancia de x metros de su extremo izquierdo, la densidad de la barra está dada por
$$\rho(x) = 2 + 6x \text{ g/m}.$$
    a) Escriba una suma de Riemann que aproxime la masa total de la barra.
    b) Encuentre la masa exacta por conversión de la suma en una integral.
30. La densidad de automóviles (en automóviles por milla) en un tramo de 20 millas de la autopista de Pennsylvania puede aproximarse por
$$\rho(x) = 300\,(2 + \operatorname{sen}(4\sqrt{x + 0.15})).$$
donde x es la distancia en millas desde la caseta de cobro de Breezewood.
    a) Dibuje una gráfica de esta función para $0 \le x \le 20$.
    b) Escriba una suma que aproxime el número total de automóviles en este tramo de 20 millas.
    c) Encuentre el número total de automóviles en el tramo de 20 millas.
31. Circle City, una metrópoli típica, está densamente poblada cerca de su centro, y su población se reduce gradualmente hacia los límites de la ciudad. De hecho, su densidad de población es $10\,000(3 - r)$ habitantes/(milla cuadrada) a una distancia de r millas del centro.
    a) Si se supone que la densidad de población en los límites de la ciudad es cero, encuentre el radio de la ciudad.
    b) ¿Cuál es la población total de la ciudad?
32. La densidad del petróleo de un derrame circular en la superficie del océano, a una distancia de r metros del centro de la mancha, está dada por $\rho(r) = 50/(1 + r)$ kg/m^2.
    a) Si la capa se extiende de $r = 0$ a $r = 10\,000$ m, encuentre una suma de Riemann que aproxime la masa total de petróleo de la capa.
    b) Encuentre el valor exacto de la masa del petróleo de la mancha por conversión de la suma en una integral.
    c) ¿A qué distancia r está contenida la mitad del petróleo de la mancha?

33. Un modelo exponencial para encontrar la densidad de la atmósfera de la Tierra indica que la si la temperatura de la atmósfera fuera constante, entonces la densidad de la atmósfera como función de la altura, h (en metros), sobre la superficie del planeta estaría dada por

$$\rho(h) = 1.28e^{-0.000124h}\text{kg/m}^3.$$

a) Escriba (pero no evalúe) una suma que aproxime la masa de la porción de la atmósfera de $h = 0$ a $h = 100$ m (es decir, los primeros 100 metros sobre el nivel del mar). Suponga que el radio de la Tierra es de 6370 km.
b) Encuentre la respuesta exacta convirtiendo la suma del inciso a en una integral.

34. Circula agua en un tubo cilíndrico de 1 pulgada de radio. Debido a que el agua es viscosa y se adhiere al tubo, el caudal medio varía con la distancia desde el centro. La velocidad del agua a una distancia de r pulgadas del centro es $10(1 - r^2)$ pulgadas por segundo. ¿Cuál es la velocidad (en pulgadas cúbicas por segundo) a la que el agua circula por el tubo?

35. El reflector que hay tras el faro de un automóvil está hecho en forma de la parábola $x = (4/9)y^2$, con una sección circular, como se muestra en la figura D.14.
a) Encuentre una suma de Riemann que aproxime el volumen contenido por este faro.
b) Encuentre exactamente el volumen.

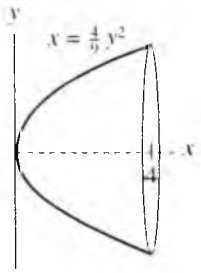


Figura D.14

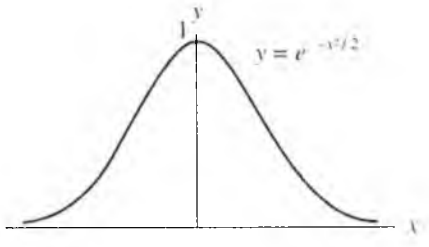


Figura D.15

36. Gire la curva en forma de campana $y = e^{-x^2/2}$ de la figura D.15 alrededor del eje y, de manera que forme un sólido de revolución en forma de montaña. Por rebanadas horizontales, encuentre el volumen de esta montaña.

37. La circunferencia del tronco de cierto árbol a diferentes alturas sobre el suelo está dada en la tabla siguiente.

Altura (pies)	0	20	40	60	80	100	120
Circunferencia (pies)	26	22	19	14	6	3	1

Suponga que todas las secciones transversales horizontales del tronco son círculos. Estime el volumen del tronco del árbol usando la regla del trapezoide.

38. La mayoría de los estados esperan que pronto se agote el espacio para tiraderos de basura. En Nueva York, los desechos sólidos se compactan en pilas en forma de pirámide con base cuadrada (la más grande de estas pilas está en Staten Island). Una pequeña comunidad tiene una pila cuya longitud de base es de 100 yardas. A una yarda de altura sobre la base, la longitud del lado paralelo a la base es de 99 yardas; la pila puede formarse hasta una altura vertical de 20 yardas (la parte superior de la pirámide nunca se alcanza). Si diariamente llegan 65 yardas cúbicas de basura a la pila, ¿cuánto tiempo pasará para que ésta se complete?

E TABLA DE INTEGRALES

Breve tabla de integrales indefinidas

I. Funciones básicas

1. $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
3. $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$
4. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C, \quad x > 0$
5. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
7. $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

II. Productos de e^x, cos x y sen x

$$\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}[a\operatorname{sen}(bx) - b\cos(bx)] + C$$

9. $\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}[a\cos(bx) + \operatorname{sen}(bx)] + C$
10. $\int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)\,dx = \frac{1}{b^2-a^2}[a\cos(ax)\operatorname{sen}(bx) - b\operatorname{sen}(ax)\cos(bx)] + C, \quad a \neq b$
11. $\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{1}{b^2-a^2}[b\cos(ax)\operatorname{sen}(bx) - a\operatorname{sen}(ax)\cos(bx)] + C, \quad a \neq b$
12. $\int \operatorname{sen}(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{1}{b^2-a^2}[b\operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx) + a\cos(ax)\cos(bx)] + C, \quad a \neq b$

III. Producto del polinomio $p(x)$ con ln x, e^x, cos x, sen x

13. $\int x^n \ln x\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1, \quad x > 0$
14. $\int p(x)e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}p(x)e^{ax} - \frac{1}{a}\int p'(x)\,e^{ax}\,dx$

$$= \frac{1}{a}p(x)e^{ax} - \frac{1}{a^2}p'(x)e^{ax} + \frac{1}{a^3}p''(x)e^{ax} - \cdots$$

$(+ - + - \ldots)$ (los signos se alternan)

15. $\int p(x)\operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}p(x)\cos ax + \frac{1}{a}\int p'(x)\cos ax\,dx$

$$= -\frac{1}{a}p(x)\cos ax + \frac{1}{a^2}p'(x)\operatorname{sen} ax + \frac{1}{a^3}p''(x)\cos ax - \cdots$$

$(- + + - - + + \ldots)$ (los signos se alternan en pares después del primer término)

16. $\int p(x)\cos ax\,dx = \frac{1}{a}p(x)\operatorname{sen} ax - \frac{1}{a}\int p'(x)\operatorname{sen} ax\,dx$

$$= \frac{1}{a}p(x)\,sen\,ax + \frac{1}{a^2}p'(x)\,cos\,ax - \frac{1}{a^3}p''(x)\operatorname{sen} ax - \cdots$$

$(+ + - - + + - - \ldots)$ (los signos se alternan en pares)

IV. Potencias enteras de sen x y cos x

17. $\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx, \quad n$ positiva

18. $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx, \quad n$ positiva

19. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^m x}\,dx = \frac{-1}{m-1}\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{1}{\operatorname{sen}^{m-2} x}\,dx, \quad m \neq 1, \quad m$ positiva

20. $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\cos x)-1}{(\cos x)+1}\right| + C$

21. $\int \frac{1}{\cos^m x}\,dx = \frac{1}{m-1}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{1}{\cos^{m-2} x}\,dx, \; m \neq 1, \quad m$ positiva

22. $\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\operatorname{sen} x)+1}{(\operatorname{sen} x)-1}\right| + C$

23. $\int \operatorname{sen}^m x\cos^n x\,dx$: Si m es non, sea $w = \cos x$. Si n es non, sea $w = \operatorname{sen} x$. Si m y n son pares y positivos, convierta todo a sen x o todo en cos x (usando $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$), y utilice IV-17 o IV-18. Si m y n son pares y una de ellas es negativa, convierta a la función que aparezca en el denominador y utilice IV-19 o IV-21. El caso en el que m y n son pares y negativas se omite.

V. Cuadrático en el denominador

24. $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \; a \neq 0$

25. $\int \frac{bx+c}{x^2+a^2}\,dx = \frac{b}{2}\ln|x^2+a^2| + \frac{c}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \quad a \neq b$

26. $\int \frac{1}{(x+a)(x-b)}\,dx = \frac{1}{a-b}(\ln|x-a| - \ln|x-b|) + C, \quad a \neq b$

27. $\int \frac{cx+d}{(x+a)(x-b)}\,dx = \frac{1}{a-b}\left[(ac+d)\ln|x-a| - (bc+d)\ln|x-b|\right] + C, \quad a \neq b,$

VI. Integrandos con $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $a > 0$

28. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C$

29. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C,$

30. $\int \sqrt{a^2 \pm x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 \pm x^2} + a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}\,dx\right) + C$

31. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx\right) + C$

F REPASO DE FUNCIONES DE DENSIDAD Y PROBABILIDAD

Comprender la distribución de varias cantidades en la población puede ser importante para quienes toman decisiones. Por ejemplo, la distribución del ingreso proporciona información útil acerca de la estructura económica de una sociedad. En esta sección veremos la distribución de edades en Estados Unidos. A fin de asignar fondos para la educación, salud pública y seguridad social, el gobierno necesita saber cuántas personas hay en cada grupo de edad. Veremos cómo se representa esta información mediante una función de densidad.

Distribución de edades en Estados Unidos

ares y pos-
17 o IV-18.
nominador

TABLA F.1 *Distribución de edades en Estados Unidos en 1990.*

Grupo de edad	Porcentaje de población total
0-20	30%
20-40	31%
40-60	24%
60-80	14%
Más de 80	1%

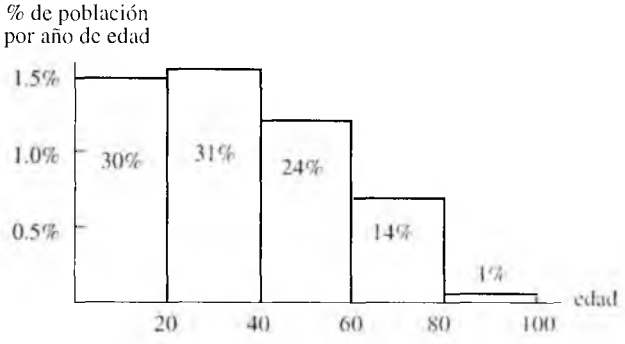


Figura F.16 Cómo se distribuyeron las edades en Estados Unidos en 1990.

Suponga que tenemos la información de la tabla F.1, que muestra cómo estaban distribuidas en 1990 las edades de la población de Estados Unidos. Para representar gráficamente esta información utilizamos un *histograma,* colocando una barra vertical sobre cada grupo de edad, de manera que el *área* de cada barra representa el porcentaje de ese grupo de edad. El área total de todos los rectángulos es 100% = 1. Supongamos que no hay personas de más de 100 años, así que el último grupo de edades es de 80 a 100. Para el grupo de 0 a 20, la base del rectángulo es 20 y deseamos que el área sea 30%, así que la altura debe ser 30%/20 = 1.5%. Observe que el eje vertical se mide en porcentaje/año (véase Fig. F.16.)

Ejemplo 1 En 1990, ¿qué porcentaje de la población de Estados Unidos tenía
a) entre 20 y 60 años?
b) menos de 10 años?
c) entre 75 y 80 o entre 80 y 85 años?

Solución
a) Sumamos los porcentajes, así que 31% + 24% = 55%.
b) Para encontrar el porcentaje con menos de 10 años podríamos suponer, por ejemplo, que la población estaba distribuida de manera uniforme en el grupo de 0 a 20. (Esto significa que suponemos que nacieron niños a una tasa más bien constante en los últimos 20 años, lo que es probablemente razonable.) Si hacemos esta suposición, entonces podemos decir que la población menor de 10 años era casi la mitad de la del grupo de 0 a 20, es decir, 15%. Observe que se obtiene el mismo resultado si calculamos el área del rectángulo de 0 a 10 (véase Fig. F.17.)
c) Para encontrar la población entre 75 y 80 años, como 14% de estadounidenses en 1990 estaba en el grupo de 60 a 80, podría aplicarse el mismo razonamiento y decir que 1/4(14%) = 3.5% de la

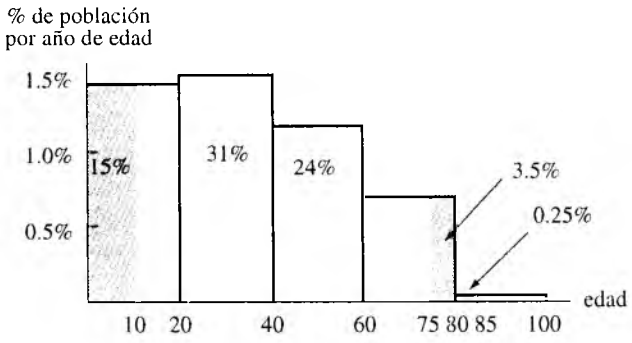


Figura F.17 Edades en Estados Unidos en 1990 varios subgrupos (para el ejemplo 1).

población estaba en este grupo de edad. Este resultado está representado como un área en la figura F.17. La suposición de que la población estaba distribuida de manera uniforme no vale para este caso; ciertamente había más personas entre 60 y 65 años que entre 75 y 80. Por lo tanto, la estimación de 3.5% seguramente es demasiado alta.

Si usáramos otra vez la suposición (falsa) de que las edades de cada grupo estaban distribuidas de manera uniforme, encontraríamos que el porcentaje entre 80 y 85 era 1/4(1%) = 0.25% (véase Fig. F.17.) Esta estimación también es incorrecta, porque había sin duda más personas en el grupo de 80 a 85 que, por ejemplo en el grupo de 95 a 100, y por eso la estimación de 0.25% sería demasiado baja. Además, aun cuando el porcentaje entre 80 y 85 fuera en verdad menor que el de 75 a 80 años, la diferencia entre 0.25% y 3.5% (un factor de 14) es desproporcionada. Cabe esperar que la transición de un grupo de edad al siguiente sea más uniforme y más gradual.

Corrección del histograma

Podrían obtenerse mejores estimaciones si hubiera grupos de edad más pequeños (cada grupo de la figura F.16 es de 20 años, que es muy grande) o si el histograma fuera más liso. Suponga que tenemos los datos más detallados de la tabla F.2, que llevan al nuevo histograma de la figura F.18.

A medida que obtengamos información más detallada, la silueta superior del histograma se hace más lisa, pero el área de cualquiera de las barras todavía representa el porcentaje de la población de ese grupo de edades. Imagine, en el límite, sustituir la silueta superior del histograma por una curva suave de manera tal que el área bajo la curva sobre un grupo de edades es la misma que el área del rectángulo correspondiente. El área total bajo toda la curva es otra vez 100% = 1 (véase Fig. F.18.)

La función de densidad de edades

Si t es la edad en años, se define $p(t)$, la *función de densidad* de edades, como una función que "alisa" el histograma de edades. Esta función tiene la propiedad de que

$$\begin{array}{c}\text{Fracción de población}\\ \text{entre edades } a \text{ y } b\end{array} = \begin{array}{c}\text{Área bajo}\\ \text{la gráfica de } p\\ \text{entre } a \text{ y } b\end{array} = \int_a^b p(t)dt.$$

Si a y b son las edades mínima y máxima posibles (por ejemplo $a = 0$ y $b = 100$), de modo que las edades de toda la población se encuentren entre a y b, entonces

$$\int_a^b p(t)dt = \int_0^{100} p(t)dt = 1.$$

TABLA F.2 *Edades en Estados Unidos en 1990 (más detalladas)*

Grupo de edad	Porcentaje de población total
0-10	15%
10-20	15%
20-30	16%
30-40	15%
40-50	13%
50-60	11%
60-70	9%
70-80	5%
80-90	1%

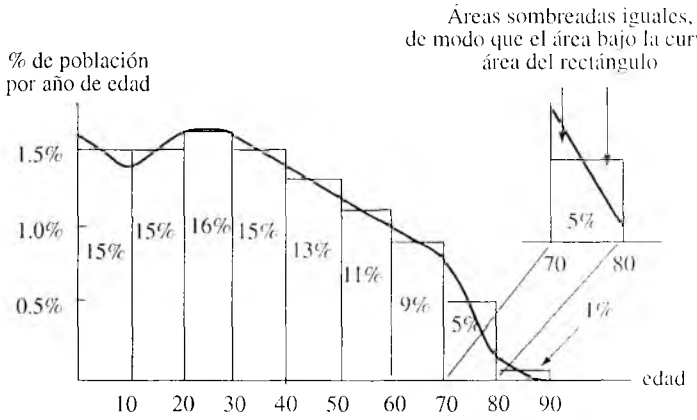


Figura F.18 Alisamiento del histograma de edades.

¿Qué indica la función de densidad *p* de edades? Observe que no hemos hablado acerca del significado de $p(t)$ en sí, sino *sólo* de la integral $\int_a^b p(t)dt$. Veamos esto con un poco de más detalle. Supongamos, por ejemplo, que $p(10) = 0.015 = 1.5\%$ por año. Esto *no* indica que 1.5% de la población tiene precisamente 10 años de edad (donde 10 años quiere decir exactamente 10, no 10 1/2, no 10 1/4, ni 10.1), pero $p(10) = 0.015$ indica que para algún pequeño intervalo Δt alrededor de 10, la fracción de la población con edades en este intervalo es aproximadamente $p(10)\ \Delta t = 0.015\ \Delta t$. Observe también que las unidades de $p(t)$ son *% por año,* así que $p(t)$ debe multiplicarse por años para obtener un porcentaje de la población.

La función de densidad

Para generalizar la idea de la distribución de edades, veamos una función de densidad general. Supongamos que nos interesa la forma en que cierta característica, x, está distribuida en una población. Por ejemplo, x podría ser la estatura, edad, o potencia en watts, y la población podrían ser personas, o cualquier conjunto de objetos como por ejemplo bombillas eléctricas. Entonces definimos una función de densidad general con las siguientes propiedades:

La función, $p(x)$, es una **función de densidad** si

$$\begin{array}{ccccc} \text{Fracción de población para la que } x \text{ está entre } a \text{ y } b & = & \text{Área bajo la gráfica de } p \text{ entre } a \text{ y } b & = & \displaystyle\int_a^b p(x)dx. \end{array}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \quad \text{y} \quad p(x) \geq 0 \text{ para toda } x.$$

La función de densidad debe ser no negativa si su integral siempre da una fracción de la población. También, la fracción de la población con x entre $-\infty$ e ∞ es 1, porque toda la población tiene la característica x entre $-\infty$ y ∞. La función $p(t)$ empleada para alisar el histograma de edades satisface esta definición de una función de densidad. No asignamos un significado al valor de $p(x)$ solo, sino que más bien interpretamos $p(x)\ \Delta x$ como la fracción de la población con la característica en un corto intervalo de longitud Δx alrededor de x.

Ejemplo 2 La gráfica de la figura F.19 muestra la distribución del número de años de educación completados por adultos en una población. ¿Qué indica la gráfica?

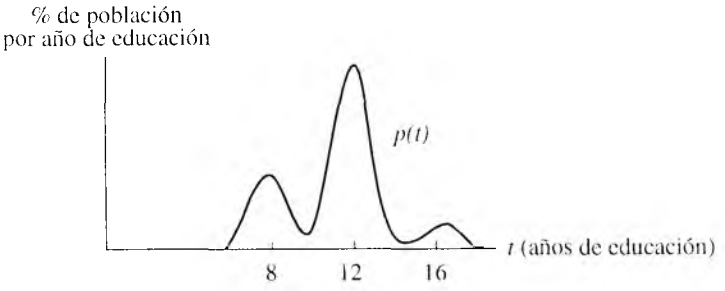


Figura F.19 Distribución de años de educación.

Solución El hecho que la mayor parte del área bajo la gráfica de la función de densidad está concentrada en dos jorobas, centradas en 8 y 12 años, indica que la mayoría de la población pertenece a uno de dos grupos, los que egresan de la escuela después de terminar aproximadamente 8 años, y los que terminan 12 años. Hay un grupo más pequeño de personas que terminan alrededor de 16 años de estudios.

Con frecuencia, la función de densidad se aproxima mediante fórmulas, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 Encontrar fórmulas razonables que representen la función de densidad para la distribución de edades en Estados Unidos, suponiendo que la función es constante en 1.5% hasta la edad de 40 y luego cae linealmente.

Solución Necesitamos construir una función lineal con pendiente descendente desde la edad de 40, de manera tal que $p(40) = 1.5\%$ por año $= 0.015$ y que $\int_0^{100} p(t)dt = 1$. Suponga que b es como en la figura F.20. Puesto que

$$\int_0^{100} p(t)dt = \int_0^{40} p(t)dt + \int_{40}^{100} p(t)dt = 40\,(0.015) + \frac{1}{2}(0.015)b = 1,$$

tenemos

$$\frac{0.015}{2}\,b = 0.4, \qquad \text{dando} \qquad b \approx 53.3.$$

Entonces la pendiente de la recta es $-0.015/53.3 \approx -0.00028$, así que para $40 \le t \le 40 + 53.3 = 93.3$,

$$p(t) - 0.015 = -0.00028(t - 40),$$
$$p(t) = 0.0262 - 0.00028t.$$

Según esta forma de suavizar los datos, no hay nadie mayor de 93.3 años.

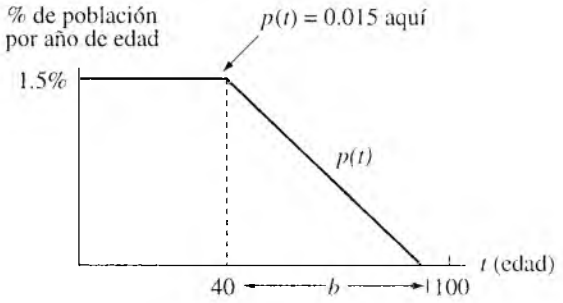


Figura F.20 Función de densidad por edades.

Probabilidad

Suponga que escogemos al azar una persona de entre la población de Estados Unidos, y nos preguntamos cuál es la probabilidad de que la persona tenga entre 60 y 65 años de edad, por ejemplo. La probabilidad, o posibilidad, de que la persona se encuentre en cierto grupo de edades es igual a la fracción de la población de ese grupo de edades. Considere la función de densidad $p(t)$ definida en la página 496 para describir la distribución de edades en Estados Unidos. Podemos emplear la función de densidad para calcular probabilidades como sigue:

$$\text{Probabilidad de que una persona tenga edad entre } a \text{ y } b \;=\; \text{Fracción de la población con edad entre } a \text{ y } b \;=\; \int_a^b p(t)dt.$$

La mediana y la media

Con frecuencia es útil dar un valor "promedio" para una distribución. Dos medidas de uso común son la *mediana* y la *media*.

La mediana

Una **mediana** es un valor T tal que la mitad de la población tiene valores de x menores que (o igual a) T, y la mitad restante, valores de x mayores que (o iguales a) T. Entonces, una mediana T satisface

$$\int_{-\infty}^{T} p(x)dx = 0.5,$$

donde p es la función de densidad. En otras palabras, la mitad del área bajo la gráfica de p está a la izquierda de T.

Ejemplo 4 Encontrar la edad mediana en Estados Unidos en 1990, usando la función de densidad de edad dada por

$$p(t) = \begin{cases} 0.015 & \text{para } 0 \le t \le 40 \\ 0.0262 - 0.00028t & \text{para } 40 \le t \le 93.3. \end{cases}$$

Solución Deseamos encontrar el valor de T tal que

$$\int_{-\infty}^{T} p(t)dt = \int_{0}^{T} p(t)dt = 0.5.$$

Como $p(t) = 1.5\%$ hasta la edad de 40, tenemos

$$\text{Mediana} = T = \frac{50\%}{1.5\%} \approx 33 \text{ años.}$$

(Véase Fig. F.21).

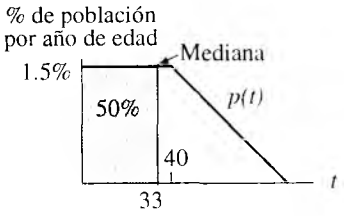


Figura F.21 Mediana de la distribución de edades.

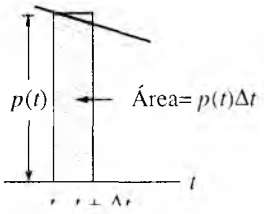


Figura F.22 El área sombreada es el porcentaje de población con edad entre t y $t + \Delta t$

La media

Otro valor promedio que se emplea comúnmente es la *media*. Para encontrar la media de N números se suman los números y se divide la suma entre N. Por ejemplo, la media de los números 1, 2, 7 y 10 es $(1 + 2 + 7 + 10)/4 = 5$. La edad media de toda la población en Estados Unidos está, por lo tanto, definida como

$$\frac{\sum \text{edades de todas las personas en Estados Unidos}}{\text{Número total de personas en Estados Unidos}}$$

Calcular directamente la suma de todas las edades sería una tarea abrumadora; se aproximará la suma mediante una integral. La idea es "cortar en rebanadas" el eje de la edad y considerar las personas cuya edad esté entre t y $t + \Delta t$. ¿Cuántas son?

El porcentaje de la población entre t y $t + \Delta t$ es el área bajo la gráfica de p entre estos puntos, que se aproxima bien por el área del rectángulo, $p(t)\Delta t$ (véase Fig. F.22.)
Si el número total de personas de la población es N, entonces

$$\text{Número de personas con edad entre } t \text{ y } t + \Delta t \approx p(t)\Delta t N.$$

La edad de todas estas personas es aproximadamente t:

$$\text{Suma de edades de personas entre la edad de } t \text{ y } t + \Delta T \approx tp(t)\Delta t N.$$

Por lo tanto, al sumar y factorizar N resulta

$$\text{Suma de las edades de todas las personas} \approx \left(\sum tp(t)\Delta t\right) N.$$

En el límite, a medida que Δt se reduce a 0, la suma se convierte en una integral, así que como aproximación,

$$\text{Suma de las edades de todas las personas} = \left(\int_0^{100} tp(t)dt\right) N.$$

Por lo tanto, con N igual al número total de personas en Estados Unidos y suponiendo que ninguna persona tenga más de 100 años,

$$\text{Media de edad} = \frac{\text{Suma de edades de todas las personas en Estados Unidos}}{N} = \int_0^{100} tp(t)dt.$$

Puede presentarse el mismo argumento para cualquier función de densidad $p(x)$[2].

> Si una cantidad tiene función de densidad $p(x)$,
>
> **Valor medio** de la cantidad $= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$

Se puede demostrar que la media es el punto del eje horizontal donde la región bajo la gráfica de la función de densidad, si estuviera hecha de cartón, quedaría en equilibrio.

Ejemplo 5 Encontrar la edad media de la población en Estados Unidos; use la función de densidad del ejemplo 4.

Solución Las fórmulas aproximadas para p son

$$p(t) = \begin{cases} 0.015 & \text{para } 0 \le t \le 40 \\ 0.0262 - 0.00028t & \text{para } 40 < t \le 93.3. \end{cases}$$

Mediante estas fórmulas calculamos

$$\text{Edad media} = \int_0^{100} tp(t)\,dt = \int_0^{40} t(0.015)\,dt + \int_{40}^{93.3} t(0.0262 - 0.00028t)\,dt$$

$$= 0.015\frac{t^2}{2}\Big|_0^{40} + 0.0262\frac{t^2}{2}\Big|_{40}^{93.3} - 0.00028\frac{t^3}{2}\Big|_{40}^{93.3} \approx 35 \text{ años.}$$

La media se muestra en la figura F.23:

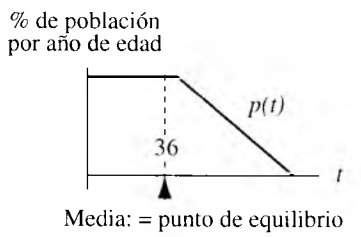


Figura F.23 Media de la distribución por edades.

[2] Siempre y cuando todas las integrales impropias en cuestión converjan.

Distribuciones normales

¿Cuánta lluvia espera que caiga en su ciudad este año? Si una persona vive en Anchorage, Alaska, la respuesta sería algo cercana a las 15 pulgadas (incluyendo la nieve). Por supuesto, no hay que esperar que caigan exactamente 15 pulgadas de nieve; algunos años habrá más de 15 pulgadas, otros menos, pero en casi todos los años la cantidad de lluvia estará cerca de las 15 pulgadas, y sólo por excepción estará muy por encima o por debajo de las 15 pulgadas. ¿Qué aspecto tiene la función de densidad para la lluvia? Para contestar esta pregunta observemos los datos de precipitación pluvial acumulados a lo largo de muchos años. Esta información describe una curva en forma de campana, con un pico o máximo en 15 pulgadas, y pendientes hacia abajo aproximadamente simétricas a cada lado. Éste es un ejemplo de una distribución normal.

Las distribuciones normales se emplean con frecuencia para hacer modelos de fenómenos reales, desde calificaciones en un examen hasta el número de pasajeros de una aerolínea en determinado vuelo. Una distribución normal se caracteriza por su *media,* μ, y su *desviación estándar,* σ. La media indica dónde están concentrados los datos: la ubicación del pico central. La desviación estándar indica qué tan apretadamente están concentrados los datos alrededor de la media. Un valor pequeño de σ nos dice que los datos están cerca de la media; una σ grande, que están muy dispersos. La fórmula para una distribución normal es como sigue.

Una **distribución normal** tiene una función de densidad de la forma

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)},$$

donde μ es la media de la distribución y σ es la desviación estándar, con $\sigma > 0$.

El factor de $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ frente a la función está ahí para hacer que el área bajo su gráfica sea igual a 1.

Que el factor $\sqrt{2\pi}$ aparezca es uno de los descubrimientos realmente notables de las matemáticas.

Para hacer un modelo de la cantidad de lluvia en Anchorage, empleamos una distribución normal con $\mu = 15$. La desviación estándar puede calcularse a partir de los datos; se tomará como 1 (véase Fig. F.24).

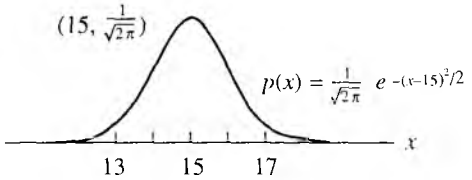


Figura F.24 Distribución normal con $\mu = 15$ y $\sigma = 1$.

En el siguiente ejemplo verificaremos que, para una distribución normal, cierto porcentaje de los datos están siempre dentro de cierto número de desviaciones estándar a partir de la media.

Ejemplo 6 Para la cantidad de lluvia en Anchorage, utilizar la distribución normal con la función de densidad

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-15)^2/2},$$

para calcular la fracción de los años con cantidad de lluvia entre

a) 14 y 16 pulgadas b) 13 y 17 pulgadas c) 12 y 18 pulgadas.

Solución

Problemas

Solución a) La fracción de los años con precipitación anual entre 14 y 16 pulgadas es $\int_{14}^{16} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-15)^2/2}\,dx$.

Como no hay antiderivada elemental para $e^{-(x-15)^2/2}$, encontramos numéricamente la integral. Su valor es de alrededor de 0.68.

$$\text{Fracción de años con lluvia entre 14 y 16 pulgadas} = \int_{14}^{16} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-15)^2/2}\,dx \approx 0.68.$$

b) Al evaluar otra vez numéricamente la integral, obtenemos

$$\text{Fracción de años con lluvia entre 13 y 17 pulgadas} = \int_{13}^{17} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-15)^2/2}\,dx \approx 0.95.$$

c) En forma análoga,

$$\text{Fracción de años con lluvia entre 12 y 18 pulgadas} = \int_{12}^{18} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-15)^2/2}\,dx \approx 0.997.$$

Como 0.95 está tan cerca de 1, esperamos que siempre la precipitación esté entre 13 y 17 pulgadas por año.

Observe que, en el ejemplo anterior, la desviación estándar es de 1 pulgada, así que la lluvia entre 14 y 16 pulgadas al año está dentro de una desviación estándar de la media. De igual manera, la lluvia entre 13 y 17 pulgadas está dentro de 2 desviaciones estándar de la media, y la lluvia entre 12 y 18 pulgadas está dentro de 3 desviaciones estándar de la media. Las fracciones de las observaciones dentro de una, dos y tres desviaciones estándar de la media calculadas en el ejemplo anterior se cumplen para cualquier distribución normal.

Reglas prácticas para cualquier distribución normal

- Alrededor del 68% de las observaciones están dentro de una desviación estándar de la media.
- Alrededor del 95% de las observaciones están dentro de dos desviaciones estándar de la media.
- Más del 99% de las observaciones están dentro de tres desviaciones estándar de la media.

Problemas para la sección F

En los problemas 1, 2 y 3, dibuje gráficas de una función de densidad que pueda representar la distribución de ingreso en una población con las características dadas.

1. Una clase media numerosa.
2. Clases media y superior pequeñas y muchos pobres.
3. Clase media pequeña, muchos pobres y muchos ricos.
4. Un gran número de personas toman un examen estandarizado y obtienen calificaciones descritas por la función de densidad p graficada en la figura F.25. ¿Implica la función de densidad que la mayoría de las personas obtuvo una calificación cercana a 50? Explique por qué sí o por qué no.

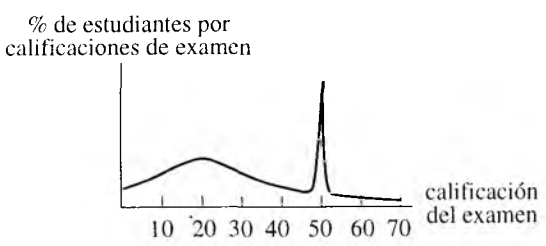


Figura F.25 Función de densidad de calificaciones de examen.

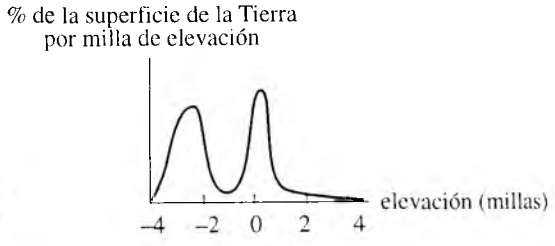


Figura F.26

5. La figura F.26 muestra la distribución de elevación, en millas, en toda la superficie terrestre. Una elevación positiva denota tierra sobre el nivel del mar; una negativa, muestra tierra bajo el mar (es decir, el lecho oceánico).

   a) Describa verbalmente la elevación de la mayor parte de la superficie terrestre.
   b) Aproximadamente, ¿qué fracción de la superficie está bajo el nivel del mar?

6. Considere un péndulo que oscila en un ángulo pequeño. La coordenada x del peso se mueve entre $-a$ y a, como se muestra en la figura F.27.

   a) Dibuje la función de densidad para la ubicación de la coordenada x del peso del péndulo (es decir, desprecie el movimiento hacia arriba y abajo). Para hacer esto, imagine una cámara que toma fotografías del péndulo en instantes al azar. ¿En dónde es más probable que se encuentre el peso? ¿Y menos probable? [Sugerencia: Considere la velocidad del péndulo en puntos diferentes de su trayectoria. ¿Es más probable que la cámara tome una fotografía del peso en un punto de su trayectoria donde se mueva rápidamente, o donde se mueva lentamente?]

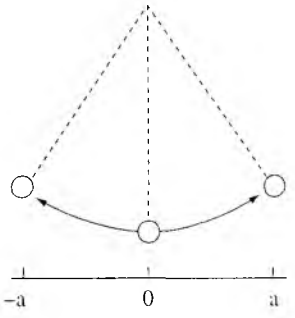


Figura F. 27

   b) Ahora dibuje la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} & -a < x < a; \\ 0 & |x| \geq a. \end{cases}$$

   ¿Cómo se compara esta gráfica con la dibujada en el inciso a?

   c) Si se supone que la función dada en el inciso b es la función de densidad para el péndulo, ¿qué valor esperamos para la siguiente integral?

$$\int_{-a}^{a} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

   Compruebe esto mediante el cálculo de la integral.

   d) ¿Parece razonable, físicamente hablando, que $f(x)$ "estalle" en a y $-a$? Explique su respuesta.

7. Se piensa que las calificaciones de cociente de inteligencia (IQ) están normalmente distribuidas con una media de 100 y desviación estándar de 15.

   a) Escriba una fórmula para encontrar la distribución de densidad de calificaciones de IQ.
   b) Estime la fracción de la población con IQ entre 115 y 120.

8. Demuestre que el área bajo la gráfica de la función de densidad de la distribución normal

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-15)^2/2}$$

   es 1. Esta función no tiene antiderivada elemental, por lo que debe hacerse numéricamente. En la solución debe dejarse en claro cuáles límites de integración se usaron.

9. a) Con calculadora o computadora, dibuje gráficas de la función de densidad de la distribución normal

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

      i) Para μ fija (por ejemplo $\mu = 5$) y σ variable (por ejemplo $\sigma = 1, 2, 3$).
      ii) Para μ variable (por ejemplo $\mu = 4, 5, 6$) y σ fija (por ejemplo $\sigma = 1$)

   b) Explique cómo es que las gráficas confirman que μ es la media de la distribución y que σ muestra qué tan cercanamente está concentrada la información alrededor de la media.

10. Sea v la velocidad, en metros/segundo, de una molécula de oxígeno, y sea $p(v)$ la función de densidad de la distribución de velocidad de moléculas de oxígeno a la temperatura ambiente. Maxwell demostró que

$$p(v) = av^2 e^{-mv^2/(2kT)},$$

    donde $k = 1.4 \times 10^{-23}$ es la constante de Boltzmann, T la temperatura en Kelvins (a temperatura ambiente, $T = 293$), y $m = 5 \times 10^{-26}$ la masa de la molécula de oxígeno en kilogramos.

    a) Encuentre el valor de a.
    b) Estime la velocidad mediana y la media. Encuentre el máximo de $p(v)$.
    c) ¿Cómo cambian sus respuestas del inciso b para la media y el máximo de $p(v)$, a medida que T cambia?

G REPASO DE COORDENADAS POLARES

Las coordenadas polares son otra manera de describir puntos en un plano xy. Las coordenadas x y y pueden considerarse como instrucciones de cómo llegar al punto. Para llegar al punto (1, 2) se avanza 1 unidad horizontalmente y 2 unidades verticalmente. Las coordenadas polares pueden considerarse en la misma forma. Hay una coordenada r, que indica cuánto avanzar a lo largo de la línea que se extiende desde el origen hasta el punto, y una coordenada θ, que es un ángulo, y nos indica el ángulo que hace la línea con el eje positivo de las x (véase Fig. G.28.)

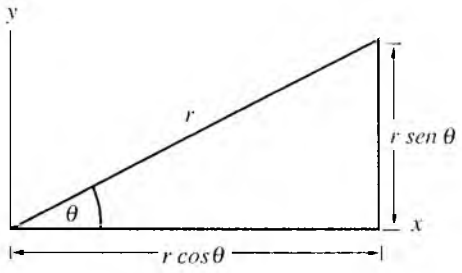


Figura G.28 Coordenadas polares.

Ejemplo 1 Dar las coordenadas polares de los puntos (1, 0), (0, 1), (−1, 0) y (1, 1).

Solución Para llegar al punto (1, 0) avanzamos 1 unidad a lo largo del eje horizontal, de modo que su coordenada r es 1 y su coordenada θ es 0, porque avanzamos a lo largo del eje x.

El punto (0, 1) está también a una unidad del origen, por lo que partimos igual que antes, avanzando 1 unidad a lo largo de la línea. Luego recorremos el círculo de radio 1 en un arco de $\pi/2$ para llegar al punto (0, 1). Por lo tanto, $r = 1$ y $\theta = \pi/2$.

El punto (−1, 0) también tiene coordenada r igual a 1, pero esta vez tenemos que recorrer la mitad del círculo para llegar ahí, de modo que su coordenada θ es π.

El punto (1, 1) está a una distancia de $\sqrt{2}$ del origen, y la recta del origen al punto hace un ángulo de $\pi/4$ con la línea horizontal. Por lo tanto, tiene coordenada r igual a $\sqrt{2}$ y coordenada θ igual a $\pi/4$. Véase la figura G.29.

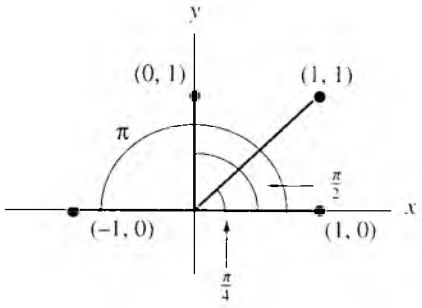


Figura G.29 Cuatro puntos que muestran las coordenadas cartesianas y polares.

Conversión entre coordenada polares y cartesianas

Suponga que un punto tiene coordenadas cartesianas (x, y). Véase la figura G.28. La distancia r al punto desde el origen es la longitud de la hipotenusa, que es $\sqrt{x^2 + y^2}$ por el teorema de Pitágoras. El ángulo θ con la mitad positiva del eje x satisface $\tan \theta = y/x$.

Por otra parte, si tenemos r y θ, entonces por trigonometría podemos ver que $x = r \cos \theta$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$.

Relación entre coordenadas polares y cartesianas

$$x = r \cos \theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \qquad \tan \theta = y/x.$$

Ejemplo 2 Dar las coordenadas cartesianas de los puntos con coordenadas polares $(2, 3\pi/2)$ y $(2, 1)$.

Solución Ambos puntos tienen coordenada r igual a 2, de modo que están a 2 unidades del origen. El primero tiene coordenada θ igual a $3\pi/2$, que es 3/4 de una revolución completa, de modo que está a 3/4 alrededor del círculo de radio 2, en $(0, -2)$.

El segundo punto tiene coordenada θ igual a 1. De las fórmulas anteriores vemos que

$$x = 2 \cos 1 = 1.0806 \quad \text{y} \quad y = 2 \operatorname{sen} 1 = 1.6830$$

Problemas para la sección G

Para los problemas del 1 al 7, dé coordenadas cartesianas para los puntos con las siguientes coordenadas polares (r, θ). Los ángulos se miden en radianes.

1. $(1, 0)$
2. $(0, 1)$
3. $(2, \pi)$
4. $(\sqrt{2}, 5\pi/4)$
5. $(5, -\pi/6)$
6. $(3, \pi/2)$
7. $(1, 1)$

Para los problemas del 8 al 15, dé coordenadas polares para los puntos con las siguientes coordenadas cartesianas. Seleccione $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

8. $(1, 0)$
9. $(0, 2)$
10. $(1, 1)$
11. $(-1, 1)$
12. $(-3, 3)$
13. $(0.2, -0.2)$
14. $(3, 4)$
15. $(-3, 1)$

16. Todo punto del plano se puede representar por un par de coordenadas polares, pero, ¿las coordenadas polares (r, θ) estarán determinadas de manera única por las coordenadas cartesianas (x, y)? Dicho de otra manera, para cada par de coordenadas cartesianas, ¿hay un par y sólo uno de coordenadas polares para ese punto?, ¿por qué sí?, ¿por qué no?

Sección 11.

1 a) 80-90
b) 60-72
c) 60-10
11 a) Decre
b) Crecie
15 Media lon
locidad or

Sección 11.

1 *B, B, B*

3 (1, –1, –
abajo.

9 Cilindro d
eje *x*

11 *Q*

13 (1.5, 0.5, -

15 (–4, 2, 7)

19 $(x-1)^2 +$
$+ (z-$

Sección 11.

1. a) Decre
b) Aume

3 a) Tazón
b) Crece
c) Plato
d) Tazón
e) Plato

5 a) I
b) V
c) IV
d) II
e) III

9 b) *x* crec

Sección 11.

11 a) A
b) B
c) A

23 a) (III)
b) (I)
c) (V)

RESPUESTAS A PROBLEMAS

Sección 11.1

1 a) 80-90° F
b) 60-72° F
c) 60-100° F

11 a) Decreciente
b) Creciente

15 Media longitud de onda de la velocidad original = 2 asiento/seg.

Sección 11.2

1 *B, B, B*

3 (1, –1, –3); Frente, izquierda, abajo.

9 Cilindro de radio 2 a lo largo del eje x

11 Q

13 (1.5, 0.5, –5)

15 (–4, 2, 7)

19 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$

Sección 11.3

1. a) Decrece
b) Aumenta

3 a) Tazón
b) Crece
c) Plato
d) Tazón
e) Plato

5 a) I
b) V
c) IV
d) II
e) III

9 b) x creciente

Sección 11.4

11 a) A
b) B
c) A

23 a) (III)
b) (I)
c) (V)
d) (II)
e) (IV)

27 a) (II) (E)
b) (I) (D)
c) (III) (G)

29 $\alpha+\beta>1$: creciente
$\alpha+\beta=1$: constante
$\alpha+\beta<1$: decreciente

Sección 11.5

1 $\Delta z=0.4$; $z=2.4$

3 $f(x,y)=2-\frac{1}{2}\cdot x-\frac{2}{3}\cdot y$

5 $z=4+3x+y$

7 No

9 $f(x,y)=2x-0.5y+1$

11 – 1.0

13 $f(x,y)=3-2x+3y$

19 a) no
b) no
c) no
e) 0.5 de GPA

Sección 11.6

3 a) I
b) II

7 Esferas

9 $9x-\frac{5}{2}y+\frac{1}{3}z+\frac{67}{6}$

11 $-(3/2)x-3y+3z-4$

13 Hiperboloide de dos hojas

15 Paraboloide elíptico

17 Elipsoide

19 Esfera

Sección 11.7

3 b) Sí

5 0

7 0

9 1

13 $\pm\sqrt{(1-c)/c}$.

15 No

Repaso del capítulo 11

1 Recta vertical que pasa por (2, 1, 0)

3 $(x/5)+(y/3)+(z/2)=1$

11 No podría ser cierto

13 Podría ser cierto

15 Cierto

17 $3x-5y+1=c$

19 $2x^2+y^2=k$

23 $g(x,y)=3x+y$

Sección 12.1

1 $\vec{p}=2\vec{w}$
$\vec{q}=-\vec{u}$
$\vec{r}=\vec{u}+\vec{w}$
$\vec{s}=2\vec{w}-\vec{u}$
$\vec{t}=\vec{u}-\vec{w}$

3 $\sqrt{11}$

5 $-15\vec{i}+25\vec{j}+20\vec{k}$

7 $\sqrt{65}$

9 $\vec{i}+3\vec{j}$

11 $-4.5\vec{i}+8\vec{j}+0.5\vec{k}$

13 $\sqrt{11}$

15 5.6

17 $\vec{i}+4\vec{j}$

19 $-\vec{i}$

23 $3\vec{i}+4\vec{j}$

25 $\vec{a}=\vec{b}=\vec{c}=3\vec{k}$
$\vec{d}=2\vec{i}+3\vec{k}$
$\vec{e}=\vec{j}$
$\vec{f}=-2\vec{i}$

27 $\|\vec{u}\|=\sqrt{6}$
$\|\vec{v}\|=\sqrt{5}$

29 (a) $(3/5)\vec{i}+(4/5)\vec{j}$
(b) $6\vec{i}+8\vec{j}$

Sección 12.2

1 Escalar

3 Vectorial

5 a) $50\vec{i}$
b) $-50\vec{j}$
c) $25\sqrt{2}\vec{i} - 25\sqrt{2}\vec{j}$
d) $-25\sqrt{2}\vec{i} + 25\sqrt{2}\vec{j}$

7 $180\vec{i} + 72\vec{j}$

9 P
Hacia el centro

11 (79.00, 79.33, 89.00, 68.33, 89.33)

13 48.3° al este del norte
744 km/h

15 548.6 km/h

Sección 12.3

1 –38

3 14

5 238

7 1.91 radianes (109.5°)

9 $\vec{u} \perp \vec{v}$ para $t = 2$ o -1.
Ningún valor de t hace $\vec{u}$ paralela a $\vec{v}$.

11 $3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$
(múltiplos de)

13 $-x + 2y + z = 1$

15 $2x - 3y + 7z = 19$

17 $3x + y + z = -1$

19 $\vec{a} = \frac{8}{21}\vec{d} + \left(\frac{79}{21}\vec{i} + \frac{10}{2}\vec{j} - \frac{118}{21}\vec{k}\right)$

21 38.7°

25 Bantus

Sección 12.4

1 $-\vec{i}$

3 $-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

5 $-2\vec{i} + 2\vec{j}$

7 $\vec{a} \times \vec{b} = -2\vec{i} - 7\vec{j} - 13\vec{k}$
$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$
$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

9 Máx: 6
Mín: 0

11 $x + y + z = 1$

13 a) 1.5
b) $y = 1$

15 $4x + 26y + 14z = 0$

19 b) $\vec{c} \perp \vec{a}$ y $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\|$
c) $-a_2b_1 + a_1b_2$

Repaso del Capítulo 12

3 $\vec{p} = -\frac{4\sqrt{5}}{5}\vec{i} - \frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{j}$

5 $-\vec{u}, \vec{v}, \vec{v} - \vec{u}, \vec{u} - \vec{v}$

7 a) $t = 1$
b) ningún valor de t
c) cualquier valor de t

9 $-2\vec{k}$

11 $\vec{i} - \vec{j}$

13 $\sqrt{6}/2$

15 $\vec{n} = 4\vec{i} + 6\vec{k}$

17 a) (21/5, 0, 0)
b) (0, –21,0) y (0, 0, 3)
(por ejemplo)
c) $\vec{n} = 5\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}$
(por ejemplo)
d) $21\vec{j} + 3\vec{k}$
(por ejemplo)

19 $-\vec{i}/2 + \sqrt{3}\vec{j}/2$
$-\vec{i}/2 - \sqrt{3}\vec{j}/2$

21 Vectorial

25 a) $30\vec{i} - 2\vec{k}$
$20\vec{i} + 15\vec{j} - 5\vec{k}$
$12\vec{i} + 30\vec{j} + 3\vec{k}$
b) $30\vec{i} + \vec{j}$
$20\vec{i} + 16\vec{j} - 3\vec{k}$
$12\vec{i} + 31\vec{j} + 5\vec{k}$

27 38.7° al sur del este.

33 $9x - 16y + 12z = 5$
0.23

Sección 13.1

1 $f_x(3, 2) \approx 2$
$f_y(3, 2) \approx -1$

3 c) Positivo
d) Negativo

5 a) Ambos negativos
b) Ambos positivos

7 a) $\partial P/\partial t$: dólares/mes
Tasa de cambio en pagos oportunos negativos
b) $\partial P/\partial r$:
dólares/punto porcentual.
Tasa de cambio en pagos con tasa de interés positivo.

9 a) Negativo
b) Positivo

11 $f_T(5,20) \approx 1$

13 a) 2.5, 0.02
b) 3.33, 0.02
c) 3.33, 0.02

15 –1

Sección 13.2

1 –1

3 $2xy + 10x^4y$

5 y

7 $a/(2\sqrt{x})$

9 $21x^5y^6 - 96x^4y^2 + 5x$

11 (a + b)/2

13 $2B/u_0$

15 $2mv/r$

17 Gm_1/r_2

19 $-2\pi r/T^2$

21 $\epsilon_0 E$

23 $c \cos(ct - 5x)$

25 $(15a^2bcx^7 - 1) / (ax^3y)$

27 $[x^2y(-3\lambda + 10) - 3\lambda^4(8\lambda^2 - 27\lambda + 50)]/2(\lambda^2 - 3\lambda + 5)^{3/2}$

29 $\pi xy/\sqrt{2\pi xyw} - 13x^7y^3v$

31 $z_x = 7x^6 + yx^{y-1}$
$z_y = 2^y \ln 2 + x^y \ln x$

33 13.6

35 a) 3.3, 2.5
b) 4.1, 2.1
c) 4, 2

37 a) Pre^{rt}
b) e^{rt}

39 $h_x(2, 5) = -0.38$ ft/asientos
$h_t(2, 5) = 0.76$ ft/segundos

Sección 13.3

1 $z = 6 + 3x + y$

3 $z = -4 + 2x + 4y$

5 $z = 9 + 6(x - 3) + 9(y - 1)$

7 $P(r, L) \approx 80 + 2.5(r - 8) + 0.02(L - 4000)$, $P(r, L) \approx 120 + 3.33(r - 8) + 0.02)$

$(L - 6000)$,
$3.33(r - 13$

11 $df = y\cos($
$+ x\cos((xy$

13 $dg = (2u +$

15 $df = dx +$

17 $dP \approx 2.395$

19 $dF = \frac{1}{3}dx +$
$f(1.04, 1.9$

21 a) Aumer
b) Aumer
c) 55 joul

23 l es 1%; g

Sección 13.4

1 a) 1.01
b) 0.98

3 1

5 2.12

7 $x > 2$

9 a) Negati
b) Negati

11 $\nabla z = \frac{1}{y}\cos$
$-\frac{x}{y^2}\cos$

13 $\nabla z = e^y\vec{i} +$

15 $\nabla z = 2x\cos$
$+ 2y\cos(x^2$

17 $2m\vec{i} + 2n\vec{j}$

19 $-\frac{(t^2 - 2t + 4)}{(2s\sqrt{s})}$

21 $-\left(\frac{5\alpha}{\sqrt{5\alpha^2 + \beta}}\right)$

23 $50\vec{i} + 96\vec{j}$

25 $(1/2)\vec{i} + (1$

27 a) $2/\sqrt{13}$
b) $1/\sqrt{17}$
c) $\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$

29 a) $-\sqrt{2}/2$
b) $\sqrt{3} + 1$

31 4.4

33 $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{}$
$+ (4\sqrt{2} -$

35 $y = 2x - 7$

37 P

$(L - 6000)$, $P(r, L) \approx 160 + 3.33(r - 13) + 0.02(L - 7000)$.

11 $df = y\cos(xy)\,dx + x\cos((xy)\,dy$

13 $dg = (2u + v)\,du + u\,dv$

15 $df = dx + dy$

17 $dP \approx 2.395\,dK + 0.008\,dL$

19 $dF = \frac{1}{3}\,dx + 2dy$

$f(1.04, 1.98) \approx 2.973$

21 a) Aumenta
b) Aumenta
c) 55 joules

23 l es 1%; g es 2%

Sección 13.4

1 a) 1.01
b) 0.98

3 1

5 2.12

7 $x > 2$

9 a) Negativo
b) Negativo

11 $\nabla z = \frac{1}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\vec{i} - \frac{x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\vec{j}$

13 $\nabla z = e^y\vec{i} + e^y(1 + x + y)\vec{j}$

15 $\nabla z = 2x\cos(x^2 + y^2)\vec{i} + 2y\cos(x^2 + y^2)\vec{j}$

17 $2m\vec{i} + 2n\vec{j}$

19 $-\frac{(t^2 - 2t + 4)}{(2s\sqrt{s})}\vec{i} + \frac{(2t - 2)}{\sqrt{s}}\vec{j}$

21 $-\left(\frac{5\alpha}{\sqrt{5\alpha^2 + \beta}}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{2\sqrt{5\alpha^2 + \beta}}\right)\vec{j}$

23 $50\vec{i} + 96\vec{j}$

25 $(1/2)\vec{i} + (1/2)\vec{j}$

27 a) $2/\sqrt{13}$
b) $1/\sqrt{17}$
c) $\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$

29 a) $-\sqrt{2}/2$
b) $\sqrt{3} + 1/2$

31 4.4

33 $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{2})\vec{i} + (4\sqrt{2} - 3\sqrt{5})\vec{j}$

35 $y = 2x - 7$

37 P

39 a) P, Q
c) $\|\text{grad } f\|$
$f_{\vec{u}} = \|\text{grad } f\|\cos\theta$

Sección 13.5

1 10/3

3 $2z + 3x + 2y = 17$

5 $x + 3y + 7z = -9$
$\vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}$

7 a) $6.33\vec{i} + 0.76\vec{j}$
b) -34.69

9 b) Valley

11 a) $x = y = 0$ y $z \neq 0$.
b) $y = 0$; $2x - y + 2z = 3$
c) $-\vec{j}$,
$\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$

13 $2x - y - z = 4$

Sección 13.6

1 $\frac{dz}{dt} = e^{-t}\,\text{sen}(t)\,(2\cos t - \text{sen } t)$

3 $(t^3 - 2)\,/\,(t + t^4)$

5 $2e^{1-t^2}(1 + 2t^2)$

7 $\frac{\partial z}{\partial u} = (e^{-v\cos u} - v\cos(u)e^{-u\,\text{sen}\,v})\,\text{sen } v - (-u\,\text{sen}(v)e^{-v\cos u} + e^{-u\,\text{sen}\,v})v\,\text{sen } u$
$\frac{\partial z}{\partial v} = (e^{-v\cos u} - v\,(\cos(u)e^{-u\,\text{sen}\,v})\,u\cos v + (-u\,\text{sen}\,(v)e^{-v\cos u} + e^{-u\,\text{sen}\,v})\cos u$

9 $\frac{\partial z}{\partial u} = e^v/u$
$\frac{\partial z}{\partial v} = e^v \ln u$

11 $\frac{\partial z}{\partial u} = 2ue^{(u^2 - v^2)}(1 + u^2 + v^2)$
$\frac{\partial z}{\partial v} = 2ve^{(u^2 - v^2)}(1 - u^2 - v^2)$

13 $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{vu}\cos\left(\frac{\ln u}{v}\right)$
$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\ln u}{v^2}\cos\left(\frac{\ln u}{v}\right)$

15 $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$
$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$

17 -0.6

21 $\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$

23 a) $\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial x} + \text{sen}\,\theta\,\frac{\partial z}{\partial y}$
$\frac{\partial z}{\partial \theta} = r(\cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} - \text{sen}\,\theta\,\frac{\partial z}{\partial x})$

b) $\frac{\partial z}{\partial r} = \text{sen}\,\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$
$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\text{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$

Sección 13.7

1 $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$
$f_{xy} = 2$, $f_{yx} = 2$

3 $f_{xx} = 0$
$f_{xy} = e^y = f_{yx}$
$f_{yy} = xe^y$

5 $f_{xx} = -(\text{sen}\,(x^2 + y^2))\,4x^2 + 2\cos(x^2 + y^2)$
$f_{xy} = -(\text{sen}\,(x^2 + y^2))\,4xy = f_{yx}$
$f_{yy} = -(\text{sen}\,(x^2 + y^2))\,4y^2 + 2\cos(x^2 + y^2)$

7 $f_{xx} = -(\text{sen}\,(\frac{x}{y}))\,(\frac{1}{y^2})$
$f_{xy} = -(\text{sen}\,((\frac{x}{y}))\,(\frac{-x}{y^2})\,(\frac{1}{y}) + (\cos\,(\frac{x}{y}))\,(\frac{-1}{y^2}) = f_{yx}$
$f_{yy} = -(\text{sen}\,(\frac{x}{y}))\,(\frac{-x}{y^2})^2 + (\cos\,(\frac{x}{y}))\,(\frac{2x}{y^3})$

9 $z_{xy} = 0$

11 a) Positivo
b) Cero
c) Positivo
d) Cero
e) Cero

13 a) Negativo
b) Cero
c) Negativo
d) Cero
e) Cero

15 a) Cero
b) Negativo
c) Cero
d) Negativo
e) Cero

17 a) Negativo
b) Negativo
c) Cero
d) Cero
e) Cero

19 a) Negativo
b) Postivo
c) Positivo
d) Positivo
e) Negativo

Sección 13.8

1 a) $u(4, 1) \approx 56.05°C$
$u(8, 1) \approx 70.05°C$
b) $u(6, 2) \approx 62.1°C$

3 $c = D(a^2 + b^2)$

13 $a = -b^2$

15 a) $u(0, t) = 0$
$u(1, t) = 0$
b) $a = -b^2 = -(\pi k)^2$
para cualquier entero k

17 $A = a/(b^2 + c^2)$, $a > 0$

Sección 13.9

1 $Q(x, y) = 1 - 2x^2 - y^2$

3 $Q(x, y) = -y + x^2 - y^2/2$

5 $L(x, y) = 2e + e(x - 1) + 3e(y - 1)$
$Q(x, y) = 2e + e(x - 1) + 3e(y - 1) + e(x - 1)(y - 1) + 2e(y - 1)^2$

7 $L(x, y) = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(y - 1)$
$Q(x, y) = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(y - 1) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(x - 1)^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - 1)(y - 1) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(y - 1)^2$

9 $L(x, y) = \frac{e}{2} + \frac{e}{4}(x - 1) + \frac{e}{4}(y - 1)$
$Q(x, y) = \frac{e}{2} + \frac{e}{4}(x - 1) + \frac{e}{4}(y - 1) - \frac{e}{8}(x - 1)^2 + \frac{e}{4}(x - 1)(y - 1) + \frac{e}{8}(y - 1)^2$

11 $L(x, y) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1)$
$Q(x, y) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1) - \frac{1}{4}(x - 1)^2 + \frac{1}{4}(y - 1)^2$

15 a) xy
$1 - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2 - \frac{1}{2}(y - \frac{\pi}{2})^2$

17 a) $L(x, y) = 1$,
$|E_L(x, y)| \le 0.047$
b) $Q(x, y) = 1 + (1/2)x^2 - (1/2)y^2$,
$|E_Q(x, y)| \le 0.0047$

19 a) $L(x, y) = 0$
$|E_L(x, y)| \le 0.14$
b) $Q(x, y) = x^2 + y^2$
$|E_Q(x, y)| \le 0.036$

Sección 13.10

1. b) No
c) No
d) No
e) Existe, no continuo

3 b) Sí
c) Sí
d) No
e) Existe, no continuo

5 b) Sí
d) No
f) No

7 c) No
e) No
a) No

Repaso del capítulo 13

1 $\partial z/\partial x = \frac{14x + 7}{(x^2 + x - y)^6}$
$\partial z/\partial y = -7(x^2 + x - y)^6$

3 $\partial f/\partial p = (1/q)e^{p/q}$
$\partial f/\partial q = -(p/q^2)e^{p/q}$

5 $\partial z/\partial x = 4x^3 - 7x^6y^3 + 5y^2$
$\partial z/\partial y = -3x^7y^2 + 10xy$

7 $\partial w/\partial s = \ln(s + t) + \frac{s}{(s+t)}$
$\partial w/\partial t = \frac{s}{(s+t)}$

9 84/5

11 Falso

13 Verdadero

15 Falso

17 a) $f_w(2, 2) \approx 2.78$
$f_z(2, 2) \approx 4.01$
b) $f_w(2, 2) \approx 2.773$
$f_z(2, 2) = 4$

19 a) Negativo, positivo, arriba si es positivo, abajo si es negativo
b) $\pi < t < 2\pi$
c) $0 < x < 3\pi/2$ y $0 < t < \pi/2$ o bien $3\pi/2 < t < 5\pi/2$.

23 a) $\partial g/\partial m = G/r^2$
$\partial g/\partial r = -2Gm/r^3$

29 $3e/\sqrt{5}$

31 $f_{\vec{u}}(3, 1) \approx -1.64$

33 $\pm 4\sqrt{\frac{2}{11}}(\frac{2}{2}, -\frac{2}{2}, \frac{3}{2})$

35 a) $-14, 2.5$
b) -2.055
c) 14.221 en dirección de $-14\vec{i} + 2.5\vec{j}$.
d) $f(x, y) = f(2, 3) = 7.56$.
e) Por ejemplo, $\vec{v} = 2.5\vec{i} + 14\vec{j}$,
f) -0.32

37 a) $\frac{\partial w}{\partial u}\Big|_{(1, \pi)} = 3 + \pi$
$\frac{\partial w}{\partial v}\Big|_{(1, \pi)} = 4 - \pi$
b) $\frac{dw}{dt}\Big|_{t=1} = 5\pi - 3\pi^2$

41 $x - y$

43 b) $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$
c) Hacia afuera, exponencialmente decreciente

Sección 14.1

1 A:no
B: sí, máx.
C: sí, silla de montar

5 Puntos de silla: $(1, -1)$, $(-1, 1)$
máx. local $(-1, -1)$
mín. local $(1, 1)$.

7 $(1, 1)$ y $(-1, 1)$, ambos son puntos de silla.

9 Puntos críticos: $(0, 0)$, $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, $(\pm 3\pi, 0)$, $\cdots$
Mínimos locales: $(0, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, $(\pm 4\pi, 0)$, $\cdots$
Puntos de silla: $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 3\pi, 0)$, $(5\pi, 0)$, $\cdots$

11 Máx. local: $(1, 5)$

13 Mínimo local

15 Máximo local

17 a) $(1, 3)$ es un mínimo

Sección 14.2

1 Mississippi:
87 – 88 (máx), 83 – 87 (mín)
Alabama:
88 – 89 (máx), 83 – 87 (mín)

Pennsylvania:
89 – 90 (máx), 70 (mín)
New York:
81 – 84 (máx), 74 – 76 (mín)
California:
100 – 101 (máx),
85 – 87 (mín)
Arizona:
102 – 107 (máx),
85 – 87 (mín)
Massachusetts:
81 – 84 (máx), 70 (mín)

3 Ninguno
5 Mín = 0 en (0, 0)
(no en frontera)
Máx = 2 en (1, 1), (1, –1),
(–1, –1) y (–1, 1)
(en frontera)
7 Máx = 0 en (0, 0)
(no en frontera)
Mín = –2 en (1, –1), (–1, –1)
(–1, 1) y (1, 1) (en frontera)
9 $q_1 = 300$, $q_2 = 225$.
11 $h = 25\%$, $t = 25°C$
15 $l = w = h = 45$ cm
17 $y = 2/3 - x/2$
19 a) 255.2 millones
c) 320.6 millones
21 b) 0.2575

Sección 14.3

1 Mín $= -\sqrt{2}$, máx $= \sqrt{2}$
3 Mín $= \frac{3}{4}$, no máx
5 Mín $= \sqrt{2}$, máx 2
7 Mín $= -\sqrt{35}$, máx $= \sqrt{35}$
9 Máx: 0, no mín.
11 Máx: $\frac{3}{\sqrt{6}}$, mín: $-\frac{3}{\sqrt{6}}$.
13 Máx: $\frac{\sqrt{2}}{4}$, mín: $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.
15 Máx: $f\left(\frac{\sqrt{1}}{5}, \frac{\sqrt{3}}{5}\right) = 2\sqrt{5}$
Mín: $f\left(-\frac{\sqrt{1}}{5}, -\frac{\sqrt{3}}{5}\right) = -2\sqrt{5}$
17 Máx: 1
Mín: –1.
19 $q_1 = 50$ unidades
$q_2 = 150$ unidades
21 b) $S = 1000 - 10l$
23 $r = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$
$h = 2\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$
25 A lo largo de la línea $x = 2y$
27 c) $D = 10$, $N = 20$
$V \approx 9,779$
d) $\lambda = 14.67$
e) \$68, aumento

Repaso del capítulo 14

1 Máximo local: $(\pi/3, \pi/3)$
3 $(2, -\sqrt{2}/2)$ punto de silla
7 Máximos: (–1, 1) y (1, –1)
Mínimos: (0, 0)
9 $p_1 = 110$, $p_2 = 115$.
11 $K = 20$
$L = 30$
$C = \$7,000$
13 a) Reducir K en 1/2 unidad,
aumentar L en 1 unidad.
15 $\lambda = -\frac{1}{2m^2}\left(1 + \frac{2(v_1 v_2)^{\frac{1}{2}}}{v_2 + v_2}\right)$;
semanas^2
17 $d \approx 5.37$ m, $w \approx 6.21$ m,
$\theta = \pi/3$ radianes
19 b) $-$ grad d
21 a) $a/(v_1 \cos\theta_1) + b/(v_2 \cos\theta_2)$
23 $d \approx 0.9148$.

Sección 15.1

1 Suma inferior: 0.34
Suma superior: 0.62
3 Suma superior: 46.63
Suma inferior: 8
Promedio ≈ 27.3
5 Positivo
7 40/3
9 $\int_R w(x, y)\, dx\, dy \approx 2700$ pies cúbicos, donde R es la región
$0 \le x \le 60$
$0 \le y \le 8$
11 a) Alrededor de 148 tornados
b) Alrededor de 56 tornados
c) Alrededor de 2 tornados
13 a) Positivo
b) Positivo
c) Positivo
d) Cero
e) Cero
f) Cero
g) Negativo
h) Cero
i) Negativo
j) Cero
k) Cero
l) Positivo
m) Positivo
n) Positivo
o) Cero
p) Cero

Sección 15.2

1 $\frac{4}{15}(9\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1) = 2.38176$
3 32/9
5 $\int_1^4 \int_1^{\square} \_\_\, dy\, dx$
o $\int_1^2 \int_1^4 f\, dx\, dy$
7 $\int_1^4 \int_{(x-1)/3}^2 f\, dy\, dx$
9 $(e^4 - 1)(e^3 - e)$
11 ≈ -2.68
13 14
15 $\frac{e-1}{2}$
17 $\frac{2}{9}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$
19 $\int_{-5}^5 \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} (25 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$
21 $\int_0^4 \int_{y-4}^{(4-y)/2} (4 - 2x - y)\, dx\, dy$
23 Volumen = 6
25 1/10
27 $\frac{1}{2}(1 - \cos 1) = 0.23$

Sección 15.3

1 2
3 $a + b + 2c$
7 Límites sin sentido
9 Límites sin sentido.
13 $\frac{15}{2}$
15 $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dy\, dz\, dx$
17 $m = 1/36g$; $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) =$
(1/4, 1/8, 1/12)
19 $m(b^2 + c^2)/3$

Sección 15.4

1 0.7854

3 0.7966

5 4

7 0.79

9 4

Sección 15.5

1 $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_{0}^{2} f\, r\, dr\, d\theta$

3 $\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\sqrt{2}} f\, r\, dr\, d\theta$

13 0

15 $-2/3$

17 6

19 $32\pi(\sqrt{2}-1)/3$

21 a) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_{1}^{4} f\ \delta(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$

b) (i)

c) Alrededor de 39,000

Sección 15.6

1 $200\pi/3$

3 25π

5 $\int_{0}^{1}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{4} \delta \cdot r dr\, d\theta\, dz$

7 $\int_{0}^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi}\int_{0}^{5} \delta \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

9 $\int_{0}^{3}\int_{0}^{1}\int_{0}^{5} \delta \cdot dz\, dy\, dx$

11 π

13 a) Positivo

b) Cero

15 $25\pi/6$

17 27π

19 $3/\sqrt{2}$

21 3/4

25 $3I = \frac{6}{5}a^2$; $I = \frac{2}{5}a^2$.

Sección 15.7

1 a) 20/27

b) 199/243

3 a) $k = 8$

b) 1/3

5 $\int_{65}^{100}\int_{0.8}^{1} f(x, y)\, dx\, dy$

7 $f(x, y) = \frac{30}{\pi} e^{-50(x-5)^2-18(y-15)^2}$

9 a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{4} p(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$

b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}}\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{4} p(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}}^{\frac{2\pi}{6}}\int_{\frac{1}{\sec\theta-2}}^{4} p(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$

Sección 15.8

3 $\rho^2 \operatorname{sen}\phi$

5 13.5

7 9

Repaso del capítulo 15

1 9200 millas cúbicas

7 85/12

9 $10(e-2)$

11 $-4\cos 4 + 2\operatorname{sen} 4 + 3\cos 3 - 2\operatorname{sen} 3 - 1$

13 $\int_{0}^{4}\int_{\frac{y}{2}-2}^{-y+4} f(x, y)\, dx\, dy$ o $\int_{-2}^{0}\int_{0}^{2x+4} f(x, y)\, dy\, dx + \int_{0}^{4}\int_{0}^{-x+4} f(x, y)\, dy\, dx$.

17 $162\pi/5$

19 8π

21 ≈183

23 $8\pi R^5/15$

25 $2\pi Gm\,(r_2 - r_1 - \sqrt{r_2^2+h^2} + \sqrt{r_1^2+h^2}$

27 $40\sqrt{2}$, $54\sqrt{2}$

Sección 16.1

1 La partícula avanza en líneas rectas de (0, 1) a (1, 0) a (0, −1) a (−1, 0) y regresa a (0, 1).

3 La partícula avanza en líneas rectas de (−1, 1) a (1, 1) a (−1, −1) a (1, −1) y regresa a (−1, 1).

5 Sentido de las manecillas del reloj para toda t.

7 Sentido de las manecillas del reloj : $t < 0$,

Sentido contrario al de las manecillas del reloj: $t > 0$.

9 Sentido contrario al de las manecillas del reloj: $t > 0$.

13 $x = -2$, $y = t$

15 $x = -2\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$

17 $x = 5\cos t$, $y = 7\operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$

19 a) Derecha de (2, 4)

b) (−1, −3) a (2, 4)

c) $t < -2/3$

21 a) $a = b = 0$, $k = 5$ o -5

b) $a = 0$, $b = 5$, $k = 5$ o -5

c) $a = 10$, $b = -10$, $k = \sqrt{200}$ o $-\sqrt{200}$

23 $x = 2\cos t$, $y = 0$, $z = 2\operatorname{sen} t$

25 $x = 2 + 3t$, $y = 3 - t$, $z = -1 + t$.

27 $x = 1$, $y = 0$, $z = t$.

29 $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 4t$, $z = 5 - t$

31 Sí

33 a) Líneas rectas

b) No

c) (1, 2, 3)

Sección 16.2

1 a) Ambos parametrizan la recta $y = 3x - 2$

b) Pendiente = 3, 0 intersección $y = -2$

3 b) $-\vec{i} - 10\vec{j} - 7\vec{k}$.

c) $\vec{r} = (1-t)\vec{i} + (3-10t)\vec{j} - 7t\vec{k}$.

5 a) Espiral

b) $\vec{v}(2) = 2{,}24\vec{i} + 0.08\vec{j}$, $\vec{v}(4) = 2.38\vec{i} - 3.37\vec{j}$, $\vec{v}(6) = 2.63\vec{i} - 5.48\vec{j}$.

c) $\vec{v}(2) = -2.235\vec{i} + 0.077\vec{j}$, $\vec{v}(4) = 2.37\vec{i} - 3.371\vec{j}$, $\vec{v}(6) = 2.637\vec{i} + 5.482\vec{j}$.

7 $\vec{v} = -2t\operatorname{sen}(t^2)\vec{i} + 2t\cos(t^2)\vec{j}$, Velocidad $= 2|t|$, La partícula se detiene cuando $t = 0$.

9 $\vec{v} = (2t-2)\vec{i} + (3t^2-3)\vec{j} + (2t^3 - 12t^2)\vec{k}$,

Velocidad = $((2t-2)^2 + (3t^2-3)^2 + (12t^3 - 12t^2)^2)^{1/2}$,
La partícula se detiene cuando $t = 1$.

11 $\vec{v} = -3 \operatorname{sen} t\vec{i} + 4 \cos t\vec{j}$,
$\vec{a} = -3 \cos t\vec{i} - 4 \operatorname{sen} t\vec{j}$

13 $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{a} = \vec{0}$

15 $D = \sqrt{42}$

17 $D \approx 24.6$

19 $x = 5 + 3(t-7)$, $y = 4 + 1(t-7)$, $z = 3 + 2(t-7)$.

21 a) $\vec{v}(2) \approx -4\vec{i} + 5\vec{j}$,
Velocidad $\approx \sqrt{41}$
b) Alrededor de $t = 1.5$
c) Alrededor de $t = 3$

23 a) No
b) $t = 5$
c) $\vec{v}(5) \approx 0.959\vec{i} + 0.284\vec{j} + 2\vec{k}$
d) $\vec{r} \approx 0.284\vec{i} - 0.959\vec{j} + 10\vec{k} + (t-5)(0.959\vec{i} + 0.284\vec{i} + 2\vec{k})$.

25 $\vec{r}(t) = 22.1t\vec{i} + 66\,4t\vec{j} + (442.7t - 4.9t^2)\vec{k}$

27 a) $x(t) = 5 \operatorname{sen} t$, $y(t) = 5 \cos t$, $z(t) = 8$
b) $\vec{v} = -5\vec{j}$, $\vec{a} = -5\vec{i}$
c) $x_u(t) = y_u(t) = 0$,
$z_u(t) = -g$,
$x_t(0) = z_t(0) = 0$,
$y_t(0) = -5$, $x_t(0) = 5$,
$y_t(0) = 0$, $z_t(0) = 8$

29 a) C, E.
b) E, C.
c) Sí, cuando el haz es tangencial a la costa.
d) La velocidad no está definida en las esquinas.

31 $-(2t + 4t^3) / (1 + t^2 + t^4)^2$

Sección 16.3

1 Un disco horizontal de radio 5 del plano $z = 7$.

3 Un cilindro de radio 5 alrededor del eje z, $0 \le z \le 7$

5 Un cono de altura y radio 5.

7 Cilindro, sección transversal elíptica.

9 $x = a \cos \theta$, $y = a \operatorname{sen} \theta$, $z = z$

11 $x = u$, $y = v$, $z = 2u + v - 1$.

13 No

15 Círculo horizontal

17 $x = 5 \operatorname{sen} \phi \cos \theta$
$y = 5 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$
$z = 5 \cos \phi$

19 $x = a + d \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = b + d \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$, $z = c + d \cos \phi$ para $0 \le \phi \le \pi$ y $0 \le \theta \le 2\pi$.

21 Si $\theta < \pi$, entonces $(\theta + \pi, \pi/4)$
Si $\theta \ge \pi$, entonces $(\theta - \pi, \pi/4)$

23 $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u$ para $0 \le v \le 2\pi$

25 a) $x = r \cos \theta$,
$0 \le r \le a$,
$y = r \operatorname{sen} \theta$,
$0 \le \theta < 2\pi$
$z = \frac{hr}{a}$
b) $x = \frac{az}{h} \operatorname{sen} \theta$,
$0 \le z \le h$,
$y = \frac{az}{h} \operatorname{sen} \theta$,
$0 \le \theta < 2\pi$,
$z = z$

27 $x = ((\frac{z}{10})^2 + 1) \cos \theta$,
$y = ((\frac{z}{10})^2 + 1) \operatorname{sen} \theta$,
$z = z$,
$0 \le \theta \le 2\pi$,
$0 \le z \le 10$.

29 a) $z = (x^2/2) + (y^2/2)$
$0 \le x + y \le 2$
$0 \le x - y \le 2$

31 a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,
$x, y, z \ge 0$.

33 a) $\vec{r}(t) = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + a \cos t\vec{u} + a \operatorname{sen} t\vec{v}$

35 a) $x = (\cos(\frac{\pi}{3}t) + 3) \cos \theta$
$y = (\cos(\frac{\pi}{3}t) + 3) \operatorname{sen} \theta$
$z = t \quad 0 \le \theta \le 2\pi$,
$0 \le t \le 48$
b) 456π pulg.^{3}

Sección 16.4

1 Círculo:
$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$

3 Parábola:
$y = (x-2)^2$, $1 \le x \le 3$
Implícito

5 $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $y < 0$,
Explícito:
$y = -\sqrt{-x^2 + 2x}$,
Paramétrico:
$x = 1 + \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$,
con $\pi \le t \le 2\pi$

7 $x + 2y = 0$

11 a) $z = 1.054217$
b) $m(x, y, z) \approx 0 + 6x - 7(y-1) - 4(z-1)$,
$f_2(0.01, 0.98) \approx 1.05$
c) $\partial f_2/\partial x$ a $(0, 1)$ es $3/2$,
$\partial f_2/\partial y$ a $(0, 1)$ es $-7/4$

13 a) Gráfica tangente al plano
b) $z \approx 7 - (2/5)(x-3) - (4/5)(y-5)$

15 a) $S = \ln(a^a(1-a)^{(1-a)}) + \ln b - a \ln p_1 - (1-a) \ln p_2$
b) $b = \frac{c^1 p_1^a p_2^{(1-a)}}{a^a (1-a)^{(1-a)}}$

Sección 16.5

1 250,000 estadios, o 46 000 km.

5 No siempre cerrado

Repaso del Capítulo 16

1 $x = t$, $y = 5$

3 $x = 4 + 4 \operatorname{sen} t$, $y = 4 - 4 \cos t$

5 $x = 2 - t$, $y = -1 + 3t$, $z = 4 + t$.

7 $x = 1 + 2t$, $y = 1 - 3t$, $z = 1 + 5t$

9 $x = 3 \cos t$
$y = 5$
$z = -3 \operatorname{sen} t$

11 a) (I) $= C_4$, (II) $= C_1$, (III $= C_2$, (IV) $= C_6$
b) C_3 : $0.5 \cos t\vec{i} - 0.5 \operatorname{sen} t\vec{j}$,
C_5 : $-2 \cos(\frac{t}{2})\vec{i} - 2 \operatorname{sen}(\frac{t}{2})\vec{j}$

13 a) En la dirección dada por el vector: $\vec{i} - \vec{j}$
b) Direcciones dadas por vectores unitarios:
$\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$
c) -4

15 Línea de ecuación:
$x = 1 + 2t$
$y = 2 + 3t$
$z = 3 + 4t$
Distancia más corta: $\sqrt{74}/29$

17 La ecuación de la curva es $x = 1 - 2y^2$, $-1 \le y \le 1$.

19 a) (2, 3, 0)
b) 2
c) No; no en línea

21 a) $x = (V \cos A) \cdot t - 15$
$y = -16t^2 + (V \text{ sen } A)t + 6$
c) $A \approx 52°$

23 a) $(x, y) = (t, 1)$
b) $(x, y) = (t + \cos t, 1 - \text{sen } t)$

25 $x = 2 - 2s - 2t$,
$y = 3 - 3s - 0.5t$,
$z = -1.6 + 3.6s + 1.6t$

29 a) $a = 0.0893$, $b = 4.48$
b) $a = 0.427$, $b = 8.26$
c) $a = 1.43$, $b = 21.4$

31 a) extendido
b) extendido
c) comprimido
d) sea $c < 0$

Sección 17.1

1 a) IV
b) III
c) I
d) II

9 $\vec{V} = -y\vec{i}$
11 $\vec{V} = -x\vec{i} - y\vec{j} = -\vec{r}$
13 $\vec{V} = -y\vec{i} + x\vec{j}$
15 $\vec{F}(x, y) = x\vec{i}$
(por ejemplo)
17 $\vec{F}(x, y) = \frac{y\vec{i} - x\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
(por ejemplo)

Sección 17.2

1 y = constante
3 $y = -\frac{2}{3}x + c$
9 a) III
b) I
c) II
d) V
e) VI
f) IV

Repaso del Capítulo 17

1 b) (i) sí
(ii) no
(iii) sí
(iv) no

5 a) $\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$
b) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
c) $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k}$
d) $\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{i} + \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{j} + \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k}$
e) $\frac{\cos t}{2\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\text{sen } t}{2\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{k}$
f) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Sección 18.1

1 Positivo
3 Positivo
5 $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} < \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} < \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$
7 Positivo
9 0
11 0
13 16
15 32
19 C_1, C_2
21 a) Varios valores
b) Varios valores
23 a) Varios valores
b) Varios valores
27 $-GMm/8000$

Sección 18.2

1 116.28
3 82/3
5 $e^2 - e$
7 85.32
9 24π
11 $C_1 : (t, \sqrt{2t - t^2})$,
$0 \le t \le 2$
$C_2 : (t, -2(t - 1)^2)$,
$-1 \le t \le 2$
$C_3 : (t, \text{sen } t)$,
$-2\pi \le t \le -\pi$
13 a) 11/6
b) 7/6

Sección 18.3

3 Sí
5 No
7 9/2
9 $\frac{3}{\sqrt{2}}(\ln \frac{3}{\sqrt{2}} + 1)$
11 a) e
b) e
13 b) No
19 a) $\pi/2$
b) No
21 a) Aumenta

Sección 18.4

3 $f(x, y) = x^2y + 2y^4 + K$
K = constante
5 No
7 Sí, $f = x^2y^3 + xy + C$
9 Sí, $f = \ln A|xyz|$ donde A es una constante positiva.
11 b) $-\pi$
13 πab
15 3/2

Sección 18.5

1 $x = -1 + r \cos \theta$,
$y = 2 + r \text{ sen } \theta$,
$2 \le r \le 3$, $0 \le \theta \le 2\pi$
3 $x = s$,

$y = tg(s) +$
$a \le s \le b$,

Repaso del

1 a) Nega
b) C_1: F
C_2, C
C_3: N
c) Nega
3 2
5 12
7 Falso
9 Verdadero
11 −58
15 a) $\omega =$
$K =$
c) $r <$
$2\omega\pi$
$r \ge$
$2K\pi$
17 b) Círc
c) No

Sección 19

1 a) Posi
b) Neg
c) Cero
d) Cero
e) Cero
3 a) Cero
b) Cero
c) Cero
d) Neg
e) Cero
5 a) 5
b) 4
c) 11
d) 9
7 a) Cero
b) Cero
9 Cero
11 8π
13 Cero
15 a) Cero
b) Cero

$y = tg(s) + 1\ (1 - t)\ f(s)$,
$a \le s \le b,\ 0 \le t \le 1$

Repaso del Capítulo 18

1 a) Negativo
b) C_1: Positivo
C_2, C_4: Cero
C_3: Negativo
c) Negativo

3 2

5 12

7 Falso

9 Verdadero

11 −58

15 a) $\omega = 3000$ rad/hr
$K = 3 \cdot 10^7$ m^2 · rad/hr
c) $r < 100$ m, circulación es $2\omega\pi r^2$
$r \ge 100$ m, circulación es $2K\pi$

17 b) Círculos
c) No

Sección 19.1

1 a) Positivo
b) Negativo
c) Cero
d) Cero
e) Cero

3 a) Cero
b) Cero
c) Cero
d) Negativo
e) Cero

5 a) 5
b) 4
c) 11
d) 9

7 a) Cero
b) Cero

9 Cero

11 8π

13 Cero

15 a) Cero
b) Cero

17 b) $4\pi\lambda h$

21 a) Velocidad máxima
b) 0
c) $\pi ua^2/2$

Sección 19.2

1 6

3 $\pi/2$

5 7/3

7 π sen 25

9 1296p

11 $-81\pi/4$

13 12π

15 $625\pi/2$

17 b) (i) $\lim_{H\to 0} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$
$\lim_{H\to\infty} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi q$
(ii) $\lim_{R\to 0} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi q$
$\lim_{H\to\infty} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$

19 $11\pi/2$

Sección 19.3

1 4/3

7 195

5 $-\pi R^7/28$

7 $2\pi c(a^2 + b^2)$

Repaso Capítulo 19

5 4

7 1.5

9 12

11 $-8(1 + e^{-1})$

13 24π

15 $(\pi/6) - 1/3$

19 b) 0
c) $Ih \ln |b/a|/2\pi$

Sección 20.1

5 0

7 0

9 $2/\|\vec{r} - \vec{r}_0\|$

13 0

15 $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{r})$

17 a) Positivo
b) Cero
c) Negativo

19 a) 0

21 a) Flujo = c^3
b) 1
c) 1

23 a) $2\pi c^3$
b) 2
c) 2

25 a) 0
b) No definido

Sección 20.2

1 24

3 Cero

5 $\int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 8$

9 a) 0
b) 4π

11 $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_R \text{div } \vec{F}\ dV = 0$

15 a) 30 watts/km^3
b) $\alpha = 10$ watts/km^3
d) 6847°C

Sección 20.3

1 $4y\vec{k}$

3 $\vec{0}$

5 $4x\vec{i} - 5y\vec{j} + z\vec{k}$

7 $(2x^3yz + 6x^7y^5 - xy)\vec{i} + (-3x^2y^2z - 7x^6y^6 + y)\vec{j} + (yz - z)\vec{k}$

9 rot $(F_1(x)\vec{i} + F_2(y)\vec{j} + F_3(z)\vec{k} = 0$

11 a) Rotacional cero
b) Rotacional $\neq 0$
c) Rotacional $\neq 0$

19 (c), (d), (f)

21 C_2, C_3, C_4, C_6,

23 $\nabla\phi + (\vec{F} - \nabla\phi)$

25 $\vec{F} = (-\frac{3}{2}z - 2y)\vec{i} + (2x - z)\vec{j} + (y + \frac{3}{2}x)\vec{k}$

Sección 20.4

1 No

3 a) -200π
b) 0

5 π

13 a) No se puede decir nada
b) 0

15 a) $-2\pi a^2$
b) $2\pi a^2$
c) Orientaciones no relacionadas

17 -2π

Sección 20.5

1 Sí

7 Sí
$(-xy + 5yz)\vec{i}$
$+ (2xy + xz^2)\vec{k}$.

9 a) Sí
b) Sí
c) Sí

11 a) rot $\vec{E} = \vec{0}$
b) Espacio tridimensional menos un punto si $p > 0$
Espacio tridimensional si $p \leq 0$.
c) Satisface la prueba para toda p.
$\phi(r) = r^{2-p}$ si $p \neq 2$.
$\phi(r) = \ln r$ si $p = 2$.

15 $\vec{r} = (1 - s)\vec{r}(t) + s\vec{r}_0$
$a \leq t \leq b$

Sección 20.6

5 b) 54

Repaso del Capítulo 20

1 div $\vec{v} = -6$

5 $\pi b^2 h/3$

7 div $\vec{F} = 3$

9 Verdadero

11 Verdadero

13 Verdadero

15 Falso

17 div $\vec{E}(P) \leq 0$, div $\vec{E}(Q) \geq 0$.

23 b) $\vec{v}(x) = (55 - x/50)\vec{i}$ mph
Si $0 \leq x < 2000$
$\vec{v}(x) = 15\vec{i}$ mph
Si $2000 \leq x < 7000$
$\vec{v}(x) = (15 + (x - 7000)/25)\vec{i}$ mph
Si $7000 \leq x < 8000$
$\vec{v}(x) = 55\vec{i}$ mph
Si $x \geq 8000$
c) div $\vec{v}(1000) = -1/50$
div $\vec{v}(5000) = 0$
div $\vec{v}(7500) = 1/25$
div $\vec{v}(10{,}000) = 0$
mph/pies

25 a) $\vec{v} = (1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2})\vec{i} + \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}\vec{j}$

Apéndice D

1 $(1/3)x^3 + x^2 + \ln|x| + C$, C una constante.

3 $\ln|t| - 4/t - 2/t^2 + C$, C una constante.

5 $(1/2)\operatorname{sen} 2t + C$, C una constante

7 $-\ln|\cos\theta| + C$, C una constante

9 $(1/2)e^{z^2} + 1 + C$, C una constante.

11 $(1/2)\tan^{-1} 2z + C$, C una constante.

13 $(-1/20)\cos^4 5\theta + C$, C una constante.

15 $(1/3)(\ln x)^3 + C$, C una constante

17 $xe^x - e^x + C$, C una constante.

19 $(1/2)x^2 \ln x - (1/4)x^2 + C$, C una constante.

21 $(1/142)(10^{71} - 2^{71})$

23 $-11e^{-10} + 1$

25 $2e(e - 1) \approx 9.34$.

27 b) Máxima en julio de 1993
Mínima en enero de 1994
c) Aum. más rápido en mayo de 1993.
Dism. más rápido en oct. de 1993.

29 a) $\sum_{i=0}^{N-1} \rho(x_i)\Delta x$
b) 16 gramos

31 a) 3 millas
b) 282, 743

33 a) $\sum_{i=1}^{N-1} 4\pi(r_e + h_i)^2$
$3\ 1.28e^{-0.000124hi}\ \Delta h$
b) 6.48×10^{16}

35 a) $\sum_{i=1}^{N} \pi \frac{9x_i}{4} \Delta x$
b) 18π

37 2267.32 pies cúbicos

Apéndice F

5 b) Alrededor de $\frac{3}{4}$

7 a) $p(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - 100}{15}\right)}}{15\sqrt{2\pi}}$
b) 6.7% de la población

Apéndice G

1 (1, 0)

3 (–2, 0)

5 $(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2})$

7 (cos 1, sen 1)

9 $(2, \pi/2)$

11 $(\sqrt{2}, 3\pi/4)$

13 $(0.28, 7\pi/4)$

15 (3.16, 2.82)

Aceleración,
movimient
movimient
vector de l
compon
definici
Aproximació
cuadrática
lineal, 161
Aproximació
error acot
Aproximació
acotación
Área
de paralel
vector de,
de para
Aristóteles, 3
Búsqueda de
Calentamient
Cambio de
parámetro
variable,
Campo
de fuerza,
eléctrico,
diagran
gravitacio
magnétic
vectorial
conser
de sole
depend
indepe
circulació
definició
definició
circulació
Campo vect
central, 3
conserva
curva int
definició
divergen

ÍNDICE

Aceleración, 73, 300-305
  movimiento circular de la, 300
  movimiento lineal de la, 298
  vector de la, 299
    componentes del, 299
    definición límite del, 298
Aproximación
  cuadrática, 181-84
  lineal, 161-168
Aproximación cuadrática 192
  error acotado para la, 194
Aproximación lineal
  acotación de error para la,
Área
  de paralelogramo, 415
  vector de, 417
    de paralelogramo, 414
Aristóteles, 325
Búsqueda de gradiente, 193
Calentamiento mundial 142
Cambio de
  parámetro, 489
  variable, 275-278, 491
Campo
  de fuerza, 322
  eléctrico, 423
    diagrama del, 314
  gravitacional, 324, 456
  magnético, 372, 402, 452
  vectorial central, 375
    conservador, 374-77
    de solenoide, 389
    dependiente de trayectoria, 354
    independiente de trayectoria, 358
  circulación y el, 356
  definición del, 356
  definición del, 358
  circulación y el, 362
Campo vectorial, 338-345
  central, 346
  conservador, 339-342
  curva integral del, 337
  definición del, 315
  divergencia del, 390-395
  gradiente, 318, 350
  independiente de trayectoria, 432
  irrotacional 383
  línea de flujo del, 417
  línea de movimiento del, 321-327
    definición de la, 323
  movimiento del, 323
  propiedades del, 370
  rotacional del, 403-409
  sin divergencia, 392
  sin rotacional, 408
  solenoidal, 415
Catálogo de superficies, 50
Cilindro
  parabólico, 308
  parametrización del, 306
Cilindro parabólico, 21
Circulación, 361
  campo dependiente de trayectoria y, 361
  densidad de, 382
  superficie de, alrededor de, 467
Cociente de diferencia
  derivada parcial y el, 111
Coeficiente de correlación, 198
Componentes de vector, 75
Conjunto
  función de costo, 214
  función de densidad, 267
    dependencia y la, 270
    independencia y la, 272
Cono, parametrización del, 319
Conservación de energía, 374-377
Constante gravitacional, 310
  gravitacional universal, 198
Consumo de carne, 3
Continuidad, 83
Coordenada
  plano, 12
  eje, 10
Coordenadas
  cartesianas, en tres dimensiones, 10
  cilíndricas, 254
  de espacio-tiempo, 77
  esféricas,
  polares, 506
Coordenadas cartesianas
  conversión a
    cilíndricas, 258
    esféricas, 261
    polares, 506
    tridimensionales, 10
Coordenadas cilíndricas, 258-260
  conversión a cartesianas de las, 258
  elemento de volumen en las, 259
  integración en, 259
  volumen y, 259
Coordenadas esféricas, 302
  conversión a cartesianas de las, 249
  elemento de volumen de las, 250
  integración en las, 250
  parametrización de una esfera de las, 300
Coordenadas espacio-tiempo, 80
Coordenadas polares, 439
  cilíndricas, 380
  conversión a cartesianas de las, 386
  elemento de área de las, 248
  esféricas, 228
  integración en las, 231-34
Copérnico, 325
Corriente del golfo 314, 322
Coseno de dirección 168
Cuadrática
  aproximación, 161-64
  función, 179
    discriminante de la, 180
    gráfica de la, 193
    prueba de segunda derivada, y, 179
Cuarto calentado, 109
Cuerda de guitarra, en vibración, 111
Curva
  ajuste de, 197
  cerrada, 311
  integral, 356
  lisa, por partes, 367
  longitud de, 301

nivel de, 27
gráfica, y, 30
orientada, 356
parametrización, 312-316
parámetro de, 317
representación
explícita, 317
implícita, 317
paramétrica, 317
Curva lisa por partes, 333
De la mano derecha
regla, 92
suma, 439
Densidad, 227
función de dos variables, 238
integral definida y la, 227, 234
Derivada
direccional, 134-140
parcial, 102-110
parcial de orden más alto, 148
parcial de segundo orden, 148-149
ordinaria, 151
Derivada direccional, 141-145
cálculo de la, 139
definición de la, 136
ejemplos de la, 136
y derivadas parciales, 148
y vector gradiente, 148
Derivada parcial de orden superior, 152
Derivada parcial de segundo orden, 148
interpretación de la, 150
Derivada parcial, 102-110
calcular
algebraicamente la, 110
gráficamente la, 104
cociente de diferencia y la, de segundo orden, 147
definición de la, 103-104
diagrama de contorno y la, 104
gráfica y la, 103
interpretación de la, 149
notación alternativa de la, 104
orden superior de la, 147
rapidez de cambio y la, 102-103
y derivadas direccionales, y diferenciabilidad, 124
Desviación estándar, 496
de distribución normal, 497
Determinante, 486
área y, 487
producto cruz, 488
volumen y, 488
Diagrama de contorno, 24-32
de Cobb-Douglas, 31
de densidad y, 232
de punto crítico,
máximo local, 184
mínimo local, 188
punto silla, 32, 188
derivada parcial de, y, 111
fórmula algebraica del, 27-28
función lineal de, 233
lectura de, 2
tabla de, y, 32
Diagramas de árbol, 434
Diferenciabilidad,
y derivadas parciales, 116
Diferencial, 119
cálculo de la, 119
linealidad local y la, 135
notación de la, 136
Dipolo, 200
Discriminante, 192, 193
Distribución de Boltzmann, 505
Distribución normal, 502
y la desviación estándar, 502
Divergencia, 430-435
coordenadas cartesianas de la, 431, 463
definición de la, 430
libre, 431
notación alternativa para la, 437
rotacional y, 453
Divergencia de campo vectorial 430-435
prueba para campo rotacional de la, 436
Ecuación de calor, 154
de difusión, 167
del gas ideal, 129
estado, 497
onda, 157
Ecuación diferencial, parcial, 166-171
condiciones en la frontera de la, 169
ecuación de difusión de la, 167
ecuación de calor de la,
en una dimensión, 171
representación de la, 170
viajera, 170
Ejes
coordenados, 10
por la derecha, 12
Ejes por la derecha, 250
Energía
conservación de la, 189
potencial, 192
Eratóstenes, 324
Esfera
ecuación para la, 14
parametrización de la, 301
Expansión de Taylor
de primer grado, 178, 179
de segundo grado, 182, 183
Extremo global
cómo hallar el, 178
definición del, 174
región cerrada acotada del, 183
Extremo,
en, 193
global, 191
local, 193
región cerrada acotada, 191
Extremo local
búsqueda de gradiente del, 195
cómo hallar, el, 195
definición del, 180
Factor viento-frío, 8
Figura de Lissajous, 265
Flujos
circulante, 368
con circulación cero, 362
de fluido, 316
de calor, 152
densidad de, 308
en superficie, 361
Flujo positivo, 370
Fórmula de distancia 14
en dos dimensiones, 13
en tres dimensiones, 14
Frontera
condición de, 165
de región, 201
de región sólida, 201
de superficie, 201
punto de, 201
Fuerza
gravitacional, 78
vector de, 78
Función
armónica, 342
Cobb-Douglas, 31-33
compuesta, 149
continua, 148

en un punto, 152
costo conjunto, 214
cuadrática, 209
gráfica de, 16-18
de dos variables, 2
fórmula algebraica, 3
diagrama de contorno de, 22
gráfica de, 11-17
de superficie, 52
de Lagrange, 210
de tres variables, 49, 51
diagrama de contorno de, 24
superficie a nivel de, 51
superficie, 52
tabla de, 48
densidad de la, 451
de dos variables, 260
de una variable, 458
diferenciabilidad 130
de dos variables, 133
de una variable, 132
diferencial de la, 129
discontinua, 131
límite de, 18, 41-46
lineal, 36
lisa, 150
notación, 2
para fijar una variable, 4-7, 16, 49
potencial, 344
sección transversal de, 16-18
Función compuesta, 168
Función de densidad, 495, 496
conjunta, 267
dependencia y, 270
independencia y, 271
distribución normal de la, 272
de dos variables, 251, 252
de una variable, 480, 482
propiedades de la, 490
probabilidad y la, 268
Función de entropía,
de gasto, 156
de Lagrange 214
de Laplace 165
Función de producción
de Cobb-Douglass, 30-31
fórmula general de la, 30
Función de producción de Cobb-Douglas, 31-32
diagrama de contorno de la, 34
fórmula para la, 32
retornos a escala de la, 44
Función homogénea, 167
Función lineal, 18, 40-44
de dos variables, 39
diagrama de contorno de la, 42
ecuación para la, 40
tabla de la, 41
vista numérica de la, 41
Funciones armónicas, 445
Galileo, 324
Gradiente 189
y rotacional, 191
Grado
función homogénea del, 245
Gráfica
área bajo la, 380
de función de dos variables, 40
de tres espacios en la, 11
derivada parcial y la, 110
plana, 42
simetría circular, de la, 383
Hélice, 280
Hiperboloide
de dos hojas, 185
de una hoja, 183
Histograma, 389
Índice de discapacidad,
Inercia, momento de, 269
Instantánea
rapidez de cambio, 108
velocidad, 277
Integración
coordenadas cartesianas de, 230
coordenadas esféricas de, 256
coordenadas polares de, 247, 255
coordinadas cilíndricas de, 237, 380
de una variable, 379
iterada, 380
límites de, 380
orden de, 235, 240
región no rectangular, 232
región rectangular de, 221
tablas de, 382
técnicas de, 382
Integral
tablas de, 387
Integral de flujo, 401-428
definición de la, 402
en superficie, 413
orientación y, 402
teorema de divergencia y la, 438
vector de área y la, 403
Integral de línea, 332-339
cálculo de la, 337
circulación de la, 337
conversión a una variable de la, 343
definición de la, 342
integral de la, 343
interpretación de la, 335
notación para la, 337
propiedades de la, 338
significado de la, 337
teorema fundamental de, 338
teorema fundamental del cálculo, 340
vector gradiente y la, 341
Integral definida, doble, 226-235
cambio de variables, 235
coordenadas polares de la, 253-256
definición de la, 227
interpretación de la
área de, 226
función densidad de la, 232
valor promedio de la, 232
volumen de la, 230
método de Montecarlo de la, 249
Integral definida, triple, 245-247
cambio de variables de la, 257-262
coordenadas cilíndricas de la, 262
coordenadas esféricas de la, 263
Integral definida, una variable, 487-491
definición de la, 487
diagrama de la, 487, 488
interpretación como
área de la, 487
método de Montecarlo de la, 249
teorema fundamental del cálculo y la, 489
función densidad de la, 489
valor promedio de la, 488
Integral iterada, 238
integral doble e, 240
integral triple e, 235
límites de variable de la, 235
región no rectangular de la, 238
vista gráfica de la, 230
Integrando, 380
Interior 191
de región, 191
punto del, 193
Intersección
de curva y superficie, 272

de recta y plano, 275
Isotermas 228
Jacobiano 264
Ley
de Ampère, 348
de cosenos, 362
de Gauss, 348
de gravitación, 348
de Kepler, 325-26
de movimiento planetario, 362
de movimiento, 316, 358
de Newton, 356, 358
de Snell, de refracción, 365
Línea
de contorno, 25
de flujo, 402
de mínimos cuadrados, 194
de regresión, 194
ecuación paramétrica para la, 280
Linealización, local, 122-130
de tres o más variables, 125
diferencial y la, 128
función de dos variables de la, 122, 126
función de una variable de la, 356
tabla de la, 124
Líneas de flujo 362
definición de las, 364
método de Euler de las, 354
solución numérica de las, 354
Lisa
curva, 333
Mapa de clima, 2, 7
Media, 500, 502
Mediana, 499
Método de Euler, 336
Método de Montecarlo, 249-253
Mínimos cuadrados, 337
Modelo de Rankine, 368
Movimiento centrípeto, 398
Multiplicación escalar
definición del, 64
integral de línea, y, 328
propiedades, 78
Multiplicador es de Lagrange, 207, 208
optimización restringida del, 209
significado del, 211
Newton 321-332
ley de enfriamiento de, 327
ley de gravitación de, 329, 330
leyes de movimiento de, 326
segunda ley de Kepler y la de, 325
Nivel
de la curva, 26
gráfica y, 28
de la superficie, 136
de los conjuntos, 142
Onda, la, 4
Optimización
no restringida, 194-199
restringida, 204-213
función de Lagrange, 214-215
método gráfico, 212
multiplicadores de Lagrange, 213
restricción de desigualdad, 212
solución analítica, 212
Orientación
curva de, 356
superficie de, 400
Origen, 10
Parametrización, 283-286, 307-312
curva, 284-288
cambio de la, 280
complicada, 281
gráfica de función de la, 284
de superficie, 284-292
coordenadas cilíndricas, 285
coordenadas esféricas, 288
de revolución, 287
de tres dimensiones, 288
independencia de la, 219
integral de línea y la, 219
línea en tres dimensiones de la, 286
plana de la, 286
usando vector de posición, 293
Parámetro
cambio de, 274
curva de, 286
rectángulo de, 287
Placa metálica calentada, 102
Plano, 41
coordenado, 40
diagrama de contorno del, 42
ecuación para el, 40, 85, 96
parametrización del, 298
puntos en el, 40
tangente, 117
Población de zorras, 242
Potencial
de la energía, 358
de la función, 360
del vector, 340
Principio de Arquímedes, 447
Principio de Fermat,
Probabilidad, 265, 439
condicional, 270
función de densidad y la, 268
histograma de la, 266
variables independientes de la, 270
Producción de maíz, 26
Producto cruz, 89, 95
componentes del, 93, 486
definición del, 90
determinante y, 93
diagrama de, 92
ecuación de plano y el, 93
propiedades del, 92
Producto escalar, 82
Producto punto, 84-98
definición de, 84
ecuación de plano y, 93
propiedades del, 92
Propiedad de
campo vectorial, 346
integral de línea, 328
producto cruz, 94
producto punto, 84
suma y multiplicación escalar, 77
vector gradiente, 140
Proyección estereográfica, 312
Prueba de rotacional
en dos dimensiones,
en tres dimensiones,
Prueba de segunda derivada, 184, 186
Punto 190
frontera, 386
fuente, 407
interior, 190
sumidero, 190
Punto crítico, 188
clasificación de, 190
cómo encontrar, 184
discriminante, y, 190
de máximo local, 184
de mínimo local, 184
diagrama de contorno de, 184
gráfica de, 185
punto silla, 182
prueba de segunda derivada y, 189, 191
Punto de silla, 182
diagrama de contorno de, 184
gráfica de, 185
Rapidez de cambio, 101-102, 127,

133, 137
Recta de regresión, 194
Región
abierta, 191
acotada, 201
cerrada, 201
Regla de la cadena, 141-148
diagrama de árbol para la, 142
Regla de Simpson, 248
Representación explícita de curva, 292
Representación implícita de curva, 287
Resta de vectores, 67
componentes de la, 67
vista geométrica de la, 63
Retornos a escala, 38
Rotacional
campo, 453
coordenadas cartesianas, 450
definición de, 450
dispositivo para medir, 448
escalar, 451
fórmula para, 450
libre, 448
notación para, 451
prueba para campo de gradiente, 465
y divergencia, 448
y gradiente, 465
Sección transversal de funciones, 98
Silla de mono, 247
Suma de Riemann
de dos variables, 214, 226
de una variable, 449
de tres variables, 450
Suma de Riemann, 449, 450
Suma de vectores, 67
componentes de la, 67
propiedades de la, 75
vista geométrica de la, 63
Suma por la izquierda, 382
Superficie
a nivel, 376
cerrada, 394
cilíndrica, 376
de función de dos variables, 52
de función de tres variables, 52
de revolución, 300
en forma de silla, 370
frontera de, 392
orientación de, 374
parametrización, 300-310
Superficie, catálogo de, 372
Tabla
de diagrama de contorno, y, 30
de función lineal y, 41
de función de tres variables, 48
de integrales, 457
lectura de la, 3
Tangente
aproximación de la, 290
línea y vector velocidad de la, 294
plana, 292
Teorema
de divergencia, 438-441, 465
prueba del 465
de Euler, 120
de función implícita, 408
de Green, 385
prueba del, 385
de Helmholtz, 353
de Pitágoras, 14
de Stokes, 458-464
prueba del, 464
fundamental (del cálculo), 350
de una variable, 402
integral de línea, 376
Trabajo, 85, 359
realizado por una fuerza, 359
vector, y, 86
Transversales en x, 17-18
Transversales en y, 17-18
Utilidad 300
maximizar la, 302
Utilidad, 198
Valor promedio de función
de dos variables, 271
de una variable, 485
Variable
dependiente, 2
independiente, 2
Vector
campo del, 127
cero, 67
de consumo, 77
de desplazamiento, 64-71
de dos variables, 133
de población, 80
de posición, 298, 320
de precio, 80
de tres variables, 135
ejemplos del, 128
gradiente, 127-130
integral de línea del,
notación alternativa del, 127
propiedades del, 128
Vector normal, 87
a curva, 89
a plano, 89
a superficie, 91
Vector, 62
área del, 370
de paralelogramo del, 383
cero, 68
componentes del, 387
consumo del, 80
definición geométrica del, 62
desplazamiento del, 62-71
gradiente, 133-137
magnitud del, 68
multiplicación escalar del, 64
n-dimensional, 78
normal, 85
notacional, 78
ortogonal, 80
paralelo, 82
perpendicular, 84
población del, 80
posición del, 82
potencial, 84
precio del, 80
producto cruz del, 92-98
producto punto del, 82-88
proyección del, 82
resta del, 68
suma del, 68
trabajo y el, 83
unitario, 70
velocidad del, 292-303
línea tangente, y, 294
Velocidad
campo vectorial del, 328
instantánea, 301
vector de la, 300-305
componentes del, 301
definición del, 299
línea tangente y el, 302
velocidad (escalar) y la,
Velocidad (escalar), 289
velocidad (vectorial), y, 74
Vértice libre, 398, 440
Volumen, 230, 262
de paralelepípedo, 94
elemento del, 230
cilíndrico del, 262
esférico del, 232

Esta obra se terminó de imprimir en noviembre de 1999
en los talleres de Impresos Naucalpan, S.A. de C.V.
San Andrés Atoto No. 12, Col. San Esteban
C.P. 53550, Naucalpan, Edo. de México

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

McCallum

Gleason

Hughes-Hallett, *et. al.*

Cálculo de varias variables es la segunda parte del curso de cálculo concebido por el "grupo de Harvard", que encabeza la profesora Deborah Hughes-Hallett, y cuyo texto *Cálculo*, publicado por esta misma editorial, ha venido ganando cada vez más adeptos gracias a la claridad y la novedad de su enfoque, que facilita al estudiante asimilar esta difícil y sin embargo indispensable rama de las matemáticas.

En este texto se abordan las nociones y herramientas necesarias para manejar las funciones de varias variables. Se ha preferido estudiar en detalle y a profundidad los conceptos centrales del cálculo de varias variables, antes que cubrir una gran cantidad de material. Al igual que en el *Cálculo*, se recurre simultáneamente al álgebra, a la representación numérica, a la interpretación gráfica y a la traducción de las ideas al lenguaje común para estudiar desde cuatro perspectivas diferentes el comportamiento de las funciones. Además, *Cálculo de varias variables* desarrolla los conceptos partiendo de numerosos ejemplos extraídos de las más diversas áreas de aplicación del cálculo. El estudiante cultiva así su intuición matemática y obtiene una visión más práctica y a la vez más amplla de la importancia y la utilidad del cálculo como herramienta de modelaje y cuantificación, dentro de cualquier área de desempeño profesional.

ISBN 968-26-1315-9

9 789682 613159

GRUPO PATRIA CULTURAL

COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A. DE C.V.